Chapter 1.1 集合与拓扑.

小集合 $\begin{cases} \text{有限集} \\ \text{无限集} \begin{cases} \text{可数集} \\ \text{不可数集} \end{cases} \end{cases}$

\# 一个集合本身不能是该集合元素. 不能定义"所有集合构成的集合".

(2) 定理 如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则 $A=B$。

(3) 幂集. 记为 2^A. 如 $A=\{a,b\}$. 则 $2^A=\{\{a\},\{b\},\phi,\{a,b\}\}$.

集合 A有n个元素，则 2^A 有 2^n 个元素.

\# 0个集合的并是空集，0个集合交集没有定义。

(4) De Morgan 公式: $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$.　　$(A\cap B)^c = A^c \cup B^c$.

若A是X的子集，则称 $X-A=A^c$ 为 A关于X的补集或余集.

(5) 直积: $C=A\times B=\{(a,b), a\in A, b\in B\}$.　　$A\times B\neq B\times A$.

Chapter 1.2

(1) A到B的映射, $f:A\to B$. $\forall a\in A$, $\exists$唯一 $b\in B$ 与之对应.

A中所有元素的象 称为映射f的值域.

(2) 若 $f(A)=B$，即 A的所有象的集合等于B，则 f为 A到B上的映射(满射)

若 $A=B$，且 $\forall a\in A$, $f(a)=a$，f为恒等映射.

若 $f(a)=f(a')$时 $a=a'$，则称 f为 A到B上的 1-1映射。

若是 A到B上的一一映射，称称为1-1到上映射 (双射).

↓

可定义逆映射.

(3) A所含元素称为该集合基数或势. 记为 $|A|$.

若 $f:A\to B$ 为1-1到上映射, 则 $|A|=|B|$.

. . . . . . 只是 1-1映射, 则 $|A|\le|B|$.

和自然数集 N具有相同基数的集合称为可数集，用 $\aleph_0$表示基数。 $|N|=|Z|=|Q|$.

实数集: $\aleph_1>\aleph_0$

N的幂集和R的基数相同。 $2^{\aleph_0}=\aleph_1$　　不存在 $\aleph_0<\aleph<2^{\aleph_0}$

Chapter 1.3.

拓扑性质：拓扑变换下保持不变的性质。两个通过拓扑变换相联系起来的图形称为同胚。

任意凸多面体：Euler示性数：$\chi = V - E + F = 2$.
顶点 棱数 面数.

环面：$\chi = 0$.

(1) X是一个非空集，2^X表示幂集，2^X的一个子集族 τ 称为 X的一个拓扑.

若 ① X和ϕ都在 τ中. ② τ中任意成员的并集在τ中. ③ τ中任意成员的交集仍在τ中.

则 X和τ一起被称为 拓扑空间，记为(X,τ). 称 τ中的成员为拓扑空间的开集。

两拓扑 τ_1, τ_2，若 $\tau_1 \subset \tau_2$，则说τ_2比τ_1精细。
开集越多，相应拓扑结构越精细。

$\tau = 2^X$ 称为离散拓扑，最精细。 $\tau = \{X, \phi\}$ 称为平凡拓扑，最粗糙.

$\tau_e = \{U \mid$ 若干个开区间的并集$\}$ 是 R上的欧氏拓扑，也记作 $E' = \{R, \tau_e\}$.

(2). X上一个度量 d 是一个映射：$d: X \times X \longrightarrow R$.

① $d(x,x)=0$，$\forall x \in X$；$d(x,y)>0$，当$x \neq y$时.

② $d(x,y)=d(y,x)$.

③ $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$.

若集合 X上规定一个度量后，就被称为度量空间。记为$[X,d]$.

规定 $d(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ 为 R^n 的普通度量。$E^n=\{R^n, d\}$ 称为n维欧氏空间。

称 X的子集 $B(x_0,\varepsilon)=\{x \in X \mid d(x_0,x)<\varepsilon\}$是以$x_0$为中心，$\varepsilon$为半径的球形邻域。

定义 $\tau_d = \{U \mid U$是若干个球形邻域的并集$\}$ 称为 X上由度量 d 决定的度量拓扑。

引理：(X,d)的任意两个球形邻域的交集是若干个球形邻域的并集.

(3). Hilbert 空间.

H是平方收敛的所有实数序列构成集合，即 $H=\{x=(x_1,x_2\cdots) \mid x_i \in R, i \in Z, \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$

$\forall x = (x_1, x_2, \cdots), y = (y_1, y_2, \cdots)$.

