

文章编号:1005-4642(2020)05-0036-04

牛顿摆衰减的建模与探究

舒 畅[†], 吴晋渊[†], 俞 熹

(复旦大学物理学系, 上海 200437)

摘 要:通过 Hertz 碰撞模型, 推导出了牛顿摆体系的演化方程并进行数值模拟, 重现了非理想牛顿摆的衰减特征, 并定性分析了非对心碰撞和小球固有摆动因素对牛顿摆非理想行为的作用. 在小球排列相对整齐的情况下, 黏滞耗散和框架耗散是主要的能量耗散因素; 在小球排列相对不够整齐的情况下, 非对心碰撞引起的能量耗散占主要地位. 同时定量说明了空气阻尼并非衰减的主要因素.

关键词:牛顿摆; Hertz 模型; 能量耗散; CUPT

中图分类号: O31

文献标识码: A

DOI: 10.19655/j.cnki.1005-4642.2020.05.009

2019 年 CUPT 第 15 题为牛顿摆^[1]. 牛顿摆是演示动量守恒和能量守恒的经典实验装置, 最早于 1676 年由 Edme Mariotte 提出^[2]. 在理想模型中, 各个摆球紧密排列, 外侧 2 个摆球将动量完全传递给另一侧最外端的小球而不影响中间的小球, 并重复此过程. 在真实体系中, 中间的球也会参与运动. 由于能量耗散, 整个体系的运动最终趋于静止. 本文探究了牛顿摆真实行为与理想行为偏差的产生机制与影响因素.

1 实验现象

图 1 为用于研究牛顿摆运动的装置. 牛顿摆摆长为 48.00 cm, 摆球半径为 3.00 cm, 小球质量为 2.00 kg, 装置中小球可拆卸以改变数量. 从装置上方拍摄并使用 Tracker 分析球的运动^[3].

典型的实验结果之一如图 2 所示, 采用了 4 个小球, 从一侧起依次标记为球 1 到球 4. 初始时刻各球间距为 2 倍半径, 相互接触但不发生挤压. 0~30 s 阶段, 外侧球(球 1 和球 4)的振幅不断减小, 而中间球(球 2 和球 3)的振幅不断增大. 在 30~50 s 阶段, 外侧球的振幅出现了波动, 而中间球的振幅减小了. 在 50 s 之后的阶段, 4 个小球趋于同相位运动. 实验发现这也是小球数 $N=2, 3, 5$

时牛顿摆存在的共有现象, 即最终各球不发生相对运动.

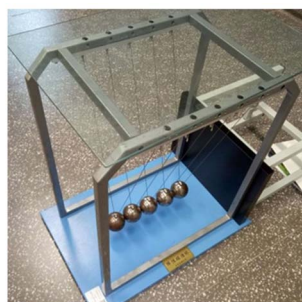


图 1 实验装置图

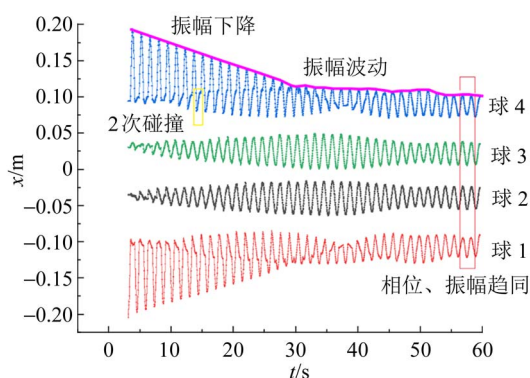


图 2 牛顿摆(4 个小球)中各球的位移随时间的变化

收稿日期: 2019-12-07; 修改日期: 2020-02-07

作者简介: 舒 畅(1999-), 男, 浙江湖州人, 复旦大学物理学系 2018 级本科生.

吴晋渊(2000-), 男, 浙江宁波人, 复旦大学物理学系 2018 级本科生.

