2.3 Lie群

$\downarrow$

不仅是一个群，还是一个拓扑空间，是一个可微流形。

1. SO(3)群

所有行列式不为0的 3×3 实正交矩阵在矩阵乘法下构成群，称为O(3)群。

$\because A^TA=I \quad \to \det A=\pm1$

$\det A=1$ 的部分包含单位元，因而是O(3)的子群，记为SO(3)。

$\because$ 有9个参数，但由正交条件给出6个限制，所以O(3)实际有3个独立参数。称3参数Lie群。

同时因为限制 $a_{ij}^2\le1$，群参数取值有限制，这种性质称为紧致性。

SO(3) 保持三维空间矢量长度不变的变换群，称为三维空间转动群。

推广，保持n维空间长度不变的为O(n)群，有 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 个独立参数。

保持 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-x_{p+2}^2-\cdots-x_{p+q}^2$ 称为 $O(p,q)$ 群。

2. SU(2)群

8个参数，但由于幺正条件和 $\det(A)=1$ 的条件给出5个限制，所以SU(2)也是3参数Lie群。

SU(2)群保持复二维矢量模长不变的变换群。

SU(n)群独立参数有 n^2-1 个。

将SU(2)写为 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$ $\det A=|a|^2+|b|^2=1$

令 $a=x_0+ix_1$，$b=x_2+ix_3$ $\Longrightarrow x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$。四维空间的三维球面 S^3，

即SU(2)群参数空间是三维球面。

U(1)群的群元可写作 $A=e^{i\alpha}$ $0\le\alpha\le2\pi$。

3. 无穷小生成元和无穷小算符

设r参数的Lie群G，群元可表示为

$A(\alpha)\equiv A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r)\in G$。

约定 $A(0,\cdots,0)=I$。

$\therefore A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r)=A(0,\cdots0)+\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\left.\frac{\partial A}{\partial\alpha_i}\right|_{\alpha_i=0}=I+\sum_{i=1}^{r}\alpha_i X_i$

$\searrow$ G的无穷小生成元

其中存在对易关系 $[X_i,X_j]=C_{ij}^kX_k$。C_{ij}^k 称为Lie群的结构常数。

性质：$C_{ij}^k=-C_{ji}^k$ $\because([X_i,X_j]=X_iX_j-X_jX_i=-[X_j,X_i])$

$C_{ij}^lC_{lk}^m+C_{jk}^lC_{li}^m+C_{ki}^lC_{lj}^m=0$

由 $[[X_i,X_j],X_k]+[[X_j,X_k],X_i]+[[X_k,X_i],X_j]=0$ 得到。

Scanned by CamScanner

考虑 SO(2). 单参数 Lie群.

$$A(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$ 绕z轴转动θ角的转动矩阵.

$$X_\theta=\frac{\partial A(\theta)}{\partial\theta}\Big|_{\theta=0}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$ ∴在转角很小时,有 $A(\delta\theta)=I+\delta\theta\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\cdots$

当转角有限时,令 $\delta\theta=\frac{\theta}{N}$, $N\to\infty$.

则 $$A(\theta)=A(N\cdot\theta/N)=\prod A(\theta/N)=\left(I+\left(\frac{\theta}{N}\right)\cdot X_\theta\right)^N\equiv\sum_{N=0}\frac{1}{N!}[\theta X_\theta]^N=e^{\theta X_\theta}$$

这里的e指数只是一个形式，实际上是要换算成前面那个式子计算的

$\because X_\theta^2=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^2=-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=-I.$ $\therefore X_\theta^3=-X_\theta.$

$$\therefore A(\theta)=\sum_{m=0}\frac{1}{(2m)!}[\theta X_\theta]^{2m}+\sum_{m=0}\frac{1}{(2m+1)!}[\theta X_\theta]^{2m+1}$$
$$=\sum_{m=0}\frac{(-1)^m}{(2m)!}\theta^{2m}\cdot I+\sum_{m=0}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\theta^{2m+1}\cdot X_\theta$$
$$=I\cos\theta+X_\theta\sin\theta$$
$$=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

一般地，有 $A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r)=e^{\sum\alpha_i X_i}$

$\det A=\det[e^{\sum\alpha_i X_i}]=e^{Tr\sum\alpha_i X_i}=1.$ $\therefore Tr X_i=0.$ 模群的无穷小生成元一定无迹.

