目　录

第一章　探索法

在这一章里，我们将讨论求解数学问题的探索法．曾经思考过探索法的人们，总结了一些有用的方法．在这些方法中，我们应集中注意以下几个：

(1)寻找一种模式；(2)画一个图形；(3)提出一个等价的问题；(4)改变问题；(5)选择有效记号；(6)利用对称性；(7)区分种种情况；(8)反推；(9)反证法；(10)利用奇偶性；(11)考虑极端情况；(12)推广．

我们对上述这些解题方法的兴趣不在于如何描述它们，而是如何应用它们，认真琢磨别人怎样运用这些简单而有效的方法的实例，有助于我们改进自己的解题技巧．

首先，我们对每节末尾的问题进一言：不要把本节所谈的探索法当作解题的唯一方法．虽然选择这些问题是为了给应用这方法以实践机会，但是注意力过分狭窄，可能是有害的．一个问题，通常可有几种解法，并且常有一些明显不同的探索法．所以不要以“先入为主”之见处理每个问题，更不要带有某个问题只能用某一种特殊的探索法来求解的框框．提出一个问题时，关键是把它解出来．正是用一切方法去解题而积累了经验，才使人们得到可能解题成功的高度洞察力．

1.1寻找一种模式

实际上，所有解题的人，总是通过自己相信问题结果的合理性，得到关于问题的一种感性认识。这样有助于对俯拾可得的特例进行验证；从而启发进一步求解这个问题的思路。

1.1.1. 证明n个（不同的）元素组成的集合，恰有2^n个（不同的）子集合 .

当问题是用命令形式写出来的时候，一个初学者可能会束手无策，不知道如何下手。假如问题是写成一种带疑问的语句，例如

(i) 由n件不同物体组成的一个集合，能造成多少个子集合？

(ii) 证明或否定：一个n元集合有2^n个子集合 .

在这两种形式的陈述中，都有这样的暗示：建议从检验少量特殊情况着手。这正是如何求解每个问题的办法：对结论持有怀疑直到信服为止 .

解法一 我们先检验当集合含有0、1、2三个元素时会发生什么情况。检验的结果如下表所示：

n	S 的元素	S 的子集	S的子集数
0	无	$\varnothing$	1
1	x_1	$\varnothing$, $\{x_1\}$	2
2	x_1, x_2,	$\varnothing,\{x_1\},\{x_2\},\{x_1,x_2\}$,	4
3	x_1,x_2,x_3	$\varnothing,\{x_1\},\{x_2\},\{x_1,x_2\}$, $\{x_3\},\{x_1,x_3\},\{x_2,x_3\},\{x_1,x_2,x_3\}$	8

我们造这个表的目的，不仅是验证结论，而且是建立如何处理一般情况的可能图景。因此，我们意在尽可能地系统化。在本题中，注意到当$n=3$时，我们先列出了$\{x_1, x_2\}$的子集，接着在第二行里给前一行中每个子集添加一个元素x_3。这就是使我们能处理更大的n值的关键想法。例如，当$n=4$时，$S=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$的子集是$\{x_1, x_2, x_3\}$的8个子集（已在表中列出），加上给这8个子集中的每一个添入x_4而得的子集。于是4元集合有$2^4(=16)$个子集。基于这种想法的证明，是数学归纳法的一个简单应用（见2.1节）。

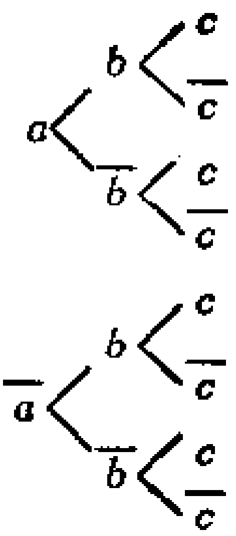
解法二 上述解答方法的另一途径可作如下讨论：对于每个n，以A_n表示具有n个（不同的）元素的一个集合的（不同的）子集数。设S为一个$n+1$元集合，并记其中元素为x。那么在S的不含x的子集与含x的子集之间，存在一一对应。（即，一个不含x的子集T与$T\cup\{x\}$相对应）。前一类型的子集即是$S-\{x\}$的一切子集。$S-\{x\}$是个n元集，因此必定有

$$A_{n+1}=2A_n.$$

这个递归关系对于$n=0, 1, 2, 3, \cdots$都是成立的。与$A_0=1$这件事联合起来，即有$A_n=2^n$（$A_n=2A_{n-1}=2^2A_{n-2}=\cdots=2^nA_0=2^n$）。

解法三 子集的另一种系统的计数法，可从构思一棵"树"得出。

对于$n=3$而$S=\{a, b, c\}$的情形，树可画出如下：



子集

$\{a, b, c\}$

$\{a, b\}$

$\{a, c\}$

$\{a\}$

$\{b, c\}$

$\{b\}$

$\{c\}$

$\varnothing$

树的每一枝，对应着S的一个不同的子集.（元素名称上方打“—”小杠，表示它不含于这一枝所对应的集合）.这棵树是分三步构成的,（对应着S的三个元素）.

S的每个元素有两个可能：它或者属于该子集或者不然.这种不同的归属法就用两条枝来代表。每考虑一个元素时，枝的数目即加倍. 于是，对于一个三元素集合，枝的数目就是$2\times2\times2=8$.对于n元素，枝的数目是

$$\underbrace{2\times2\times\cdots\times2}_{n}=2^n.$$

这就是说，n元集有2^n个子集.

解法四　如果我们按照子集所含元素的个数来数子集的数目，例如，当$S=\{a, b, c, d\}$时，其子集是

元素个数		子集个数
0	$\varnothing$	1
1	$\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$	4
2	$\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,d\}$, $\{b,c\}$, $\{b,d\}$, $\{c,d\}$	6

3	$\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\}\{b,c,d\}$	4
4	$\{a, b, c, d\}$	1

这个例子立即可以提示下列解法。设S为一个n元集合，则

$$S\text{ 的子集数}=\sum_{k=0}^{n}(S\text{的具有}k\text{个元素的子集数})$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^{n}$$

上列等式链中的最后一个等号，可由二项式定理得出．在

$$(x+y)^{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k}y^{n-k}$$

中，令$x=1$和$y=1$即可．

解法五 另一种系统考虑的出发点由表1．1说明．这个表列出了$S=\{x_1,x_2,x_3\}$的子集．为了解这里的方法，注意最左边一列与第二列．

表1.1

子集	三数组	二进位数	十进位数
$\varnothing$	(0,0,0)	0	0
$\{x_3\}$	(0,0,1)	1	1
$\{x_2\}$	(0,1,0)	10	2
$\{x_2,x_3\}$	(0,1,1)	11	3
$\{x_1\}$	(1,0,0)	100	4
$\{x_1,x_3\}$	(1,0,1)	101	5
$\{x_1,x_2\}$	(1,1,0)	110	6
$\{x_1,x_2,x_3\}$	(1,1,1)	111	7

即三数组列中1的出现的位置间的对应关系．具体说来，如果A是$S=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$的一个子集，对于$i=1,2,\cdots,n$，定义a_i如下：

$$a_i=\begin{cases}1 & 若\ x_i\in A,\\ 0 & 若\ x_i\notin A.\end{cases}$$

很清楚，现在我们可以把S的子集A与$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$（即一个由0和1组成的n数组）当作同一个东西.反之,每个如此的n数组也对应着S的一个唯一的子集。于是S的子集数等于0和1组成的n数组的数目.后一集合显然与小于2^n的非负二进位数集之间有一一对应.因此，每个小于2^n的非负整数恰好对应着S的一个子集,反之也对，所以S必定有2^n个子集.

在通常情形下，我们对每个例题只给出一种解法——用以解释所考虑探索法的解法。在这第一个例子中，我们只是想再解释一下前面讲过的主张，即一个问题通常可以用各种不同的方法求解。需要记取的教训是，在探索问题的最初阶段，必须保持灵活性。如果一种办法看来不能奏效，不要失望，而要寻求新办法。不要墨守着某种单一的办法而坐等有一个机缘来到使你能顿开茅塞。

1.1.2. 设$S_{n,0}$,$S_{n,1}$和$S_{n,2}$表示Pascal三角形中第n行里分别从左边的第一、第二、第三个元素起始，同其后与它们每隔二个元素的元素的和，试对于$S_{100,1}$的值作一个猜测.