通讯作者: 俞 熹(1978-), 男, 浙江金华人, 复旦大学物理学系副教授, 博士, 从事物理实验教学. E-mail: whyx@fudan.edu.cn

[†]: 并列第一作者, 对本文贡献相同.



将运动图像和视频做逐帧对比分析,还可发现最外侧 2 个球的运动图线中有明显的不光滑的速度突变点,这些点是外侧小球发生碰撞的位置. 不难发现,外侧小球在 1 个周期内的相邻 2 次碰撞,之间的漂移距离在逐渐增大,说明小球发生了非完全弹性碰撞,且未交换的动量逐渐增多.

2 模型建立

在小球之间不发生挤压时,小球受到重力和绳子拉力的合力,即重力的正弦分量,该力起到单摆运动回复力的作用. 受力分析图示如图 3 所示. 相邻小球碰撞时彼此产生接触力,在本文涉及的碰撞中,小球的相互接触用 Hertz 模型^[4]描述,图中以 f_H 标示,另外两球接触时还会有黏滞耗散力 f_{diss} ,小球全程都会受到空气阻力 f_s .

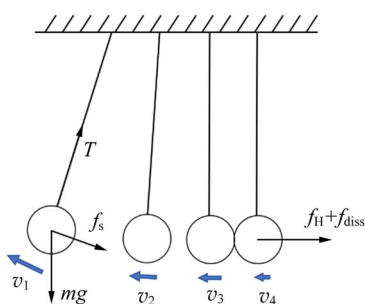


图 3 受力分析

2.1 Hertz 接触力公式

将 Hertz 模型^[4]应用于 2 个相同球体碰撞,得到接触力为

$$f_H = \frac{\sqrt{2RE}}{3(1-\sigma)} \xi^{\frac{3}{2}}, \quad (1)$$

其中, R 为球体半径, E 为材料的杨氏模量, σ 为泊松比, ξ 描述 2 个球体的“重叠厚度”. 2 个球体重叠厚度示意图如图 4 所示,实验中钢球的参量为 $R=0.03 \text{ m}$, $E=2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$, $\sigma=0.31$.

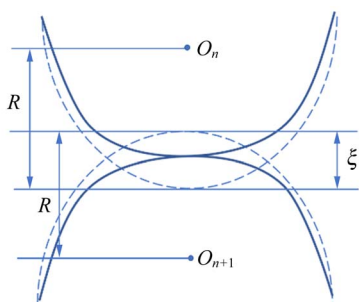


图 4 2 个球体重叠厚度示意图

2.2 碰撞黏滞耗散

只有当 2 个接触的物体处于准静态时,两者之间的作用力才严格符合 Hertz 模型. 在碰撞发生时,材料的应力-应变曲线出现滞后现象,材料发生蠕变与松弛,造成碰撞能量的损失^[4]. 使用 Hertz-Kuwabara-Kono 模型^[5],加入黏滞力项描述碰撞的黏滞耗散阻尼,黏滞耗散力 f_{diss} 写为^[6]

$$f_{diss} = -\gamma \frac{d}{dt}(\xi^2), \quad (2)$$

实验中取 $\gamma=1.47 \times 10^2$, $\beta=1.0$.

2.3 Stokes 空气阻力

由于钢材的密度较大,此体系雷诺数远小于 1,使用 Stokes 公式计算球体受到的空气阻力^[7],则空气阻力 f_s 为

$$f_s = 6\pi\mu Rv, \quad (3)$$

代入该实验的条件 $\mu=2 \times 10^{-6}$, $R=0.03 \text{ m}$,估算空气阻力的量级在 10^{-6} N . 重力的量级在 10 N ,空气阻力相对于体系中其他作用而言比较微弱.

2.4 框架耗散

真实实验体系中框架不完全刚性,在绳线的拉力作用下,绳线的悬挂点发生极其微小的位移. 因此部分能量通过绳线被输送到框架内.