现考虑 SO(3)群, 三维空间转动群, 则每个元素 先绕x轴转 α_1, 绕y轴转 α_2, 再绕z轴转 α_3, 有

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\underbrace{A_z(\alpha_3)A_y(\alpha_2)A_x(\alpha_1)}_{\text{注意先后顺序}}=\begin{pmatrix}\cos\alpha_3 & -\sin\alpha_3 & \\ \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & \\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha_2 & & \sin\alpha_2\\ & 1 & \\ -\sin\alpha_2 & & \cos\alpha_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & \\ & \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ & \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{pmatrix}.$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\alpha_2\cos\alpha_3 & -\cos\alpha_1\sin\alpha_3+\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_3 & \sin\alpha_1\sin\alpha_3+\cos\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_3\\ \cos\alpha_2\sin\alpha_3 & \cos\alpha_1\cos\alpha_3+\sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3 & -\sin\alpha_1\cos\alpha_3+\cos\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3\\ -\sin\alpha_2 & \sin\alpha_1\cos\alpha_2. & \cos\alpha_1\cos\alpha_2\end{pmatrix}.$$

显然, $X_1=\begin{pmatrix} & & \\ & & -1\\ & 1 & \end{pmatrix}.$ $X_2=\begin{pmatrix} & & 1\\ & & \\ -1 & & \end{pmatrix}$ $X_3=\begin{pmatrix} & -1 & \\ 1 & & \\ & & \end{pmatrix}.$

有 $[X_1,X_2]=X_3.$ $[X_2,X_3]=X_1$ $[X_3,X_1]=X_2.$

或 $[X_i,X_j]=\varepsilon_{ijk}X_k$

∴ SO(3) 的群元写成:

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\exp[\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\alpha_3X_3]=e^{\alpha_1X_1}e^{\alpha_2X_2}e^{\alpha_3X_3}.$$

其中 ε_{ijk} 称为全反对称张量. 若 i,j,k之间有相同的,则 $\varepsilon_{ijk}=0$.

若 $i\neq j\neq k$. $\varepsilon_{ijk}=1$. 则 $\varepsilon_{kij}=1$. $\varepsilon_{ikj}=\varepsilon_{kji}=\varepsilon_{jik}=-1$.

Scanned by CamScanner

SU(2)群.

$$A(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$$ 引入参数 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，使.

$$a=(\cos\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_2}{2}+i\sin\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2})e^{i\frac{\alpha_3}{2}}=(C_1C_2+iS_1S_2)e^{i\frac{\alpha_3}{2}}$$

$$b=-\cos\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2}+i\sin\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_2}{2}=-C_1S_2+iS_1C_2.$$

$$\therefore A(a,b)=\begin{pmatrix} (C_1C_2+iS_1S_2)e^{i\frac{\alpha_3}{2}} & -C_1S_2+iS_1C_2 \\ C_1S_2+iS_1C_2 & (C_1C_2-iS_1S_2)e^{-i\frac{\alpha_3}{2}} \end{pmatrix}.$$

其中 $0\le\alpha_3<\pi$.

$$\therefore X_1=\left.\frac{\partial A}{\partial\alpha_1}\right|_{\alpha=0}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}=\frac{i}{2}\sigma_1$$

$$X_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=-\frac{i}{2}\sigma_2.\qquad X_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}=\frac{i}{2}\sigma_3.$$

其中 σ_i是三个 Pauli矩阵，

$$[X_i,X_j]=\varepsilon_{ijk}X_k.\qquad [\sigma_i,\sigma_j]=2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k.$$

SU(2)与SO(3)的无穷小生成元满足相同对易关系，则Lie代数同构.