解 我们从检验低阶情形开始,以便找到可以推广的方法。在表1.2每行中下面未划线的各项之和，即为$S_{n,0}$，下面划了一条线与二条线的各项之和即分别为$S_{n,1}$和$S_{n,2}$,表中右边三列表明，在每个情形下，和数中有两个是相等的，而第三个和数则或者大1（上标“+”）或者小1（上标“−”)。同时还可看出，不等的项的标记在这个序列中按6为周期变化着。于是，由前n行所形成的图形我们自然期望着对于$n=8$，不等的项出现在中间一列并且比其余二项大1.

我们知道 $S_{n,0}+S_{n,1}+S_{n,2}=2^n$ （见1.1.1）。由于100＝6×16＋4，我们期望着不等的项在第三列（$S_{100,2}$），并且比其余二项多1。于是$S_{100,0}=S_{100,1}=S_{100,2}-1$，而$S_{100,1}+S_{100,1}+S_{100,1}+1=2^{100}$。由这几个等式，我们猜想

$$S_{100,1}=\frac{2^{100}-1}{3}$$

这个猜测的证明，是数学归纳法的一次直接的应用（见第2章）。

表 1.2

Pascal三角形	n	$S_{n,0}$	$S_{n,1}$	$S_{n,2}$
1	0	1^+	0	0
1 1	1	1	1	0^-
1 2 1	2	1	2^+	1
1 3 3 1	3	2^-	3	3
1 4 6 4 1	4	5	5	6^+
1 5 10 10 5 1	5	11	10^-	11
1 6 15 20 15 6 1	6	22^+	21	21
1 7 21 35 35 21 7 1	7	43	43	42^-

1.1.3. 设$x_1, x_2, x_3\cdots$是非0实数组成的数列，满足下列关系

$$x_n=\frac{x_{n-2}x_{n-1}}{2x_{n-2}-x_{n-1}} \qquad n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots$$

建立x_1与x_2应满足的充分与必要条件，使得x_n对于无穷多个

n的值是整数．

解　为了对这个序列有所认识，我们要算出前几项，并把这为数不多的几项用x_1和x_2表示出来。我们得到（略去代数运算过程）：

$$x_3=\frac{x_1x_2}{2x_1-x_2},$$

$$x_4=\frac{x_1x_2}{3x_1-2x_2},$$

$$x_5=\frac{x_1x_2}{4x_1-3x_2}.$$

就本题而言我们很幸运，因为计算是能进行的，并且出现了一种方法、用归纳法容易证得

$$x_n=\frac{x_1x_2}{(n-1)x_1-(n-2)x_2},$$

在其中归并含n的项，得

$$x_n=\frac{x_1x_2}{(x_1-x_2)n+(2x_2-x_1)}.$$

由这个形式可见，如果$x_1\neq x_2$，分母的大小到后来必定超过分子，因此x_n就不会是整数。可是如果$x_1=x_2$，序列的一切项都相等，因此，x_n对于无穷多个n的值等于整数的充分与必要条件是$x_1=x_2=$整数．

1.1.4.　找出如此的正整数n和a_1，a_2，…，a_n，使得$a_1+\cdots+a_n=1000$，而乘积$a_1a_2\cdots a_n$尽可能地大．

解　当问题中含有一个使得对问题的分析变复杂的参数时，通常有益的办法是在思考阶段中暂时把它换成一个容易控制的量。在这个问题中我们可以先检验一系列用2、3、4、5、6、7、8、9…替代1000而得到的特殊情形。用

这个方法可使我们发现，在取值最大的乘积中

（i） 没有a_i可以比4大；

（ii） 没有a_i会等于1；

（iii） 所有的a_i可取的值是2或3 （因为$4=2\times 2$同时$4=2+2$）。

（iv） 至多有两个a_i等于2（因为$2\times 2\times 2<3\times 3$而$2+2+2=3+3$）。

所有这些都是易于证明的。因此，当参数等于我们手头这个问题中的1000时，最大的乘积必定是$3^{332}\times 2^2$。

1.1.5. 设S是一个集合而$*$是S上的一个二元运算，它满足下列两条法则

对于在S中的一切x，$x*x=x$，

对于S中的一切x、y、z，$(x*y)*z=(y*z)*x$。

证明，对于S中的一切x、y，有$x*y=y*x$。

证 下面写出的简洁解法，实际上是经过相当一段拼凑而得到的结果；得出解答的过程只能描写为一次探索的过程。（主要的方法是在第二个条件中因子所具有的循环性质）。我们有，对于S中的一切x，y，$x*y=(x*y)*(x*y)=[y*(x*y)]*x=[(x*y)*x]*y=[(y*x)*x]*y=[(x*x)*y]*y=[(y*y)]*(x*x)=y*x$。

问题

用寻求规律的办法对下列问题进行分析，提出适当的猜测，并且想想如何能证明它们。

1.1.6. 从2与7开始，数列2、7、1、4、7、4、2、8，…的造法是，把这个数列相邻的前二项相乘，如得到一个一位数，此数即作为第三项；如得到二位数，则此二

位数的二个位上的数依次作第三、第四项，以此类推。证明数字6在上述序列中出现无穷多次。

1.1.7. 以S_1表示正整数序列1、2、3、4、5、6…而从S_n定义序列S_{n+1}的办法是，给在S_n中可被n整除的项加1，其余不变。例如，S_2是2、3、4、5、6、7，…，S_3是3，3，5，5，7，7，…等。试定出所有能使在S_n中的前$n-1$项都是n的整数n来。

1.1.8. 证明一个有限集的全体子集，可以下列方式列成一个表：

(i)居表中第一位的是空集

(ii)每个子集恰好在表中出现一次，并且

(iii)获得表中以后每个子集的方法，或者是给前一个子集添加一个元素或者是从前一个子集中删去一个元素。

1.1.9. 定出在$(x+y)^{1000}$的展开式中奇二项系数的个数（见4.3.5）。

1.1.10. 一个著名的定理断言：素数$p>2$可以写成两个整数完全平方之和（即$p=m^2+n^2$，其中m与n是整数）的充分必要条件是p等于4的一个倍数再加1，试对于什么样的素数$p>2$可以写成下列形式提出一个猜测。在下列式子中x与y是整数（不必是正整数）：

(a) x^2+16y^2，(b) $4x^2+4xy+5y^2$（见1.5.10）

1.1.11. 如果(a_n)是有如下性质的数列：对于$n\geq 1$，$(2-a_n)a_{n+1}=1$，问：当n趋向于无穷时，a_n将如何？（见7.6.4）

1.1.12. 设S是一个集合，且设$*$是S上满足下列法则的一个二元运算

对于S中的一切x、y，　$x*(x*y)=y$，

对于S中的一切x、y，　$(y*x)*x=y$，

证明，对于S中的一切x、y有$x*y=y*x$．

补充例题

大多数用归纳法的问题都以发现一种图景为基础．所以，在§2.1、§2.2、§2.3、§2.4节中的问题便提供了本节探索法的补充实践机会．另外也可见于1.7.2、1.7.7、1.7.8、2.5.6、3.1.1、3.4.6、4.3.1、4.4.1、4.4.3、4.4.15、4.4.16、4.4.17．

1.2　画一个图形

凡可能时，用一个图形、一个图解给问题以几何直观描绘对于解题是大有益处的。图形表示常常使得易于理解有关的数据并且形象地引起对相互关系与依赖性的注意．

1.2.1.　一条长度一定的弦沿着半个圆周滑动。此弦的中点及弦两端在底边上的射影形成一个三角形的三个顶点．证明，这个三角形是等腰三角形并且其形状决不会改变．

证　以AB表示半圆的底边，以XY表示那条弦，M是弦的中点，C与D分别是X与Y在AB上的射影（图1.1）．以N表示M在AB上的射影，那么N是CD的中点，由此即知$\triangle CMD$是等腰的．