定义 $\rho: H \times H \longrightarrow R$， 令 $\rho(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ 证明 ρ是 H的一个度量. (H,ρ) 称为 Hilbert空间.

(4) 连续映射

定义：设 $(X, \tau(X))$ 和 $(Y, \tau(Y))$ 是两个拓扑空间，$f: X \to Y$。若 Y 中 $\forall U \in \tau(Y)$ 的 $f^{-1}(U) \in \tau(X)$，则称 f 为 X 到 Y 连续映射。

若 $(X, \tau(X))$ 是离散拓扑，$(Y, \tau(Y))$ 是平凡拓扑，则一定是连续映射。

用开集语言描述函数连续：

对包含 $f(x_0)$ 的每个开集 V，则必定存在包含 x_0 的开集 U，使 $f(U) \subset V$。

(5) 同胚

定义：若 $\exists$ 1-1 到上的映射 $f: X \to Y$，使得 f 和 f^{-1} 都是连续的，则称 $(X, \tau(X))$，$(Y, \tau(Y))$ 是同胚，f 称为同胚映射。

↓

拓扑等价，有相同拓扑性质

注：恒等映射是同胚映射；任何凸多边形彼此同胚。

(6) 邻域：给定 (X, τ)。$A \subset X$，且 A 中含一些开集 X_α，使 $x \in X_\alpha \subset A$，则称 A 为 $x \in X$ 的一个邻域。∴ 包含 x 的开集 X_α 是 x 的邻域。点 x 的邻域构成的 X 的子集族称为点 x 的邻域系。

闭集：拓扑空间 X 的一个子集 A 称为闭集，A 的余集是开集。

∴ 离散拓扑的任何一个子集都是既开又闭的。

(7) 内点：$A \subset X$，$x \in A$，若 $\exists U$ 使得 $x \in U \subset A$，则称 x 是 A 的内点。

A 的所有内点的集合称 A 的内部或邻域。可表示为包含在 A 内的开集之并，因而是 X 的开集。是包含在 A 内的最大开集。

若 X 的子集 A 的每个点都是内点，则 A 必为开集。

边界：若 x 的每个邻域都既包含 A 的点，也包含 A 的余集的点，则称 x 为 A 的边界点；边界点的集合称为 A 的边界。

注：若 A 的边界是空间，则 A 为既开又闭。

(8) Hausdorff 空间

如果一个拓扑空间中，两个任意不同点有彼此不相交邻域，则称此空间为 Hausdorff 空间。任何度量空间 X 都是 Hausdorff 空间，Hausdorff 空间子空间、乘积空间都是 Hausdorff 空间。该空间性质是同胚不变的。

(9) 紧致性：

设 X 为拓扑空间，$F = \{F_\alpha\} \subset 2^X$ 是 X 的子集族，如果 $\cup F_\alpha = X$，就称 F 是 X 的覆盖。若所有 F_α 都是开集，就称为是开覆盖。若对每一个开覆盖都存在有限的子覆盖，使得 $F_1 \cup \cdots \cup F_n = X$，则称 X 是紧致的。

紧致性是拓扑不变性。

若一个拓扑空间只包含有限个点，此拓扑有限。有界闭集，S^n 是紧致的。E^1，(a,b) 不紧致。

(10). 连通性：分为多连通和单连通。若拓扑空间 X 可分为 $A_1 \cup A_2 = X$，$A_1 \cap A_2 = \phi$，则 X 不连通.

若一个拓扑空间中既开又闭的子集只有 ϕ 和 X 本身，则它连通。

显然：平凡拓扑连通，离散拓扑不连通，离散点集不连通. Q 不连通. R, R^n, S 连通.

若 $X_1, \cdots X_n$ 连通，则 $X_1 \times \cdots \times X_n$ 也连通. 连通性也是拓扑不变性.

Chapter 1.4.

分形重要性质：自相似性.

重要特征：具有分数维，且大于拓扑维数.

(1) 分形的维数：1

对某个点集：我们写出

$$M_d = N(\delta)\delta^d \xrightarrow{\delta \to 0} \begin{cases} 0 & \text{当 } d > d_f \\ \text{有限值} & d = d_f \\ \infty & d < d_f \end{cases}$$ 则 d_f 为分形维数.

$$\therefore d_f = \frac{\ln N(\delta)}{-\ln \delta}$$

(2) 分形的维数 2

$$\because M(\lambda l) = \lambda^{d_f} M(l) = k M(l).$$

$$\therefore d_f = \frac{\ln k}{\ln \lambda}.$$ 一般 d_f 小于嵌入欧氏空间的维数.