考虑SO(2)群对矢量的变换.

$$X\longrightarrow x'=A(\theta)X$$ 考虑无穷小变换，有

$A=I+\varepsilon,\ A^TA=I\rightarrow A^T=A^{-1}\longrightarrow\varepsilon^T=-\varepsilon.$ 即为反对称矩阵.

$$\varepsilon=\begin{pmatrix}0&-\delta\theta\\ \delta\theta&0\end{pmatrix}.\qquad \therefore dx=\begin{pmatrix}dx_1\\dx_2\end{pmatrix}=\varepsilon X=\cancel{\begin{pmatrix}U_1(x)\delta\theta\\U_2(x)\delta\theta\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}0&-\delta\theta\\ \delta\theta&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x_2\delta\theta\\x_1\delta\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U_1(x)\delta\theta\\U_2(x)\delta\theta\end{pmatrix}.$$

$$x'=Ax=(I+\varepsilon)x=x+dx.$$

定义无穷小算符.

$$\hat{X}_\theta=U_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}=-x_2\frac{\partial}{\partial x_1}+x_1\frac{\partial}{\partial x_2}=i\hat{J}_3.$$

无穷小变换写为

$$F(x+dx)=F(x)+dF(x)=F(x)+dx_i\partial_iF(x)=F(x)+\delta\theta U_i(x)\partial_iF(x).$$
$$=F(x)+\delta\theta\hat{X}_\theta F(x).$$
$$=[1+i\delta\theta\hat{J}_3]F(x).$$

有限变换写为 $F(x)\longrightarrow F(x')=e^{i\theta\hat{J}_3}F(x).$

且无穷小算符和无穷小生成元满足相同对易关系. $[\hat{X}_i,\hat{X}_j]=C_{ij}^k\hat{X}_k.$

对SO(3). $$\varepsilon=\begin{pmatrix}0&-\alpha_3&\alpha_2\\ \alpha_3&0&-\alpha_1\\ -\alpha_2&\alpha_1&0\end{pmatrix}.\quad\therefore dx=\varepsilon x=\begin{pmatrix}-\alpha_3y+\alpha_2z\\ \alpha_3x-\alpha_1z\\ -\alpha_2x+\alpha_1y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U_{1,x}\alpha_1+U_{2,x}\alpha_2+U_{3,x}\alpha_3\\ U_{1,y}\alpha_1+U_{2,y}\alpha_2+U_{3,y}\alpha_3\\ U_{1,z}\alpha_1+U_{2,z}\alpha_2+U_{3,z}\alpha_3\end{pmatrix}.$$

$$\hat{X}_1=U_{1,x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}=y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}$$
$$\hat{X}_2=U_{2,x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}=z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}\qquad\longrightarrow[\hat{X}_i,\hat{X}_j]=-\varepsilon_{ijk}\hat{X}_k$$
$$\hat{X}_3=U_{3,x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}=x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}.$$

定义 $\hat{J}_i=-i\hat{X}_i$， 则 $[\hat{J}_i,\hat{J}_j]=i\varepsilon_{ijk}\hat{J}_k$ $\hat{J}_i$ 即为角动量.

Scanned by CamScanner

对SU(2)群，考虑复二维空间.

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

$$A^{+}A = I = (I+\varepsilon^{+})(I+\varepsilon) = I + (\varepsilon^{+}+\varepsilon) + \underbrace{\varepsilon^{+}\varepsilon}_{\text{二阶小量}}.$$

$\therefore \varepsilon^{+} = -\varepsilon.$

$\therefore$ 取 $\varepsilon = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i\alpha_3 & -\alpha_2+i\alpha_1 \\ \alpha_2+i\alpha_1 & -i\alpha_3 \end{pmatrix}$

$\therefore X_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$X_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$ $\qquad [X_i, X_j] = \varepsilon_{ijk}X_k.$

$X_3 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ (8).

$$dx = \varepsilon x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i\alpha_3 & -\alpha_2+i\alpha_1 \\ \alpha_2+i\alpha_1 & -i\alpha_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i\alpha_3 u - \alpha_2 v + i\alpha_1 v \\ \alpha_2 u + i\alpha_1 u - i\alpha_3 v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1,u}\alpha_1 + u_{2,u}\alpha_2 + u_{3,u}\alpha_3 \\ u_{1,v}\alpha_1 + u_{2,v}\alpha_2 + u_{3,v}\alpha_3 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $\hat{X}_1 = \frac{iv}{2}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{iu}{2}\frac{\partial}{\partial v} = \frac{i}{2}\left(v\frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial}{\partial v}\right) = i\hat{S}_x.$