为了证明三角形的形状与弦的位置无关，只须证明$\angle MCD$保持不变，或者证明对于XY的一切位置$\angle XCM$是常数，为了证明这一点，延长XC交整圆于Z（图1.2）．于是CM平行于ZY（因为C与M分别是XZ与XY的中点）．因此$\angle XCM=\angle XZY$．但$\angle XZY$等于弧XY的一半，而这

个弧度只依赖于弦XY的长度．命题得证．

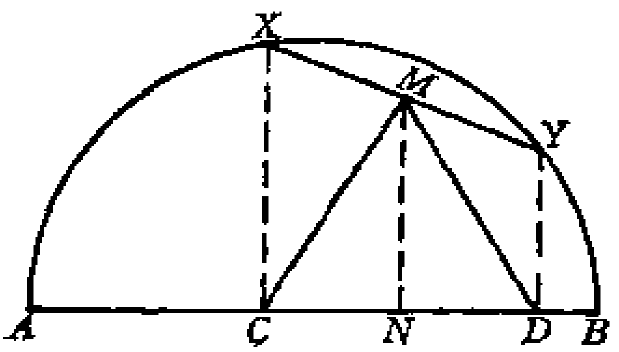


图1.1

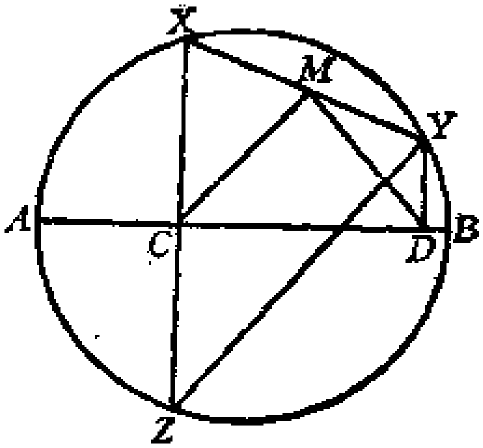


图1.2

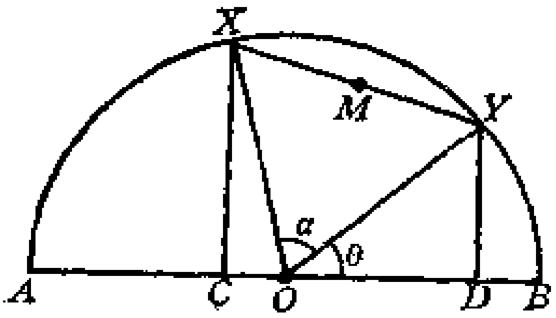


图1.3

有人可能会问，怎么会想到把XC这么延长一下呢？正是这一步使得证明变得很优美，并且，这的确是全部推导中关键的一步，这表明利用辅助线和弧（通常是用反射、延长或旋转而找到的）是几何中常常使用的手段．正是对于这个事实的认识，增加了人们求解已给问题的可能的途径．

这个问题的另一个巧妙的解法，是给点引入坐标并使用解析方法．为了证明三角形的形状与弦的位置无关，只须证明高与底之比$\frac{MN}{CD}$是一个常数．

以O表示AB的中点，并设$\theta=\angle YOB$．显然，整个状况完全决定于θ（图1.3）．

令$\alpha=\angle XOY$.应用这些记号，且不失一般性，设圆的半径为1，我们有

$$CD=\cos\theta-\cos(\theta+\alpha)$$

$$MN=\frac{\sin\theta+\sin(\theta+\alpha)}{2}$$

而高与底之比是

$$F(\theta)=\frac{\sin\theta+\sin(\theta+\alpha)}{2(\cos\theta-\cos(\theta+\alpha))}\qquad 0\leqslant\theta\leqslant\pi-\alpha$$

这个量不依赖于θ并不是很显然的；这是1.8.1和6.6.7的内容．

1.2.2. 一个粒子由静止开始在一直线上运动，在走过一段距离s_0之后达到速度v_0．如果这个粒子的加速度始终不会增大，试求走过这段距离的最多的时间．

解 把注意力集中到速度$v=v(t)$的图上（图1.4）．我们已知$v(0)=0$并且v的图永远不会上凹（因为加速度$\frac{dv}{dt}$永远非增），曲线下的面积等于S_0．（所经过的距离$=$

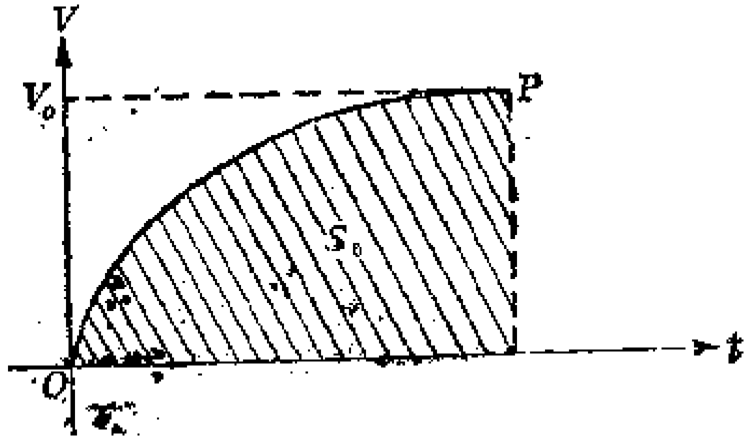


图1.4

$\int_0^t v(t)dt$）.由这个示意图，明显可见移动时间最大的情形是曲线$v(t)$从0到P为一直线的情形（图1.5）.设极大时间为

t_0，则 $\frac{1}{2}t_0v_0=S_0$ 或 $t_0=\frac{2S_0}{v_0}$.

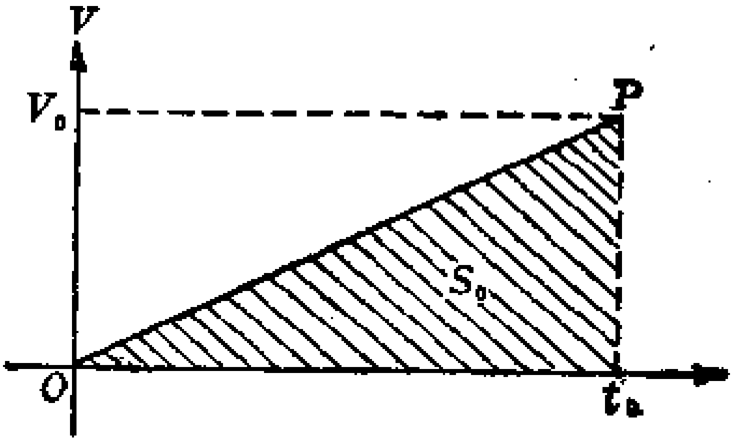


图 1.5

1.2.3. 若 a 与 b 是互素的正整数，证明

$$\left[\frac{a}{b}\right]+\left[\frac{2a}{b}\right]+\left[\frac{3a}{b}\right]+\cdots+\left[\frac{(b-1)a}{b}\right]$$
$$=\frac{(a-1)(b-1)}{2}$$

证 当 $b=1$ 时，左边的和理解为 0，所以结论成立。

怎样用一个图来帮助建立这个纯算术的恒等式，这并不明显；此外，问题的陈述中包含着两个独立变数 a 与 b，而 $\frac{a}{b}$，$\frac{2a}{b}$，$\frac{3a}{b}$，…则分别是函数 $f(x)=\frac{ax}{b}$ 当 $x=1,2,3,\cdots$ 时的值，能给 $\left[\frac{a}{b}\right]$，$\left[\frac{2a}{b}\right]$，…以几何解释吗？

为了使问题具体些，考虑 $a=5$ 与 $b=7$ 的情形. 点 $P_k=(k,\frac{5k}{7})$，$k=1,2\cdots,6$，都位于直线 $y=\frac{5x}{7}$ 上，而 $\left[\frac{5k}{7}\right]$ 则等于过 P_k 点的垂直线上居于 x 轴以上 P_k 以下的

格点数，于是$\sum_{k=1}^{6}\left[\frac{5k}{7}\right]$等于$\triangle ABC$内部的格点数（见图1.6）.由对称性，此数应等于矩形$ABCD$内部的格点数的一半．在$ABCD$内有$4\times 6=24$个格点，这意味着三角形ABC内含有12个格点．