由于固定点的位移十分微小,因此将其看作弹簧阻尼振子(图 5). 对体系进行受力分析,得到微分方程为

$$\begin{cases} \ddot{x}_f = \frac{mg\theta - k_f x_f - \gamma_f \dot{x}_f}{M + m\theta^2}, \\ \ddot{\theta} = -\frac{g\theta + \ddot{x}_f}{L + R}, \end{cases} \quad (4)$$

其中, x_f 是框架位移, M , k_f 和 γ_f 分别是框架的等效质量、等效弹簧常量和等效阻尼系数. 通过实测框架上单摆振动的衰减并与按照(4)式做的模拟相对比,得到 $M=10 \text{ kg}$, $\gamma_f=1\,000 \text{ N}/(\text{m} \cdot \text{s})$, $k_f=7\,050 \text{ N}/\text{m}$.

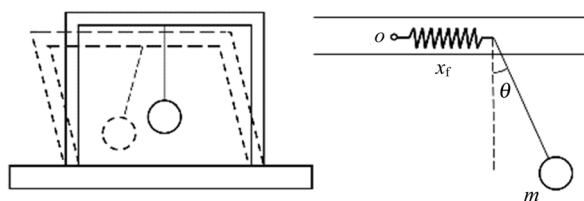


图 5 框架作用示意图

3 数值模拟

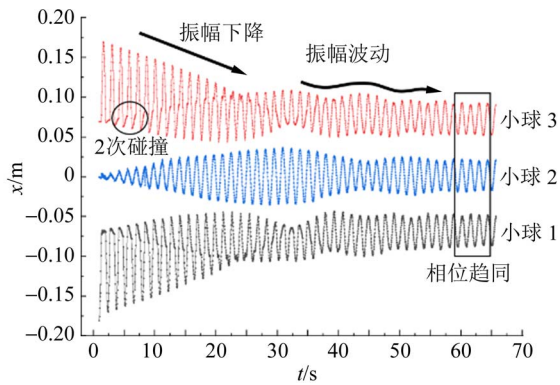
对小球从左向右依序编号,指标记为 n . 小球

受碰撞接触力、重力(投影分量)、黏滞耗散力 f_{diss} 以及空气阻力 f_s 满足的动力学方程为

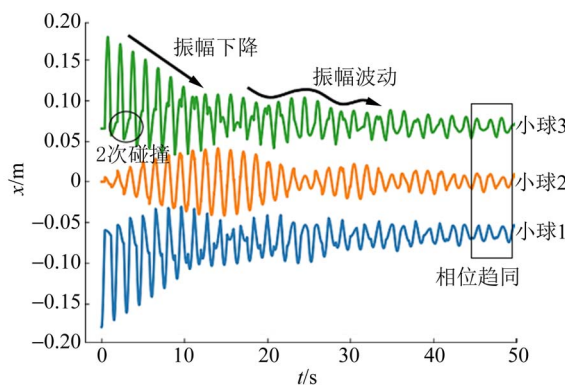
$$m\ddot{x}_n = k\xi_{n-1,n}^s - k\xi_{n,n+1}^s + k_g(x_{o,n} - x_n) - f_s - f_{\text{diss}}, \quad (5)$$

其中, k_g 是给出重力分量的函数, $\xi_{n-1,n}$ 指第 $n-1$ 个球和第 n 个球的重叠厚度, x_n 表示第 n 个球的位移, $x_{o,n}$ 则表示第 n 个球的平衡位置.

使用 SciPy 程序包^[8]下的 odeint 模块^[9]对于 3 个小球的体系进行实测和模拟,如图 6 所示. 同样地,从一侧起将小球依次标记为球 1、球 2 和球 3,并以球 2 的中心作为坐标原点. 实测中,中间小球会出现周期性的振幅波动,而模拟结果也呈现出了此特征. 另外,对于外侧 2 个小球,在撞击点附近的速度突变导致运动曲线发生陡然的弯折. 这些弯折点的连线和在振幅包络出现的波动也在模拟中体现了出来.



