

## 2014 年美国大学生数学建模大赛参赛后记

李 楠<sup>1</sup>, 钟鸣远<sup>1</sup>, 吕 浩<sup>2</sup>, 俞 熹<sup>1</sup>

(1. 复旦大学 物理学系, 上海 200433; 2. 复旦大学 化学系, 上海 200433)

**摘要:**以 2014 年美国大学生数学建模竞赛(MCM/ICM)为例,介绍该竞赛的由来以及对于物理学系学生的参与意义,详细阐述和讨论了 2014 年交叉学科建模竞赛(ICM)的题目及解题思路,展现了物理视角在数学建模中的优势.

**关键词:**数学建模; 物理; MCM; ICM

**中图分类号:** O 29

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000-0712(2015)05-0062-04

美国大学生数学建模竞赛暨交叉学科建模竞赛(MCM/ICM),是一项国际级的竞赛项目,其着重强调研究问题、解决方案的原创性、团队合作、交流以及结果的合理性.竞赛以 3 人(本科生)为一组,在 4 天时间内,就指定的某些现实问题完成从建立模型、求解、验证到论文撰写的全部工作.2014 年有 6755 支队伍参加数学建模竞赛(MCM),遍及 5 大洲;1028 组参加交叉学科建模竞赛(ICM)的团队,主要来自美国和中国(含香港特别行政区)<sup>[1]</sup>.

本文作者团队参与了 2014 年度竞赛,颇受锻炼.本文的目的在于以我们的参赛实践为例,介绍该项赛事,阐发数学建模与物理学之间的内在联系,鼓励更多的物理系同学发挥自己的物理思维优势,在竞赛和现实生活中尝试建立模型,评价和改善身边事物.

### 1 数学建模中的物理思维

对现实生活中的事物建立数学模型并加以解释和应用,这正是物理学家从事的工作.数学建模是物理思维的体现,而物理的目的也正是通过模型去感知和了解这个世界.在伽利略开创的现代科学范式中,一项科学研究大致经历如下几个阶段,如图 1 所示.

在数学模型的建立中,也同样经历了重述问题、模型求解、推广演绎、参数检验与修正这几个类似的步骤.数学建模竞赛对物理学生科学素养和物理意

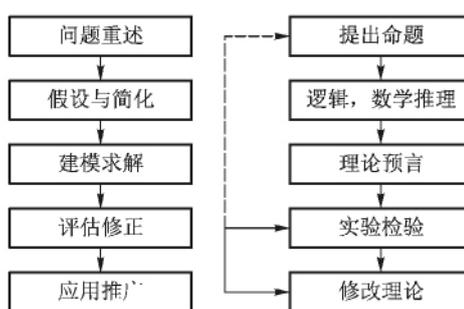


图 1 建模竞赛大纲要求与伽利略科学范式

识提高有很好的促进作用,而数学建模比赛涉及的一些算法思想,诸如模拟退火算法正是来自物理学的发展,相应地,物理学系学生凭借物理思维的训练有望在竞赛中表现优异.以我校今年参加交叉学科建模竞赛(ICM)的 18 支队伍为例,获得一等奖(Meritorious Winner)的 4 支队伍中,有 3 支来自物理学系.

数学模型竞赛强调的是对生活中实例建模、解释、评估与方案策划的能力,对于物理学专业的学生,这是很好的历练机会.一个只能在物理课本中运用建模能力的学生,其物理素养是不足的,学会用物理的视角看待问题才能够学以致用.

本文所说物理的视角,或者说物理工作者解决问题的视角,是指以下几个方面:

#### 1) 直接利用和借鉴物理学知识的视角

在分析自然科学问题时,我们可以直接运用物理学知识解决问题,而在其他领域,如社会科学领

收稿日期:2014-06-05;修回日期:2014-11-05

基金项目:国家基础科学人才培养基金(J0730310)资助

作者简介:李楠(1993—),男,山东临清人,复旦大学物理学系 2012 级本科生.

通讯作者:俞熹(1978—);E-mail:whyx@fudan.edu.cn

域,物理学思想的借鉴同样是重要的.例如,在统计物理学中,大量粒子的分布问题,类似正态分布的单峰形状是稳定的,这正如社会科学领域,一个社会中人们的收入分布问题,中等收入群体分布形成峰值是相对稳定的,也就是社会学家所言“橄榄形”分布.将物理学模型运用到其他领域,往往会有意想不到的收获.