对于一般情形也可用同样的讨论法，a与b互素的条件保证了$ABCD$的内格点不会落在直线$y=\frac{ax}{b}$上，因此

$$\sum_{k=1}^{b-1}\left[\frac{ka}{b}\right]=\frac{1}{2}\text{（}ABCD\text{内部的格点数）}=\frac{(a-1)(b-1)}{2}.$$

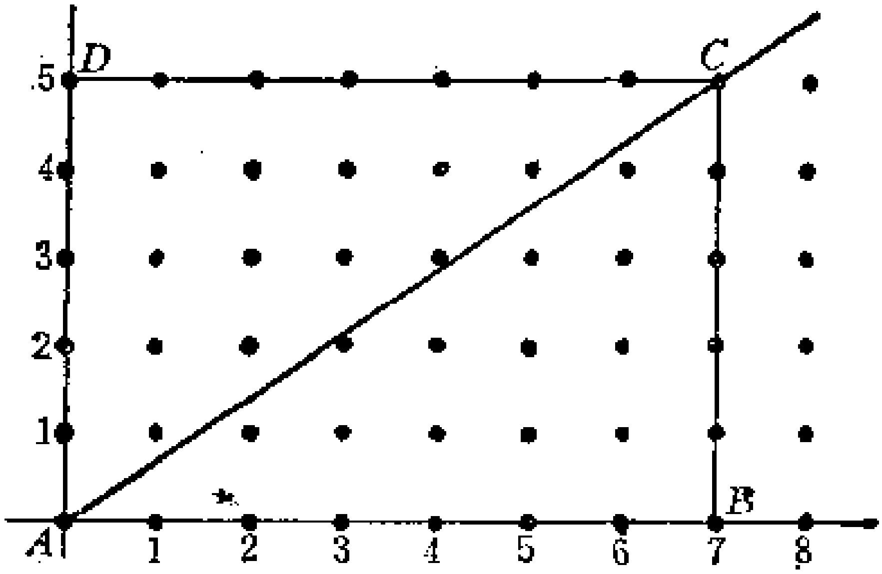


图1.6

1.2.4. （握手问题）亚当斯先生和亚当斯太太最近参加了一次晚会，同时出席的还有其他三对夫妇，于是进行了种种握手活动，没有人同他（她）自己的配偶握手，同时，没有人和同一个人握两次手；当然，也不会有人同自己握手．

当握手活动完毕之后，亚当斯先生问了每个人，包括他自己的妻子，他或她握过多少次手，令他惊讶的是：每个人

答复的数字互不相同。那么，请问亚当斯太太握了几次手？

解、虽然一个图解对于求解并不是必不可少的，但它有助于以下列方式从图上观察数据。把8位出席者象图1.7所示那样用8个点代表 .

亚当斯先生所问得的答数必定是0，1，2，3，4，5，6，这几个数。因此，客人中的一人，比如说A，可设同6个其他的人，设为B，C，D，E，F，G，握了手，在图上用把A同这些点连以线段来标明，如图1.8所示。

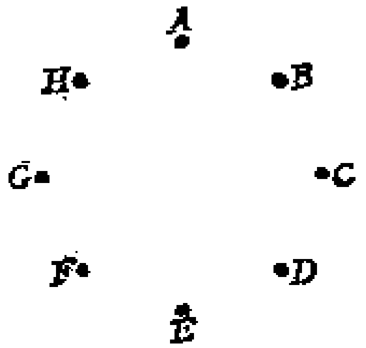


图1.7

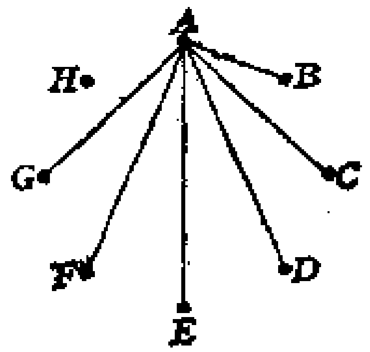


图1.8

由这个图解我们看到，H必定是没有和A握过手的那个人，从而A和H必定是夫妻，因为A已同6个其他的人都握了手而没有握他（她）自己配偶的手 .

由假定可知，B、C、D、E、F、G中有一人握过5次手。可以假定这个人就是B，不然的话，可以重作一次命名。同样，我们也可以不失一般性地假定同B握手的这5个人是A、C、D、E、F，如图1.9所示，由这个草图的作法，我们便可以轻易地看出，G是仅握过一次手的人，并且B和G是夫妻

和上面一样，再作下去，必要时给C、D、E重新命名，

我们即可假定C握了4次手，即与A、B、D、E握了手．相应的图解已在图1.10中给出，运用与上面相同的推理，可知F与C是夫妻，于是自然可推出D和E是夫妻．

D和E中的每一个都同3个其他的人握了手，由于亚当斯先生没有得到两个"握过3次手"的答复，D和E必定对应于亚当斯先生与亚当斯太太．这就是说，亚当斯太太同三个另外的人握了手．

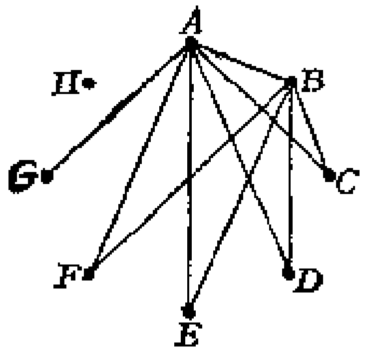


图1.9

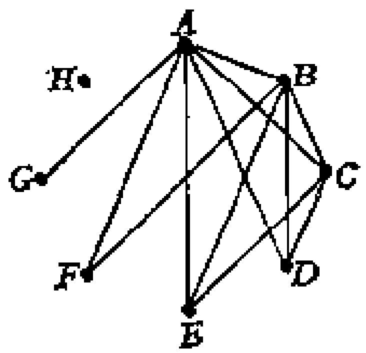


图1.10

问题

1.2.5. 长度为a和b的两根电线杆（在同一地平线上）相距为d．用电线栓住两杆顶端，拉紧后固定在两杆之间地面上的同一点P处。问P应位于何处才可使电线之长度最小？（提示：设电杆竖立在点C和D处，它们的顶端分别记为A和B，我们希望$AP+PB$最小，用关于基线CD作反射的办法来讨论这个图形，假定B反射到B'，（$PB=PB'$），于是问题变为：P应位于何处以使$AP+PB'$最小？）

1.2.6. 设ABC是一个锐角三角形，并设D位于线段AB内部．在AC上定出点E，在CB上定出点F，使得它们所定的三角形DEF具有最小的周长．（提示：把D关于线AC

作反射得到D'；把D关于CB作反射得到D''，再考虑线段$D'D''$）.

1.2.7. 一间长方体状的房间，它有30米长，12米高，两端之间有12米宽，一只折了一条翅膀的苍蝇停在天花板下1米，房间一端中线处；一小块食物位于房间另端中线地板以上1米处，苍蝇只有爬行40米的力量。证明：存在一条路径，苍蝇沿着它能爬行并得到食物.

1.2.8. 在三角形ABC的边AB与AC的外部各作一个等边三角形ABP与ACQ。证明$CP=BQ$，（提示：为了得到一个优美的解答，把平面绕A点旋转60°，旋转方向是使B向C的方向转。那么这时线段CP怎么变动？）

1.2.9. 设a与b是已知的正实数，并且$a<b$。如果在长为b的直线段上随机地取两个点，问这两个点间的距离至少等于a的概率是多少？（提示：设x与y表示从区间〔a，b〕中随机选取的二个数，然后在两条不同的轴上考虑这两个独立的随机变量，那么相应于$|x-y|\geqslant a$的是什么面积？）

1.2.10. 给下列问题一个几何解释：设f是可微的并且f'在〔a，b〕连续，证明，如果在（a，b〕有一个数c使得$f'(c)=0$，则我们可在（a，b）内找到一个数d使得

$$f'(d)=\frac{f(d)-f(a)}{b-a}.$$

1.2.11. 设a与b是实数且$a<b$。用几何方法准确地标出下列各数中每一数的位置：$\frac{(a+b)}{2}\left(=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b\right)$，$\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b$，$\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b$，$\left[\frac{m}{(m+n)}\right]a+\left[\frac{n}{(m+n)}\right]b$，其中$m>0,n>0$(后面这个数是两个质点组成的系统的重心，

其一质量为m，位于a，而另一质量为n，位于b.）

1.2.12. 利用 $y=\sin x$ 的图形证下列命题：已知三角形ABC，则

(a) $\frac{\sin B+\sin C}{2}\leqslant\sin\frac{B+C}{2}$，

(b) $\frac{m}{m+n}\sin B+\frac{n}{m+n}\sin C\leqslant\sin\left(\frac{m}{m+n}B+\right.$
$\left.+\frac{n}{m+n}C\right)$，$m>0$，$n>0$.