(a) 实测



(b) 模拟

图 6 N=3 的实测和模拟

跟踪牛顿摆演化过程中体系的总能量随时间的变化(这里的“体系”不包括框架变形所储存的弹性势能). 通过叠加所有小球的动能与弹性势能,得到了体系总能量的衰减情况如图 7 所示. 可以看到,在 10 s 之前,即体系发生猛烈的相对碰撞的时期,总能量呈台阶状下降(如图 7 中局部放大图的箭头所示),而台阶点即对应球与球之间的碰撞时刻. 这说明此时体系能量的衰减主要来源于碰撞时的黏滞阻力耗散;在 20 s 之后,即小球之间的相对运动几乎停止的时期,“台阶状”的降落变得微弱,而曲线整体平滑地下降. 此时能量的衰减主要来自于框架耗散. 经高速摄像估算,1 个周期内空气阻力对时间的累积仅占阻力冲量的 5×10^{-5} ,所以空气阻力并非主要因素. 所有摆球趋于同相位会加大框架的周期性形变,因此在运动后期阻尼主要来自框架耗散.

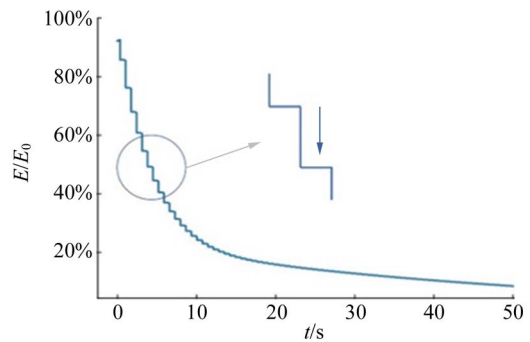


图 7 体系总能量随时间变化示意图

4 对其他耗散因素的定性分析

真实情况下小球开始同相摆动,振幅可以衰减至初始振幅的 20% 以下. 这说明仍然有一些耗散因素没有纳入模型内.

4.1 小球的固有摆动

小球和绳线的连接点在小球的顶端,与质心有一定的距离. 在小球被水平冲击的初始条件下,小球会有绕连接点的摆动(即绕图 8 中的 O' 点). 这个摆动在真实体系中也可以被明显地观察到(它的频率明显高于整体摆动的频率). 写出体系的拉氏量并代入欧拉-拉格朗日方程后得到体系的动力学方程为

$$\begin{cases} \left[L^2 + \frac{2}{5} R^2 \right] \ddot{\theta} + \left[RL \cos \varphi + \frac{2}{5} R^2 \right] \ddot{\varphi} - RL \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + gL \sin \theta + gR \sin (\theta + \varphi) = 0, \\ \left[RL \cos \varphi + \frac{2}{5} R^2 \right] \ddot{\theta} + \frac{5}{7} R^2 \ddot{\varphi} - RL \sin \varphi \cdot \dot{\theta}^2 + gR \sin (\theta + \varphi) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

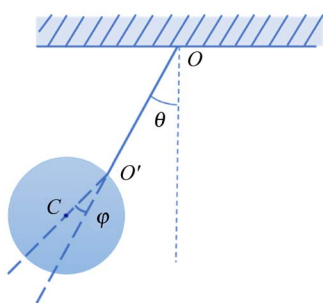


图 8 固有摆动的位形关系(未按比例)

以小球受到水平冲击作为体系的初值条件, 数值模拟结果如图 9 所示. 可以看到, φ 的摆动频率约为 θ 的 5 倍, φ 的摆动将会导致悬线的小幅度高频率振动. 而真实体系中此运动将会很快地被悬绳阻尼所消耗殆尽.