## 2) 简化模型的视角

物理理论是优雅简单的,但现实中的物理世界是纷繁复杂的.在一个物理学家的视角中,模型能够得到合理的简化,主要因素能够得到凸显,例如,我们在考虑抛掷铅球的问题中,空气阻力和海拔的影响往往是可以忽略的,便于我们抓住问题主干,从而快速有效地解决实际问题.

数学建模强调的亦不是考虑模型的全部细节,而是从纷繁的现实抽象出最核心的因素,物理学的研究同样如此,理论物理大师朗道曾讲过:“最严重的错误是,采用非常精确的理论,并详细计算所有的细节的修正,却忽略了比他们大得多的物理量”<sup>[2]</sup>.

## 3) 运用数学工具考虑问题的视角

单纯地依赖于定性分析解决问题,总会带来非理性的因素,物理学在建立的最初就依靠数学工具进行定量研究,物理学的发展与数学是相互促进的.

但物理学不同于数学的地方之一是,物理学并不排斥定性分析,赵凯华先生曾提出要“定性和半定量地”学习和研究物理,也就是说既要能够定性地把握问题的全貌,避免陷入细节的纠结,又要适当地给出定量可靠的理性结论.生活中处处可以建模,处处需要数学工具,例如我们在玩德州扑克等棋牌游戏时,利用概率知识建立胜率模型,并不一定完全精确(很多时间玩家掌握的信息也是不完整的,所以也无法完全定量分析),使用“定性半定量”的方法,能够更好地把握游戏进程,快速做出正确决策,这也是一个运用数学工具解决生活中实际问题的应用.

## 4) 运用计算机工具考虑问题的视角

在如今的信息时代,数学工具的运用往往依赖于计算机,而在物理学研究中计算机是广泛使用的,学会将很多问题,诸如处理大数据、解决微分方程、可视化处理、解决重复可程式化实现问题等,转化成计算机可解问题,是未来生活工作中重要的视角和方法.

例如,在前往欧洲若干国家旅行之前,我们可以利用各国家和城市地理坐标,使用最短路算法编程,得到最优化的旅行线路.在这一过程中,地理数据的

获取是简单的,当前各类编程语言中,提供的库函数等往往包含各种各样现成的算法,实现起来是很方便的.这样,就将“人为估计”的问题转换成了“模型问题”.当前信息化社会为我们提供了建模的无限可能,我们应当用好计算机这一工具以把握信息时代脉搏.

另外,在数模竞赛中,论文的书写是重要的,好的想法只有通过准确规范的表达才可以被其他人了解与接受.在我们的参赛实践中,由于受到了规范书写物理实验报告的锻炼,竞赛论文的书写相对顺利.需要注意的是,表达能力以及竞赛所强调的合作能力是科学工作者必不可少的本领.

## 2 ICM 参赛实践

为了更好地介绍数学建模竞赛,我们以作者团队所参加的本年度交叉学科建模竞赛(ICM 2014)为例,展示问题的重构与解决方案.

### 2.1 赛题重述

学术界有若干评价学术水平的工具,如SCI指数、H因子、IF因子,Eigenfactor特征因子等.基于引用与合著关系网络,研究其特性的方法,也是确定学术研究影响力的数种技术之一.我们的任务是:分析学术研究网络中的影响关系,并扩展到社会中的其他领域.

20世纪的匈牙利数学家Erdős一生发表了1400多篇研究论文,他有500多名合著者,我们从研究他的合著者网络出发,做如下几方面的分析.

1) 利用Erdős各直接合作者之间的相互合作关系,建立一个学术关系网络,并比较网络中合作者的影响力;

2) 将这一模型推广到其他领域(如电影演员之间的合作关系),讨论模型在社会生活中的可能应用和相应的衍生策略;

3) 分析模型的优缺点、灵敏度,以及基于网络对这类现象建模的优势所在.

### 2.2 基本思路

Erdős合作网络结构庞大(511个节点,1640条边)且是稀疏图,因此我们需要找到网络中的核心关系;对于核心成员,我们应当找到一种对其影响力排序的方法;另外,合作关系产生和发展涉及了较长的时间跨度,我们应当注意到网络随时间演化的特点<sup>[3-5]</sup>.

1) 查阅资料发现,K-Shell算法可以发掘网络的核心节点和关系,从而大大简化庞杂的关系网络.

