

一维弦上波局域现象探索实验设计

施巍 邱孟 俞熹*

(复旦大学 物理系, 上海 200433)

摘要: 本实验设计通过对一维弦上波的能级、能带以及局域现象的观察, 模拟一维电子波在周期性势场中受到的散射等行为。实验过程中对弦上驻波实验仪进行简单改造使其能够满足实验设计条件, 可供其他相关实验参考。

关键词: 弦波 周期性势 能级 局域现象

1. 引言:

固体物理中的能带和局域现象在现实中, 抽象难以理解。本试验试图使用弦上驻波这种简单易观察的实验方法, 来演示周期性阻隔下一维波的行为。通过了解波在一维周期性结构中的传播模式(即能级)以及能带现象、观察波在一维非周期性结构中的局域现象, 将周期性阻隔下的弦上驻波行为与周期性原子核势场中的电子物质波对比, 从而直观形象地表现出一维能级、能带与局域等物理图像。加深对固体物理中的能带理论以及局域现象的理解, 熟悉广泛应用于许多物理领域中周期性势场所产生的效应。

2. 实验设计与原理:

本实验设计通过重复弦上驻波实验^[4]验证仪器可靠性; 以不同排列模式(非周期性、周期性)排列小球, 观察弦的振动行为, 并将结果与理论做比较, 以此来实现能级、能带与局域现象。

本实验在金属弦线上固定小球作为周期性质量变化, 将之以一定频率振动, 以此来模拟电子波受到原子周期性势场作用的情形, 因此可以采用经典弦振动方程对其加以描述。通过经典的弦振动方程^[2]:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu(x)} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \quad (1)$$

式(1)中, y 为小球竖直位移, t 为时间, T 为弦中的张力, $\mu(x)$ 为弦的线密度。

在周期性边界条件下, 可以解得其具体的振动本征解, 参考文献^{[1][7]}给出方程的解法及严格解。

模拟局域态的情形, 同样须对式(1)进行求解, 不同处在于 $\mu(x)$ 。如引入偏离指标 $R = \frac{l_i}{m_i} \mu(x)$ ^[1], 即在不同 R 值下求解式(1)的本征解。其解法与周期性情形相类似, 详见参考文献^{[1][2]}。

求得这些解之后, 便可将其与实验所得振动图像一一对应比较, 对实验加以解释和补充。

3. 实验过程与结果:

3.1 实验装置改造:

本实验使用复旦天欣的弦上驻波实验仪(详细结构见参考文献^[4]), 并对实验仪的振动部分进行一定改造使其满足实验要求:

- 1) 用吸盘式电磁铁替代原来实验仪使用的感应线圈, 使其能够带动质量更大的串球弦线振动并且达到可明显观察的振幅(见图1);
- 2) 将原有的弦线固定端改造为能够完全截止弦振动的特殊固定器, 使弦能够自由伸长缩短, 但不影响振动;
- 3) 延长原有导轨至3m, 使得实验时, 弦振动稳定频率更加准确; 同时能够更加准确

地估计振动整波的长度（半波长）。

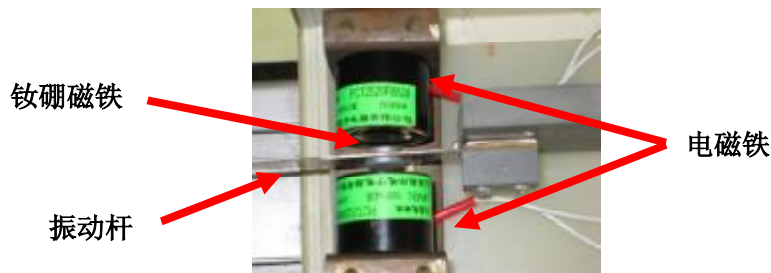


图 1

3.2 观察无小球的弦线振动（参考文献^{[4][5]}）：

使用长 3m 直径 0.55mm 漆包线作为振动弦，一端挂以配重（使弦中有一定张力，保持其伸直），另一端振动（0~200Hz 连续调节频率），观察寻找振幅明显的振动频率（详细方法见参考文献^[4]，弦上驻波实验）。这一步实验可以检测改装后仪器的可靠性和稳定性。

进行实验之后，得到以下结果：

- 1) 弦上的波数是可以连续出现的，即存在波数 $k=3、4、5、6\cdots$ 的模式，直到仪器频率限制的最大值，接近 30 个半波。
- 2) 半波数乘以 3.34Hz 约等于振动的频率，即每间隔 3.34Hz 可见一个明显的振动模式。
- 3) 在 7 个半波到 15 个半波之间，没有找到稳定的偶数个半波数的模式。

以上的结果和以前普通物理实验中弦上驻波实验^[4]的结果相一致，但缺少偶数个半波数的现象比较奇特，之后将进行详细讨论。

3.3 观察非周期性排列小球的弦上的振动：

使用前一步实验同样的弦，在其上穿入数个 0.12g 穿孔塑料小球，并以非周期不规则排列（见图 3），在 0~130Hz 中寻找到一个稳定振动的频率，观察其振动情况。