1.2.13. 利用一个图解（一个矩形阵列(a_ia_j)）证明

(a) $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}a_ia_j=\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}a_ia_j$

(b) $\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n}a_ia_j=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}a_ia_j$

(c) $\left(\sum_{i=0}^{n}a_i\right)^2=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}a_ia_j=2\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}a_ia_j-\sum_{i=0}^{n}a_i^2$

补充例题

第 8 章（几何）中的大多数问题以及1.3.11，1.9.2，1.9.4，1.11.3，2.1.3，2.5.5，2.6.11，5.1.2，6.2.2，6.4.1，6.6.3，6.8.1，7.1.14，7.4.19，7.6.1，8.1.1.

1.3 提出一个等价问题

前节给我们启示，对于求解问题的最初步骤应是：收集数据，加以探索与了解，找出关联，加以猜测与分析。

可是，如果由于计算过于复杂或者问题本身不存在任何可提供启发的特殊情形，使我们象上面说的那样，又怎么办呢？在这一节里，我们将考虑几个这种类型的问题。试把问题改写为一个与之等价的简单形式。这一作法的实现依赖于

解题人的想象力与创造力。几种标准的改写方法涉及到代数或三角学、变量变换或替代，利用一一对应以及对于其它学科（代数、几何、分析、组合学等等）语言的重新解释。

1.3.1. 找出 $f(x)=\frac{1}{(1-x^2)}$ 的 n 阶导数的一个一般公式。

解 处理有理函数的一个常用的简化步骤是把这个函数写成部分分式之和。在本题中

$$f(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right]$$

于是关于这个形式容易看出

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{2}\left[\frac{1}{(1-x)^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right].$$

1.3.2. 求 $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ 的全部解。

解 这个方程式可以先除以 x^2，然后作代换 $y=x+\frac{1}{x}$，再用二次三项式公式来处理。这就是说，我们有

$$x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}+1=0,$$

$$\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)+(1-2)=0,$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0,$$

$$y^2+y-1=0$$

这个方程的根是

$$y_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\qquad y_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

还要通过解方程

$$x+\frac{1}{x}=y_1 \text{和} x+\frac{1}{x}=y_2$$

来定出x，上面的方程等价于

$$x^2-y_1x+1=0 \text{ 和 } x^2-y_2x+1=0,$$

求解这些方程，即可得四个根如下：

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}+i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

$$x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}-i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

$$x_3=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}+i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$$

$$x_4=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}-i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

求解这个问题的另一办法是在原方程二边同乘以$x-1$。由于$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=x^5-1$，于是一个等价的问题便是求满足$x^5=1$的(除$x=1$以外的)全部解。$x^5=1$的全部解即是1的5个5次方根，即

$$x_1=\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi,$$

$$x_2=\cos\frac{4}{5}\pi+i\sin\frac{4}{5}\pi,$$

$$x_3=\cos\frac{6}{5}\pi+i\sin\frac{6}{5}\pi,$$

$$x_4=\cos\frac{8}{5}\pi+i\sin\frac{8}{5}\pi,$$

$$x_5=1.$$

在用了以上两种方法求解这个问题之后，我们可得到一个新的结论：

$$\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}+i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

分别令实部相等及虚部相等，可得

$$\cos 72^\circ=\frac{-1+\sqrt{5}}{4},\qquad \sin 72^\circ=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

（对于x_2，x_3和x_4可得类似的公式）。

1.3.3. 设P是三角形ABC内部的一个点；D，E，F依次是由P向线段BC，CA，AB作垂线的垂足.求出使

$$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$$

达到最小时P的位置.

解 以a，b，c分别记BC，CA，AB的长度，以p，q，r分别记PD，PE，PF的长度.（见图1.11）我们希望使$\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}$最小

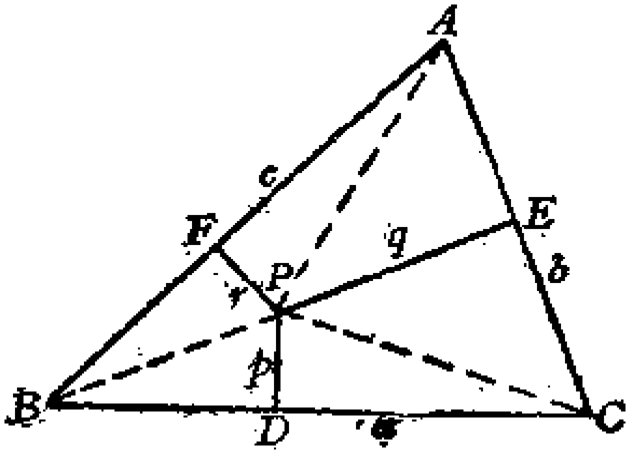


图1.11

注意到

$\triangle ABC$的面积$=\triangle BCP$的面积$+\triangle CAP$的面积$+\triangle ABP$的面积

$$=\frac{1}{2}ap+\frac{1}{2}bq+\frac{1}{2}cr$$

$$=\frac{ap+bq+cr}{2}$$

于是可见$ap+bq+cr$是一个与P的位置无关的常数.因此，我们可以用使$(ap+bq+cr)\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}\right)$取最小值来代替使

$\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}$取最小（这一步在学完在7.3节中的有约束的不等式之后将显得更自然）。我们有

$$(ap+bq+cr)\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}\right)=a^2+b^2+c^2+ab$$
$$\cdot\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)+bc\left(\frac{q}{r}+\frac{r}{q}\right)+ac\left(\frac{p}{r}+\frac{r}{p}\right),$$
$$\geqslant a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac,$$
$$=(a+b+c)^2.$$

第二步中的不等式来自下列事实，即对任何两个正数x和y都有$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2$，其中等号当且仅当$x=y$时成立，作为这个事实的一个推论，$(ap+bq+cr)\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}\right)$取到它的最小值$(a+b+c)^2$的充要条件是$p=q=r$。与此等价的说法是，$\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}$当$P$位于三角形的内心时，取到它的最小值。

1.3.4. 证明，若m与n都是正整数而$1\leqslant k\leqslant n$，则

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{m+n}{k}$$

证 本题中的这个命题，是含有二项系数的基本的恒等式之一。等号左边是二项系数的乘积之和。显然，直接用二项系数的阶乘表示代入是无济于事的。

有限级数（特别是那些含有二项系数的有限级数）常可以用组合的办法来求和。为了弄懂这句话，我们用下列办法把一个级数问题化成一个计数的问题。设$S=A\cup B$，其中A是一个n元集合而B是与A不相交的一个m元集合。我们用两种方法来计算S的（不同的）k元子集的数目。一方面，这个

数目等于$\binom{m+n}{k}$.另一方面S的恰有i个元素取自A（以及$k-i$个元素取自B)的k元子集数是$\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$.由此可见

$$\begin{aligned}\binom{m+n}{k}&=S\text{的}k\text{元子集数}\\&=\sum_{i=0}^{k}(i\text{个元素取自}A\text{的}S\text{的}k\text{元子集数})\\&=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}.\end{aligned}$$

（本题的关于多项式的性质的另一解法，在4.3.2.中给出).