$\hat{X}_2 = -\frac{1}{2}v\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{2}u\frac{\partial}{\partial v} = \frac{1}{2}\left(-v\frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial}{\partial v}\right) = i\hat{S}_y.$

$\hat{X}_3 = \frac{i}{2}u\frac{\partial}{\partial u} - \frac{i}{2}v\frac{\partial}{\partial v} = \frac{i}{2}\left(u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v}\right) = i\hat{S}_z.$

显然 $[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = -\varepsilon_{ijk}\hat{X}_k.$ $\quad [\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\varepsilon_{ijk}\hat{S}_k.$

和SO(3)群相同对易关系，所以称之为Lie代数同构. $\hat{S}_i$ 称为自旋角动量算符.

4. SU(2)群的不可约表示.

$g = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$. $\det g = |a|^2+|b|^2 = 1.$ 显然不可约.

定义函数 $f(u_1, u_2)$. $\forall g \in SU(2)$. 存算符 $T_{g^{-1}}$ 与之对应，有

$T_{g^{-1}} f(u_1, u_2) = T_{g^{-1}} f(u) = f(gu) = f(u_1', u_2').$

其中 $u' = \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = gu = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

考虑 T_G $(G = SU(2))$ 对函数组 $\{f_m(u_1, u_2)\}$ 作用

$T_{g^{-1}} f_m(u_1, u_2) = T_{g^{-1}} f_m(u) = f_m(gu) = f_m(u_1', u_2') = \sum_{m'} D(g^{-1})_{m'm} f_{m'}(u_1, u_2).$

可证明 $\{f_m(u_1, u_2)\}$ 贡献了SU(2)群的一个表示.

$f_m^{(l)}(u_1, u_2) = [(l+m)!\,(l-m)!]^{-\frac{1}{2}} u_1^{l+m} u_2^{l-m}$ $\qquad m = -l, -l+1, \cdots l-1, l.$

其中 $l \pm m$ 为整数，l 可以为半整数，整数0. 共有 $2l+1$ 个 $\{f_m^{(l)}(u_1, u_2)\}$.

$\therefore\ T_{g^{-1}} f_m^{(l)}(u_1,u_2) = T_{g^{-1}} f_m^{(l)}(u) = f_m^{l}(gu) = f_m^{(l)}(u_1',u_2') = [(l+m)!(l-m)!]^{-\frac{1}{2}}\, u_1'^{\,l+m}\, u_2'^{\,l-m}$

$$= [(l+m)!(l-m)!]^{-\frac{1}{2}} (au_1+bu_2)^{l+m}(-b^*u_1+a^*u_2)^{l-m}$$

$$= [(l+m)!(l-m)!]^{-\frac{1}{2}} \sum_{u=0}^{l+m} C_{l+m}^{u}(au_1)^u (bu_2)^{l+m-u} \cdot \sum_{v=0}^{l-m} C_{l-m}^{v}(-b^*u_1)^v (a^*u_2)^{l-m-v}$$

$$= [(l+m)!(l-m)!]^{-\frac{1}{2}} \sum_{uv} \frac{(l+m)!(l-m)!}{u!(l+m-u)!v!(l-m-v)!} a^u \cdot b^{l+m-u} \cdot a^{*\,l-m-v} \cdot (-b^*)^v \cdot u_1^{u+v} u_2^{2l-u-v}$$

$$= \sum_{m'u} [(l+m')!(l-m')!]^{-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{(l+m)!(l-m)!(l+m')!(l-m')!}}{(l+m-u)!u!(l-m'-u)!(u+m'-m)!} \cdot a^{l+m-u} \cdot (a^*)^{l-m'-u}\, b^u (-b^*)^{u+m'-m}\, u_1^{l+m'} u_2^{l-m'}$$

$$= \sum_{m'} D^{(l)}(g^{-1})_{m'm}\, f_{m'}^{(l)}(u_1,u_2)$$

其中 $\boxed{D^{(l)}(g^{-1})_{m'm} = D^{(l)}(a,b)_{m'm} = \sum_u \frac{\sqrt{(l+m)!(l-m)!(l+m')!(l-m')!}}{(l+m-u)!u!(l-m'-u)!(u+m'-m)!} \cdot a^{l+m-u}\, a^{*\,l-m'-u}\, b^u\, (-b^*)^{u+m'-m}}$

其中 $D^{(l)}(g^{-1})$ 是 SU(2) 的一个 $2l+1$ 维表示.