图 2、图 3 为弦上小球非周期性排列时的振动波形照片：

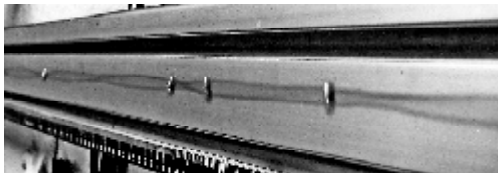


图 2

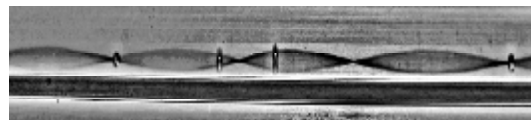


图 3

在图 2、图 3 中，可以明显观察到：

- 1) 在小球非周期性排列时，波长会受到明显的调制。
- 2) 原有的波节位置被移动，正常的驻波波形被打乱，但即使没有半波，或者波形混乱，这仍然是稳定的驻波。
- 3) 弦上驻波的波长可以随分布的不同在一个很大的范围里变化。
- 4) 小球趋向于分布在波腹振幅最大处或者波节处。如果小球无法很完美地分布在这些位置，振动半波长也会尽量改变，使它们更接近这些位置。

实验中所观察到的这些局域现象并不是固体物理中研究的电子物质波在周期性被一定程度打破后所产生的局域行为（一般为安德森局域，Anderson Localization^[6]），而是由于小球的调制作用，导致波形发生的强烈改变，可以称为弱局域^[6]（如图 3 所示，这个振动现象就是一般的一维弱局域现象）。

从这一步的实验现象可以看出，小球的分布对弦上驻波波形的调制作用非常明显，可以简单地推测，小球分布在弦线上的结构是可以模拟一些固体物理的结论^{[3][5]}。

3.4 观察周期性排列小球的弦上的振动：

将上一步实验使用小球以 20cm 间隔周期性排列在同样的弦上。在 0~130Hz 寻找稳定的振动频率。在周期性排列小球的情况下，弦振动的行为受到了很多的限制，其中最明显的就是只有波数为整数的波才能稳定，或者说小球之间只能有整数个半波。

在 0~130Hz 实验时观察到的四组稳定的振动图像：

- 1) 波数 $K=1$ 频率范围/30.8-41.6 Hz 中心频率 36.2 Hz (见图 4)。

(其中 K 为波节之间的整波数)



图 4

- 2) 波数 $K=2$ 频率范围 52.3-60.0 Hz 中心频率 56.2Hz (见图 5)。



图 5

频率范围 66-80 Hz 中心频率 73 Hz (见图 6)。



图 6

- 3) 波数 $K=3$ 频率范围 109-122Hz 中心频率 115 Hz (见图 7)。



图 7

除了上面所列的四种振动图像之外，20-130Hz 范围内没有其他稳定的振动模式（驻波模式），超过 130Hz 后，弦振幅过小，无法准确观察。

从这组图像中，可以观察并且归纳讨论以下几点：

- 1) 小球的周期性导致振动弦波不得不选择一些周期性相同的振动模式。
- 2) 与没有小球相比，模式数只有不足十分之一(无小球时每 3.34Hz 就有一个新的模式，而有小球时每大约 37Hz 才有一个新的模式)；而且在周期性排列时，其他的多种模式都被结构禁止了，无法稳定存在，甚至连不稳定的行波模式都不能明显的观察到。
- 3) 模式的频率覆盖范围增大了很多。在没有周期性结构的时候，每个模式一般只能在 1Hz 的范围内稳定存在，而有周期性的时候，每个模式都可以在 10Hz 以上的频率范围内稳定存在。
- 4) 能够稳定存在的模式，中心频率仍然是周期性分布的。
- 5) 在实验过程中，观察到了两个波数 $K=2$ 的振动模式（图 5，图 6）：

第一个 $K=2$ （图 5）并不是实验设计的模式，因为小球刚好处于弦波的波腹（图 5 右侧示意图）；第二个（图 6）才是真正准确的 $K=2$ 的模式。这两个模式所代表的物理意义是不同的：频率较高的模式是实验设计时希望得到的，小球处于振幅最小点的模式；而频率较低的模式小球处在振动最大点，这是实验设计时没有预料到的。但是从前面对非周期性排列的小球的分析可以看出，小球也比较倾向于分布在振幅最大的地方，那么第一个振动模式（图 5）的出现也是可以理解的。

- 6) 振动模式中心频率有一定偏移，并不是 1: 2: 3 的完美理论比例。

原因可能是小球对弦线密度的影响：在波长较短的时候，振幅较大，小球质量对弦

线密度影响比较大；而频率很高时振幅已经很小，小球完全不参与振动，对弦线密度的贡献自然很小了。然而频率的偏移量并不是很大，说明小球的贡献影响比较小。实验中，特别对放置了小球和没有放置小球时 $K=1$ 的频率进行了测量，发现，当小球处于振动最小点时， $K=1$ 的频率只有略微减小。这说明小球在振动最小点时，对振动的贡献非常小