计数问题常可（借助于一一对应）用把一个集合中的元素与另一其元素更易计数的集合的成员“认同”的办法来简化。下面三个例子说明了这种方法。

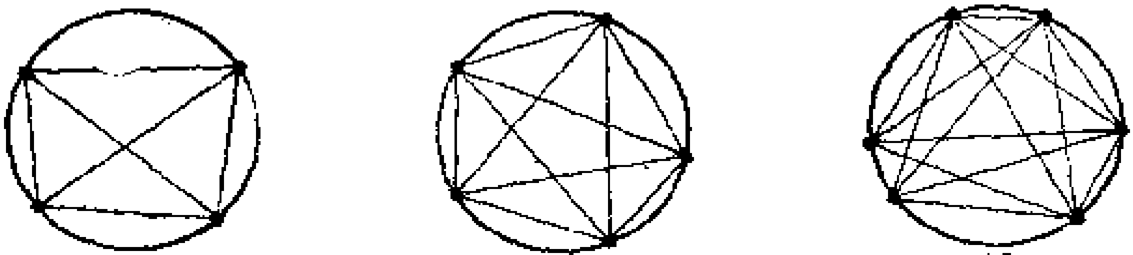
1.3.5. 在一个圆周上如此选定n个点，使得它们两两之间连以弦之后，任何三条弦之间除端点外不交于同一个点.问，这时共有多少个交点？

解 $n=4$，5，6的情况如图1.12所示。注意到每个(内)交点都是由圆周上给定的n个点中的4个点所决定并且它也反过来决定着圆周上的这4个点.（这4个点唯一地决定了两条弦在圆内相交的点).于是交点数等于$\binom{n}{4}$.

1.3.6. 给定一个正整数n，试求四个整数的有序组（a，b，c，d）（其中$0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant n$）的数目.

解 把问题明朗化的关键想法在于注意到我们的四元组与取自（0，1，…，$n+3$)的四元子集之间存在一一对应

关系．特别地，让（a，b，c，d），$0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant n$与子



1　　　5　　　15

图1.12

集｛a，$b+1$，$c+2$，$d+3$｝认作同一东西时，很容易看出这种对应是一对一的；集合中的每个元素，恰好对应着｛0，1，…，$n+3$｝的一个4元子集，反之亦然．于是要找的数即是$\binom{n+4}{4}$．

1.3.7．　5这个数可以写成3个自然数之和，如果计入不同的顺序，则有6种方式，即$5=1+1+3=1+3+1=3+1+1=1+2+2=2+1+2=2+2+1$．设$n$与$m$都是自然数，且$m\leqslant n$，问，$n$可以用多少种方式写为$m$个自然数之和（计入顺序）？

解　把n写成n个1的和：

$$n=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n}$$

我们要找的数字，就是在上式中的$n-1$个加号中挑选$m-1$种选数法，就是$\binom{n-1}{m-1}$．

问题

1.3.8．　证明$x^7-2x^5+10x^2-1$不具有大于1的根．（提

示：由于一般说来证明一个方程没有正根是比较容易的，这提醒我们考虑在作了代数替换$x=y+1$之后的等价的问题）.

1.3.9. 3这个数在计入顺序之后可以用4种方法表为一个或多个正整数之和，即3，1+2，2+1，和1+1+1。证明任一正整数n，可以有2^{n-1}种这样的表示法。

1.3.10. 当考虑顺序时，有多少种方法可以把10表示为5个非负的整数之和？（提示：找一个等价的问题，在这个问题里"5个非负的整数"这个短语换成了"5个正整数".）

1.3.11. 当a等于什么值时方程组

$$x^2=y^2,$$
$$(x-a)^2+y^2=1.$$

依次恰有0个、1个、2个、3个、4个解？（提示：把这个问题换成一个等价的几何问题）.

1.3.12. 给定排成一行的n个物件，这些物件的一个子集称为不相关的子集，即其中任何两个元素原先都不是前后相邻的。证明不相关的k元子集数等于$\binom{n-k+1}{k}$.（提示：采用相似于1.3.6中用过的想法）.

1.3.13. 以$a(n)$记正整数n在计入顺序时表为一些1与2之和的表示法的数目，以$b(n)$记把n表为大于1的整数之和的表示法的数目，这时，仍计入顺序并计入和数n.下列表格表明$a(4)=5$而$b(6)=5$：

a和	b和
1 + 1 + 2	4 + 2
1 + 2 + 1	3 + 3

2 + 1 + 1	2 + 4
2 + 2	2 + 2 + 2
1 + 1 + 1 + 1	6

(*a*) 用在"*a*和"与"*b*和"之间描述一种一一对应的办法，证明对每个*n*有$a(n)=b(n+2)$。

(*b*) 证明 $a(1)=1$，$a(2)=2$ 而对于$n>2$ 有 $a(n)=a(n-1)+a(n-2)$。

1.3.14. 用两种不同的办法来求一个三角形的面积，利用这个结果证明如果p_1，p_2，p_3是三角形的三个高而r是三角形的内切圆半径，则

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}=\frac{1}{r}.$$

1.3.15. 利用计数法证明，对于满足$0<r\leqslant n$的整数r和n，有

$$\binom{r}{r}+\binom{r+1}{r}+\binom{r+2}{r}+\cdots+\binom{n}{r}=\binom{n+1}{r+1}.$$

补充例题：

1.2.3，5.1.5，5.1.14，7.4.6，8.2.6，由于这种探索法的例子实在太多，所以很难区分出哪些是最典型的例子．值得注意的是1.9，1.10，1.11节中的间接证法，3.2节中的合同问题，6.8节中的极限问题．其它有关部分分式的例题（见1.3.1）有4.3.23，5.3.1，5.3.2，5.3.3，5.3.6，5.3.12，5.4.9，5.4.13，5.4.20，5.4.24，5.4.25．基于恒等式 $x=\exp(\log x)$ 的例题有 5.3.7(*c*)，6.3.3，6.7.1，6.7.4，6.7.5，6.7.7，6.9.5，7.4.1，7.4.2，7.4.9，7.4.20．

1.4 改变问题

在处理某问题A的过程中，我们可能会被引向考虑问题B.问题的这种转换，可以用如下短语来刻划："为此只须证明…"或者"我们可以假定…"或者"不失一般性…。"在上一节里，我们看到了一些例子，在那里A和B是等价的问题，也就是说，二者之中任何一个的解决即导致另一个的解决。在这一节里，我们来考虑这样一些情形，即问题B的解决可导致问题A的解决，但反之未必。

1.4.1. 给定正数a，b，c，d，证明

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}+\frac{b^3+c^3+d^3}{b+c+d}+\frac{c^3+d^3+a^3}{c+d+a}$$
$$+\frac{d^3+a^3+b^3}{d+a+b}\geqslant a^2+b^2+c^2+d^2.$$

证 由于问题具有对称性，只须证明，对于一切正数x、y与z

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{x+y+z}\geqslant\frac{x^2+y^2+z^2}{3}$$

因为如果这件事实成立，原先的不等式左边至少是

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3}+\frac{b^2+c^2+d^2}{3}+\frac{c^2+d^2+a^2}{3}+\frac{d^2+a^2+b^2}{3}$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2.$$

然而，为了证明后一个不等式，不失一般性可设$x+y+z=1$.因为如果不然，只须在不等式二边同除以$(x+y+z)^2$，并令$X=x/(x+y+z)$，$Y=y/(x+y+z)$及$Z=z/(x+y+z)$即可。

于是，原问题就化为下列修改了的问题：给定正数X、Y、Z，它们满足$X+Y+Z=1$，证明

$$X^3+Y^3+Z^3 \geqslant \frac{X^2+Y^2+Z^2}{3}.$$

（这个不等式的证明，见7.3.5.）

1.4.2. 设C是A和B之间的线段AB上的任何一点，并且在AB的同侧以AB、AC和CB为直径画三个半圆（图1.13），再设D为以AB为直径的半圆上的一点，使得CD垂直于AB．又设E和F依次是以AC和CB为直径的半圆上的点，使得EF是这两个半圆的公切线的一段．证明$ECFD$是一个矩形．