5. SO(3)群的不可约表示.

考虑 SU(2)群与SO(3)群的关系，给出

$X = \sigma_i x_i = \begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix}$. 由 $g(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \in SU(2)$.

定义变换 $X \to X' = gXg^{-1} = T_g X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} z' & x'-iy' \\ x'+iy' & -z' \end{pmatrix}.$$

可证明 T_g 是SU(2)群的同态：

$X' = T_g X = gXg^{-1}$

$X'' = T_{g'}X' = T_{g'}T_g X = g'X'g'^{-1} = g'gXg^{-1}g'^{-1} = T_{g'g}X$

又 $\because \det X' = \det(gXg^{-1}) = \det X$，则上述变化保持三维矢量长度不变.

若 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R(a,b)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow R(a,b) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a^2+a^{*2}-b^2-b^{*2}) & \frac{i}{2}(a^{*2}-a^2+b^{*2}-b^2) & -(ab+a^*b^*) \\ \frac{1}{2}(a^2-a^{*2}-b^2+b^{*2}) & \frac{1}{2}(a^2+a^{*2}+b^2+b^{*2}) & -i(ab-a^*b^*) \\ ab^*+a^*b & i(a^*b-ab^*) & aa^*-bb^* \end{pmatrix}$

可证明 $R^T(a,b) = R^{-1}(a,b)$. $\det R(a,b) = 1$. $\therefore R(a,b) \in SO(3)$.

得到 SU(2)与SO(3)一的一个对应，所以二群同态.

一般地，取 $a = e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2}$ $\quad b = -e^{-i(\alpha-\gamma)/2}\sin\frac{\beta}{2}$.

注意到，当 $\alpha=\beta=\gamma=0$ 时，$g = I_2$. 当 $\alpha=2\pi$, $\beta=\gamma=0$ 时，$g = -I_2$.

但 $\alpha=\beta=\gamma=0$ 和 $\alpha=2\pi$, $\beta=\gamma=0$ 时，有 $R(0,0,0) = R(2\pi,0,0) = I_3$，故是 2—1对应.

Scanned by CamScanner

6. Lie 代数.

定义：L是R或C上一个有限维线性矢量空间，若存在一个双线性映射：$L\times L \to L$，当$x, y \in L$时，有$[x,y]\in L$，并且$[x,y]$满足下列条件：

① 封闭性：$[x_i, x_j] = C_{ij}^{k} x_k$

② 线性：$[a x_i + b x_j, y] = a[x_i, y] + b[x_j, y]$

③ 反对称性：$[x_i, x_j] = -[x_j, x_i]$;

④ Jacobi 等式：

$$[[x_i,x_j],x_k]+[[x_j,x_k],x_i]+[[x_k,x_i],x_j]=0.$$

则称L是一个Lie代数. 矢量空间维数即为Lie代数的维数，记为 $\dim L$.

$$[C_{ij}^{l} x_l, x_k] + [C_{jk}^{l} x_l, x_i] + [C_{ki}^{l} x_l, x_j] = 0.$$

$$C_{ij}^{l} C_{lk}^{m} + C_{jk}^{l} C_{li}^{m} + C_{ki}^{l} C_{lj}^{m} = 0.$$

Casimir 算符

表示度规矩阵的元素

定义：$g_{ij} = C_{ik}^{l} C_{jl}^{k}$ 由结构常数定义的度规张量.

定义：$C = g^{ij} X_i X_j$，其中g^{ij}是g_{ij}的逆. 可证明 $[C, X_i] = 0$.

对SO(3)，有 ① $g_{ij} = C_{ik}^{l} C_{jl}^{k} = \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jlk} = -2\delta_{ij}$.

$$g^{ij} = -\frac{1}{2}\delta^{ij}.$$

$$C = g^{ij} X_i X_j = -\frac{1}{2}(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) = \frac{1}{2}(J_1^2 + J_2^2 + J_3^2) = \frac{1}{2}J^2.$$

总角动量算符的平方

∴总角动量平方与任意一个角动量分量对易。

Scanned by CamScanner