K-Shell 算法是这样工作的:去掉度为 1 的节点,在此基础上再去掉度为 1 的节点,直到没有度为 1 的节点,就得到  $K_s=1$  的节点(即此过程中删去的节点标记为  $K_s=1$ );再去掉度为 2 的节点,得到  $K_s=2$  的节点(即此过程中删去的节点标记为  $K_s=2$ );直到计算了所有点的  $K_s$  值.这样,网络的外壳和边缘的  $K_s$  为 1,然后往内像剥洋葱一样进入网络的核心( $K$ -shell 值大的区域).  $K_s$  越高就说明这个节点更靠近网络核心.

我们由此得到了核心关系图(包含 27 节点,  $K_s$  值为 10)如图 2 所示.

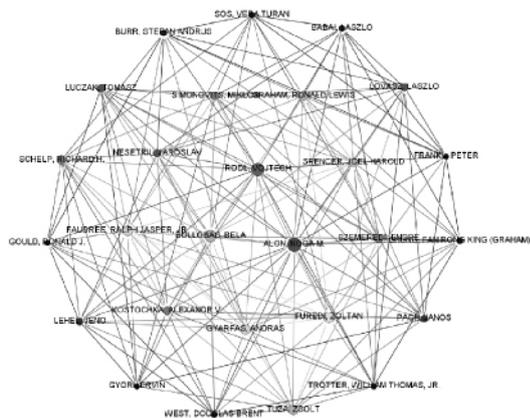


图 2 Erdős 合作网络核心关系图

2) K-Shell 算法简化了网络结构,对影响力分层,但并不能给出同一层相对影响力的大小.接着,我们对上述最顶层的 27 个节点使用了 PageRank 算法<sup>[6]</sup>,产生了他们的影响力相对排名.

PageRank 算法是这样工作的:其最早应用在谷歌的搜索引擎中,某一页面的重要程度由与之有链接关系的页面的重要程度决定,相当于“用链接投票”.

$$R = \begin{bmatrix} (1-d)/N \\ (1-d)/N \\ \vdots \\ (1-d)/N \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} l(1,1) & l(1,2) & \dots & l(1,N) \\ l(2,1) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & l(i,j) & \\ l(N,1) & \dots & & l(N,N) \end{bmatrix} R$$

以上面的矩阵来表达,式中  $R$  表示各点的 PageRank 值,值越高表明重要性越大.元素  $l(i,j)$  表示点  $i$  与点  $j$  之间有无关系.  $d$  表示通过已有连接关系产生 PageRank 值转移的概率,  $(1-d)/N$  表示随机产生访问关系而带来的 PageRank 值的变化.

3) 为了体现时间因素对这些关系的影响,我们让代表关系的边的权重随时间演化.即两点产生关系(开始合作)时,权重设定为 0,统计截止时设定值为 1,中间年份权重随时间演化(为了简化不妨设置

为线性增加).由此我们产生如下的随时间演化图如图 3 所示.



图 3 边权重随时间演化(1970 1980 1990)

有趣的是,我们对所有节点总度数随年份进行统计,得到如图 4 所示曲线.

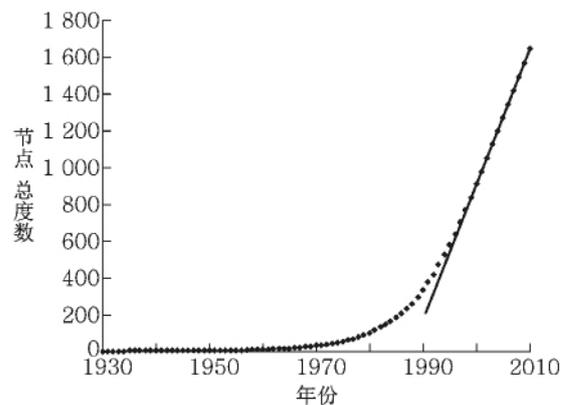


图 4 节点总度数随时间演化

可以发现,在 1960 年之前,曲线接近于零且变化缓慢,表明此时这一学术网络并不活跃;之后直到 1990 年代,曲线呈指数增长,学术网络迅速扩张,1994 年后图线为相关系数接近 1 的直线.这可以解释为:早期,年轻的 Erdős 学术影响力并不大;资料显示,20 世纪 60 年代他发表了网络科学奠基性的论文“On Random Graph”,从此直至 1990 年其晚年,网络科学蓬勃发展,合作网络也日益壮大;在其 1996 年去世后,合作网络变得不再像之前那么活跃.

这样的分析方式,与物理学中“从庞杂的现象中抽象出物理规律,又使得物理规律被现实世界所验证”的“归纳——演绎思维”相类似:从繁复的关系网络中抽象出了核心的特征性指标,进而使用指标预言或解释其他现象.