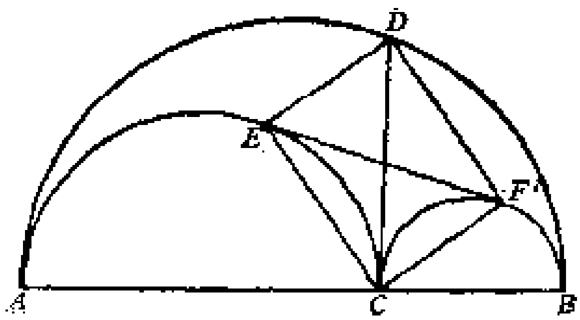


图1.13

证 注意到只须证明A、E和D是共直线的即可（同样的讨论即可证明B、F与D是共直线的）．因为如果证明了这一点，则$\angle AEC=90°$（E在半圆AEC上），$\angle ADB=90°$，$\angle CFB=90°$．于是结果成立．但实践表明，如果得不到一些进一步的启发，在这种求解过程中会遇到许多困难；它们使得我们难于避开把结论当作已知事实的错误．

获得关于在问题中各个参数间关系的启示的一个途径，是去注意当一个参数被允许作一些改变时将发生什么后果（问题的修改）．在这个问题中，让D沿圆周变动．用G和H（图1.14）依次表示线段AD与BD同以AC与CB为直径（并且以O和O'为圆心）的圆的交点．于是，$\angle AGC=\angle ADB$

$=\angle CHB=90°$；因此$GDHC$是一个矩形．此外，$\angle OGC=\angle OCG$（$\triangle OGC$是等腰的）而$\angle CGH=\angle GCD$，因为GH和CD是同一个矩形的二条对角线． 因此，$\angle OGH=\angle OCD$．可是，当D在圆周上运动使得CD垂直于AB时，$\angle OGH$将变为$90°$，因此GH与圆O相切而G与E重合．相似的论证表明，GH与圆O'相切，所以$H=F$．这就证明完了．（注意，“相似的论证”这个短语是另一种简化技巧，它出现在一个论证之后，具有放在论证前的“只须证明……”一样的效果．）

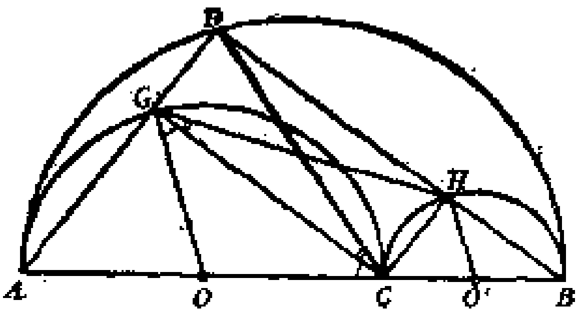


图1.14

注意，我们是用求解一个更为一般的问题的办法来解上述问题的．这是一种常见的解题技巧；我们将在1.12节中看到关于这种技巧的更多的例子．

1.4.3． 证明不存在正整数x，y，z使下式成立：

$$x^2+y^2+z^2=2xyz.$$

证 假定x，y和z是正整数，且成立$x^2+y^2+z^2=2xyz$．由于$x^2+y^2+z^2$是偶数$(=2xyz)$，所以，或者x、y和z中有两个是奇数而另一个为偶数，或者它们三个都是偶数．假定x，y，z都是偶数，则存在正整数x_1，y_1，z_1使得$x=2x_1$，$y=2y_1$，$z=2z_1$．由$(2x_1)^2+(2y_1)^2+(2z_1)^2=2(2x_1)(2y_1)(2z_1)$这个事实，可得$x_1$，$y_1$，$z_1$满足$x_1^2+y_1^2+z_1^2=2^2x_1y_1z_1$．再由这个等式出发可知，如果$x_1$，$y_1$，$z_1$都是偶数，则由类似的论证可得，必有正整数$x_2$，$y_2$，$z_2$使$x_2^2+y_2^2+z_2^2=2^3x_2y_2z_2$．

如此继续下去，到头来，我们必会达到一个形如$a^2+b^2+c^2=2^n abc$的等式，其中a，b，c不全是偶数（因而a,b,c中有两个是奇数，另一个为偶数）。

于是，我们便被引导着去考虑下列修改后的问题：证明不存在正整数x，y，z和n，其中x，y是奇数，使得

$$x^2+y^2+z^2=2^n xyz.$$

（这就是问题1.9.3.）

1.4.4. 计算$\int_0^\infty e^{-x^2}dx$.

解 用普通积分技巧是算不出这个积分的．为了算出这个积分，我们要把它变成一个重积分的计算问题．

令$I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx$，则

$$\begin{aligned}I^2&=\left[\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right]\left[\int_0^\infty e^{-y^2}dy\right]\\&=\int_0^\infty\left[\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right]e^{-y^2}dy\\&=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2}e^{-y^2}dxdy\\&=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy.\end{aligned}$$

现在引入极坐标把上式变为一个等价的积分，得

$$\begin{aligned}I^2&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-r^2}rdrd\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^\infty d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{1}{4}\pi.\end{aligned}$$

由此即知$I=\sqrt{\pi}/2$.

可以从许多途径引入修改了的(辅助性)问题．这种问题

可以用改变记号的办法得到（如在1.4.4.中那样；参见1.5节），或者利用对称性（如1.4.1，参见1.6节）。通常，这问题的得来是“反推”的结果（见1.8节）或者是归谬论证的结果（如1.4.3；参见1.9节）.此外，一开始便考虑一个更普遍的问题的作法也并不少见（如1.4.2；参见1.12节）。因此，我们看到把问题加以修改是一种很普遍的探索法。

1.5 选择有效的记号

在处理数学问题的头几步中的一步，是把问题用记号术语加以叙述．开始的时候，一切关键性的概念都应加以判明并给以标记．当发现了互相间的关系之后，就可以消除多余的记号。

1.5.1． 一个早晨，雪以一个常速率落下。一架扫雪机从上午8点钟开始工作，在上午9点，机器推行了2公里。到了上午10点，它推行了3公里。假定扫雪机每小时推开雪的体积是一个常数，试由此定出雪开始下的时间。

解 乍一看，很难设想在本问题中给足了回答问题的条件。我们引进下列记号：以t表示从天开始下雪起所经过的时间，并且以T表示扫雪机开始工作的时间（从$t=0$量起）。以$x(t)$表示扫雪机在时刻t所推进的距离(我们只对于$t\geqslant T$时的$x(t)$感兴趣），最后，以$h(t)$表示在t时刻雪的深度。

现在我们就可以把问题用记号术语表达出来了。雪以常速率下降这个事实，意味着深度以一个常速度增长，这就是说

$$\frac{dh}{dt}=c, \qquad c\text{是常数。}$$

两边求积分得

$$h(t)=ct+d, \quad c、d\text{是常数。}$$

因为$h(0)=0$，我们知道$d=0$，于是$h(t)=ct$。

扫雪机的推雪率是一个常数，意味着在任何时刻t机器推进的速率与雪的深度成反比（例如深度加一倍时，推进速率减一半），用记号表示时，即有对于$t\geqslant T$，

$$\frac{dx}{dt}=\frac{k}{h(t)}, \qquad k\text{是常数，}$$

$$=\frac{k}{Ct}=\frac{K}{t}, \qquad K=\frac{k}{C}\text{是常数，}$$

两边求积分，得

$$x(t)=K\ln t+C, \quad C\text{是常数。}$$

问题中给出了三个条件：当$t=T$时$x=0$，$t=T+1$时$x=2$，而$t=T+2$时$x=3$。由其中两个条件，我们可以算出K和C，而利用剩下的第三个条件，我们可以解出T来。最后可知（这里对于细节不感兴趣）

$$T=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618\text{小时}\approx 37\text{分零}5\text{秒。}$$

因而是从上午7:22:55开始下雪的。

1.5.2.