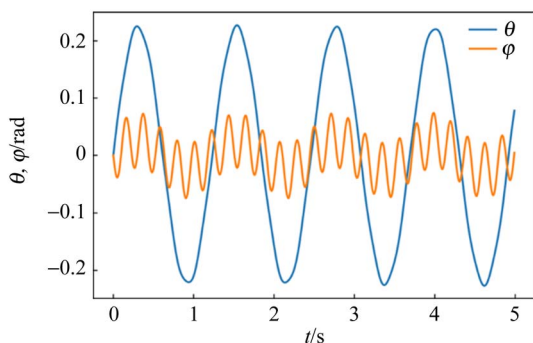


图 9 对固有摆动的模拟结果

4.2 非对心碰撞

实际的体系中不可能做到所有小球完全排列在同一水平线上, 初始条件无法达到理想的状态. 在后来体系的演化过程中, 这些微扰将被空气阻力以及其他的非线性作用放大. 于是, 实际体系中的碰撞都是非对心碰撞, 如图 10 所示. 在 2 个小球发生非对心碰撞后, 撞击力的横向分量会带来被撞球的横向速度, 而材料表面的不光滑带来的摩擦力将会导致被撞球以扭摆形式发生扭动.

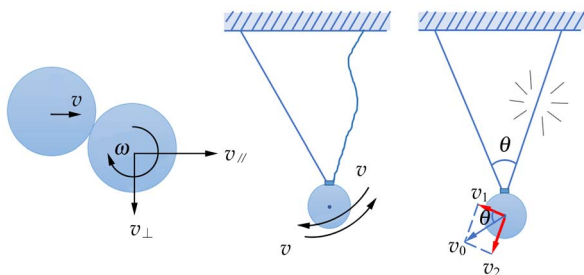


图 10 非对心碰撞效果图示

在图 10 中还可以看到, 若认为绳线的刚性足够强(即绳线张紧后 v_2 完全损失), 那么, 小球的速度将会以绳线夹角 $\cos \theta$ 的 n 次方进行几何级数的衰减. 故无论是扭摆动还是横向速度, 都会在短时间内将分配到的能量损耗. 为了验证非对心碰撞的效应, 在实验中将 1 个外侧小球横向偏置 1 cm 释放, 结果观察到了小球较为明显的扭摆动以及横向速度的产生. 整个体系运行了数秒后便损失完所有的相对动能, 进入了同相位摆动.

5 总结与展望

建立了非理想牛顿摆的运动模型, 并总结出了影响衰减的关键因素: 1) 黏滞耗散(即小球材料的非弹性程度); 2) 部分能量被注入框架耗散; 3) 小球固有摆动引起绳线抖动的耗散; 4) 非对心碰撞引起的切向速度、自转. 其中 1) 与小球本身物性参量有关; 2) 与小球和框架的连接方式以及框架的质量、材质、固定方式有关; 4) 与初始情况下小球的排列是否整齐有关. 在小球排列相对整齐的情况下, 黏滞耗散和框架耗散是主要的耗散因素, 两者之间的作用比例与耗散项参量及框架的等效参量有关; 在小球排列相对不够整齐的情况下, 非对心碰撞引起的能量耗散占主要地位. 本文也定量说明了空气阻尼并非衰减的主要因素.

虽然牛顿摆衰减的主导因素已经被找到, 但本文还未完善. 小球的固有摆动和非对心碰撞 2 个耗散因素暂未找到纳入数值模拟模型的方法; 实测图运动曲线转折处和模拟结果存在差异; 模拟结果衰减速度、幅度仍略小于实测, 说明可能有更多没有考虑到的耗散因素; 各耗散因素在不同阶段所起作用的具体比例及其变化也有待探究.

参考文献:

[1] IYPT. 2019 IYPT reference kit [EB/OL]. [2019-12-07]. http://kit.ilyam.org/2019_IYPT_Reference_kit.pdf.