5. 讨论：

5.1 重力对弦线的作用引起的一系列问题：

由于实验中使用的弦线偏长(3m)，重力的作用就无法忽略了，那么弦线就会悬垂下来。而驻波形成时，从水平方向看，弦线会随振动按照 直线-曲线-直线-反相曲线-直线-曲线 的循环运动。在弦线为直线时，长度较长，自然下垂较多，而弦线为曲线时，长度缩短，下垂会较少。随着横向的振动，弦线在纵向也发生了很强烈的振动，这就导致了纵波成分的加入。在纵波成分加入以后，出现了圆偏振和椭圆偏振的二维振动弦波。而产生椭圆偏振的现象也只有在 50Hz 左右时出现，这就像是只有大功率激光才能引发光学介质的非线性效应一样，只有大功率的振动源才能引起这种椭圆偏振的效果。由于椭圆偏振是两个方向偏振的叠加，而经改造后的弦线固定器只能阻隔水平方向的振动，所以，在这一点，垂直方向和水平方向的分波的反射相位有了明显的不同。

可以初步认为，水平方向的反射相位为半波，而垂直方向反射相位为四分之一波，这样，只有在奇数个半波的时候两波才能叠加为椭圆偏振，偶数个半波数的时候不会出现稳定的叠加波，这就解释了之前实验在这个频段找不到完美的偶数个半波数驻波模式的问题。

5.2 无法观察到高阶驻波模：

实验表明波数 $K=3$ 的模式，弦的振幅十分微小。实验中，在波数 $K=4$ 模式所对应的频率附近振动，发现弦几乎无振幅。这说明以现有装置无法观察到 $K=4$ 以及波数更多的模式，这是受到振动源所限，因此想要观察高阶模式必须再进一步改造振动源。

5.3 无法观察到强局域现象：

实验中观察到的弱局域现象也伴随着小球的小幅振动。原则上，小球应该是在平衡位置附近不动，这样才能观察到非常显著的强局域现象，由于小球平均质量只有 0.12g，与弦线的质量线密度 (0.0846g/cm) 之比在 1:1 左右远没有达到原子核与电子的质量比 (1:1000 倍左右)。因此无法有足够的质量比使小球固定在平衡位置，导致无强局域现象。

6. 小结：

这里的实验初步达到了实验设计时的预期，观察到稳定的周期性势场下的驻波模式（即单一能级）以及弱局域现象。可以看出，在周期性势中传播的波受到了很多限制，驻波性质发生了极大的改变，有进一步探索研究的空间。

参考文献：

- [1]Vibration and wave localization in a nearly periodic beaded string, Gisli Ottarsson and Christophe Pierre, J. Acoust. Soc. Am. [J]., 101(6), June 1997
- [2]Oscillations of a string with concentrated mass, B. J. Gomez and R. Welti etc., Eur. J. Phys. [J].,28(2007)961-975
- [3]Localization in one-dimensional disordered systems, E. N. Economou and Morrel H. Cohen, Phys. Rev. B[J]., Volume4 Number 2, 15 July 1971
- [4]基础物理实验[M]., 沈元华 陆申龙, 高等教育出版社,Dec. 2005
- [5]Normal modes and dispersion relations in a beaded string: An experiment for an undergrad. lab., Shanker Gauri, Gupta V. K., Sharma N. K. and Khandelwal D. P., Am. J. P. [J]., Volume 53 Issue 5, 1985

[6]Introduction to wave scattering, localization and mesoscopic phenomena, [M]. P. Sheng, Springer-Verlag, 2006

[7]Oscillations and waves, Richard Fitzpatrick, [M]. <http://farside/ph/utexas.edu>

作者简介:

施巍 (1988/4), 男 复旦大学物理系 06 级本科生。

邱孟 (1989/2), 男 复旦大学物理系 06 级本科生。

*俞熹 (1978/1/18), 男 博士, 毕业于英国诺丁汉大学, 现任复旦大学物理系实验中心副主任。负责近代物理实验教学。研究方向为低温扫描显微镜 (Scanning probe microscopy at low temperature), 核磁共振及成像技术 (NMR & MRI)。

致谢

本文工作获得了国家基础科学人才培养基金 (No J0730310)及复旦大学青年基金(No EYH1512025) 的资助, 特此感谢。

An experiment on normal modes and localization in a beaded string

Wei Shi, Meng Qiu and Xi Yu

Department of Physics, Fudan University

Abstract: The experiment design to observe the oscillation modes, gaps and localization phenomenon on a beaded string for the purpose of simulating the effect of electron wave propagating through 1D solid. We build new experiment equipment and make it satisfy all the requirements of the experiment (oscillation frequency, amplitude, etc.) which is great reference for others.

Key Words: wave on beaded string, modes, localization