通过边权重随时间演化这一简单假设,对节点度数进行统计,理论上我们就可以反推出历史发展脉络,这也是我们引入时间演化概念的一个重要应用.

4) 对模型进行推广和检验:我们利用 Matlab 从 IMDb 网站导出了排名前 250 的电影的主演名单,视其共同出演一部电影为合作关系,利用 PageRank 算法估计他们的相对影响力大小如表 1 所示.

表 1 IMDB 影响力前 10 位的演员

排名	姓名	PageRank 值
1	Robert De Niro	17.656
2	Morgan Freeman	15.75
3	Harrison Ford	13.752
4	Clint Eastwood	13.732
5	Leonardo DiCaprio	12.326
6	James Stewart	11.452
7	Al Pacino	11.329
8	Robert Duvall	11.326
9	Tom Hanks	11.171
10	Bruce Willis	11.086

榜单上的 10 位演员是我们熟知的,这从现实经验中对模型的正确性和可推广性做了验证.这种评估方式也正如物理定律需要寻找大量实验的验证支持.

5) 为了使这一模型对现实生活有所指导,我们假想这样一幅场景:有一位青年学者需要和网络中的前辈进行合作,为了快速提高学术知名度,他需要找到 PageRank 值很高的人合作吗?通过进行模拟,我们发现能够使青年学者与之合作后的 PageRank 值最高的 5 位合作者如表 2.

表 2 合作策略模拟

排序	待选合作者(排名)	青年学者合作后排名
1	GAAL,STEVEN A.(338)	308
2	BOES,DUANE CHARLES(343)	310
3	KHARE,SATGUR PRASAD(358)	320
4	RYAVEC,CHARLES ALBERT(379)	334
5	SIRAO,TUNEKITI(389)	338

如此看来,与我们习惯中所认为的“尽量与最大牌学者合作”的观点不同,和排名中段的学者合作反而产生了更好的效果.事实上,这也不难理解,虽然权威学者拥有最丰富的学术资源,但是他们合作关

系众多,留给青年学者的发展空间反而变小了.

学习物理的过程中我们也经常遇到一些这样“不怎么直观”的结论,只有冷静地分析事物本身,尝试各种方法验证自己的想法,才能建好模型、建立起真正可靠的物理图像.

这之中虽然做出了模型简化:假定青年学者从每个待选合作者获得资源的方式相同,但我们仍然得到了大致的合作策略.抓住事物核心,略去次要因素才能看清本质,这也正是物理学中处理问题的关键一步.

### 3 结语

从上面的参赛实践可以看出,数学建模是将模型运用到我们的生活中,为我们理解社会和自然的构造,以及做出理性选择服务的,而物理学的目的也恰恰在于基于模型来感知、解释和改造世界.数学建模的实践对物理学系学生相关素质的培养是有帮助的,物理学系学生在数学建模竞赛中也有一定的优势.

致谢:感谢复旦大学物理实验中心的学习经历和各位老师的细致指导,感谢团队的团结协作.

### 参考文献:

[1] 美国大学生数学建模竞赛网站[OL]. <http://www.comap.com/undergraduate/contests>.

[2] 朗道.力学[M].北京:高等教育出版社,2007:173-174.

[3] Newman,Mark E J. The structure and function of complex networks[J]. SIAM review,2003,45(2): 167-256.

[4] Kleinberg,Jon M. Navigation in a small world[J]. Nature,2000,406(6798): 845.

[5] 汪小帆. 复杂网络理论及其应用[M].北京:清华大学出版社,2006.

[6] Page, Lawrence, et al. The PageRank citation ranking: Bringing order to the web. Stanford InfoLab,1999.

## Review of 2014 American MCM/ICM campaign

LI Nan<sup>1</sup>, ZHONG Ming-yuan<sup>1</sup>, LYU Hao<sup>2</sup>, YU Xi<sup>1</sup>

(1. Department of Physics, Fudan University, Shanghai 200433, China;

2. Department of Chemistry, Fudan University, Shanghai 200433, China)

**Abstract:** By taking our experience of participation in the interdisciplinary contest in modeling (ICM) 2014 as an example, we introduce the contest and show the benefits of participation in it for a student in department of physics. We describe the problem of ICM 2014 and the method to solve it in detail. In this way, we prove the advantage of thinking in a physics way in mathematical modeling.

**Key words:** mathematical modeling; physics; MCM; ICM