[2] 王成会, 莫润阳, 贺西平, 等. 牛顿摆系统中的能量和动量传递[J]. 物理通报, 2018, 37(6): 10-13.

[3] Tracker projects. Tracker video analysis and modeling tool for physics [EB/OL]. [2019-12-07]. <https://www.physlets.org/tracker/>.

[4] 朗道 JI Д, 栗弗席兹 E M. 理论物理学教程(第七卷)·弹性理论[M]. 5 版. 武际可, 刘寄星, 译. 北京: 高等教育出版社, 2011: 31-36. (下转 43 页)

- 卷)·力学[J]. 5版. 李俊峰,鞠国兴,译. 北京:高等教育出版社,2007:81-92.
- [3] 张枫苗,顾吉林,李欣阳,等. 固有频率与共振频率影响因素及实验研究[J]. 大学物理实验,2019,32(2):37-41.
- [4] 刘学敏. 音叉振动的研究[J]. 物理实验,1989,9(4):191-192.
- [5] 赵松庭. 音叉的声学基本知识[J]. 乐器科技,1978(4):61-62.
- [6] 孙兆永. 古琴泛音调弦的物理基础和音律分析[J]. 戏剧之家,2014(12):85-91.
- [7] 高峰,赵文丽,吕刚,等. 基于 MATHEMATICA 拟合和仿真的声波衰减研究[J]. 大学物理实验,2019,32(4):69-71.
- [8] 张海澜. 理论声学[M]. 北京:高等教育出版社,2007:109-118.
- [9] 程熹,谯春,舒达. 两端固定张紧弦“异常”共振现象[J]. 物理实验,2005,25(3):41-43.

Research on the undertone sound stemming from nonlinear vibration

LIU Hong-ye, WANG Xiao-jie, LI Wen-hua, CHEN Zong-qiang

(School of Physics, Nankai University, Tianjin 300071, China)

Abstract: The viewpoint of nonlinear vibration between tuning fork and paper system was adopted to study the undertone sound. Through modeling and mechanical analysis of tuning fork and paper system, the law of the undertone sound frequency was obtained. Theoretical analysis and experiment results showed that the vibration of tuning fork provided the driving force, which caused the nonlinear vibration of the paper and produced undertone sound. The experiment results of each low frequency fraction were in good agreement with the hypothesis of fractional frequency derived from the theory.

Key words: turning fork; nonlinear vibration; Fourier transform; IYPT

[责任编辑:任德香]

(上接 39 页)

- [5] Wolf D E. Modelling and computer simulation of granular media in computational physics [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1996:76.
- [6] Hutzler S, Delaney G, Weaire D, et al. Rocking Newton's cradle [J]. American Journal of Physics, 2004,72(12):1508-1516.
- [7] 张兆顺,崔桂香. 流体力学[M]. 3版. 北京:清华大学出版社,2015:268-270.
- [8] SciPy Official Website [EB/OL]. [2019-12-07]. <https://www.scipy.org/>.
- [9] SciPy Documents [EB/OL]. [2019-12-07]. <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.odeint.html>.

Modeling and exploration of the decay of Newton cradle

SHU Chang[†], WU Jin-yuan[†], YU Xi

(Department of Physics, Fudan University, Shanghai 200437, China)

Abstract: Based on the Hertz collision model, the evolution equation of the Newton cradle system was derived, and the numerical simulation was carried out. The dissipation characteristics of the non-ideal Newton cradle was reproduced, and the effects of the non-concentric collision and the inherent oscillation of the small balls on the non-ideal behavior of the Newton cradle were qualitatively analyzed. Viscous dissipation and frame dissipation were the main energy dissipation factors when the balls arranged orderly, and the energy dissipation caused by the non-concentric collision occupied the dominant position when the small balls were relatively not neat. At the same time, the air damping was not the main factor of the energy dissipation.

Key words: Newton cradle; Hertz model; energy dissipation; CUPT

[责任编辑:任德香]