（a）如果n是一个正整数，使得$2n+1$是一个完全平方，证明$n+1$是两个相邻的完全平方之和。

（b）如果$3n+1$是一个完全平方，证明$n+1$是三个完全平方之和。

证 引进适当的记号，本题即化为简单的代数问题，对

于(a)，假定$2n+1=S^2$，S是个整数、由于S^2是一个奇数，所以S也是奇数，以t表示如此的整数，它使得$S=2t+1$，那么$(2n+1)=(2t+1)^2$，解出n来，得

$$n=\frac{(2t+1)^2-1}{2}=\frac{4t^2+4t}{2}=2t^2+2t,$$

于是

$$n+1=2t^2+2t+1=t^2+(t+1)^2.$$

(b) 假定$3n+1=S^2$，S是个整数.显然，S不会是3的倍数，因此$S=3t\pm1$，t是某个整数。于是$3n+1=(3t\pm1)^2$，因而

$$n=\frac{(3t\pm1)^2-1}{3}=\frac{9t^2\pm6t}{3}=3t^2\pm2t$$

因此

$$\begin{aligned}n+1&=3t^2\pm2t+1=2t^2+(t\pm1)^2\\&=t^2+t^2+(t\pm1)^2.\end{aligned}$$

1.5.3. 在三角形ABC中，$AB=AC$，D是BC的中点，E是由D向AC作垂线的垂足而F是DE的中点(图1.15)，证明，AF垂直于BE。

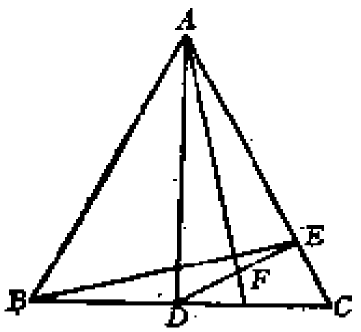


图1.15

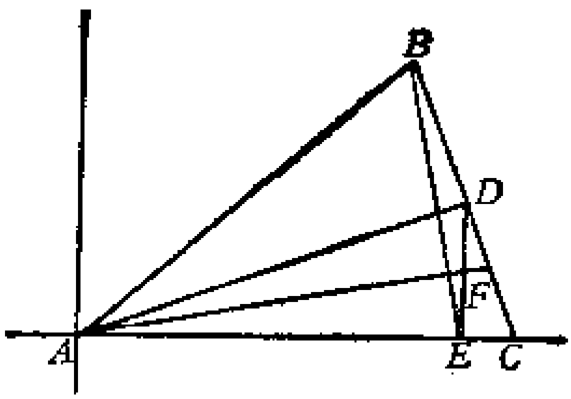


图1.16

证 我们可以给有关的点引入坐标并证明斜率m_{BE}与

m_{AF}互为负倒数，从而把问题转化成用代数语言叙述的问题。

这个办法是，把三角形取作如图1.15所示的样子，取D为原点$(0,\ 0)$，$A=(0,\ a)$，$B=(-b,\ 0)$而$C=(b,\ 0)$。这是一种自然的标记法，因为它用到了等腰三角形的两方对称性（见1.6节中的例题）。然而，在这个问题中，在找E和F的坐标时，这种标记法会引起一些小麻烦。

一种更好些的取坐标的办法是象图1.16中那样取$A=(0,\ 0)$，$B=(4a,\ 4b)$，$C=(4c,\ 0)$。于是$a^2+b^2=c^2$，$D=(2a+2c,\ 2b)$，$E=(2a+2c,\ 0)$而$F=(2a+2c,\ b)$（这里几乎不用计算，所有有关的点都有了坐标）。由此可得

$$m_{AF}\cdot m_{BE}=\left(\frac{b}{2(a+c)}\right)\left(\frac{4b}{4a-(2a+2c)}\right)$$

$$=\frac{b^2}{a^2-c^2}=-1.$$

于是证明完毕。

1.5.4. 设$-1<a_0<1$并且递归地定义

$$a_n=\left(\frac{1+a_{n-1}}{2}\right)^{\frac{1}{2}},\quad n>0.$$

令$A_n=4^n(1-a_n)$。问：当n趋于无穷大时A_n将如何？

解 显然，如把a_n用a_0表出，会得到含有一个套一个的一列根式，并且复杂得令人望而生畏，没有办法把它们化简成为一个有限的形式。

关键性的启示是，注意到存在着唯一的一个角θ，$0<\theta<\pi$，能使得$a_0=\cos\theta$，对于这个θ，

$$a_1=\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\cos\frac{\theta}{2}.$$

相似地，我们有

$$a_2=\left(\frac{1+\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\cos\frac{\theta}{4},\ \cdots,$$

$$a_n=\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right).$$

现在我们就能算出

$$A_n=4^n\left(1-\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right)$$

$$=\frac{4^n\left(1-\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right)\left(1+\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right)}{1+\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$$

$$=\frac{4^n\sin^2\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{1+\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$$

$$=\left(\frac{\theta^2}{1+\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}\right)\left(\frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{\left(\frac{\theta}{2^n}\right)^2}\right)$$

当n变大时，$\theta^2\Big/\left(1+\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right)$趋向于$\frac{\theta^2}{2}$而$\left((\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right)\Big/\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$趋向于1．（回忆：$x\to0$时$(\sin x)/x\to1$）．因而$A_n$当$n$趋向于无穷时收敛到$\frac{\theta^2}{2}$．

问题

1.5.5. 写出一个等式以表示下列命题：

(a) 每有4个人要吃奶酪饼，就有5个人要吃薄脆馅饼。

(*b*) 学生人数是教授人数的 6 倍。

1.5.6. 两根电杆顶端各向对方根部拉一根固定线。问两线交点距地面高度是多少？

1.5.7. 一张宽为 8 寸的纸，象图1.17那样折迭，使得纸的一个角的顶点位于对边上。试把折出的线，即L的长度表为角θ的一元函数。

1.5.8. 以P_1，P_2，…，P_{12}依次表示正十二边形的顶点。问：对角线P_1P_9，P_2P_{11}，P_4P_{12}交于一点么？

1.5.9. 对下列各题用代数方法求出答案。

(*a*) 一辆小汽车以每小时40公里的速度从A开到B，再以每小时60公里的速度从B返回A。问：这一去一回的全程中平均速度比每小时50公里大还是小？

(*b*) 给了你一杯咖啡和一杯奶油，每杯中含有等量的液体。从杯里舀出一勺奶油注入咖啡杯内，然后从咖啡杯内舀出一勺混合液注回奶油杯，问：咖啡杯中的奶油多还是奶油杯中的咖啡多？（这个问题有一个优美的、不用代数的解法，它的基础是我们观察到奶油杯中的咖啡必定挤走同样数量的奶油，而后者必定在咖啡杯里）。

(*c*) 设想地球是一只光滑的圆球，并且绕着赤道围了一条绳子。现在，假定把绳子加长 6米，新的长绳平缓地沿赤道形成一个距地面等距离的大圆，问：绳子与地球表面间的距离比 1 分米大还是小？

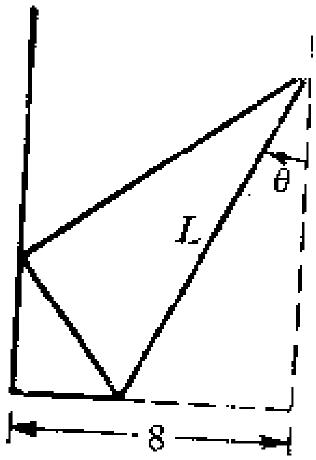


图1.17

1.5.10. 有一条著名的定理断言，一个素数$p>2$可以写成

两个完全平方之和（$p=m^2+n^2$，m与n是整数）的充要条件是p等于 4 的一个倍数加 1．假定这个结果是对的，证明

（a）每个等于 8 的倍数加 1 的素数可以写成x^2+16y^2的形式，x和y都是整数．

（b）每个等于 8 的倍数加 5 的素数可以写成$(2x+y)^2+4y^2$的形式，x和y都是整数．

补充例题

1.1.10，2.5.10，3.2.15，3.3.11，3.3.28，3.4.2，3.4.4，4.1.5，6.4.2，7.2.4，8.1.15，8.2.3，8.2.17，也可参看2.5节（递归关系），3.2节（模算术），3.4节（位置记号），8.3节（向量几何），8.4节（几何中的复数）．

1.6 利用对称性

在一个问题中存在对称性时，常可在求解过程中提供减少工作量的办法．例如，考虑乘积$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$．由于每个因式对于$a$、$b$、$c$都是对称的（即其中任何两个变量互换时表达式不变），所以整个乘积关于a、b、c也是对称的．结论是，如果乘积中出现了a^3，则b^3及c^3也必出现，与此相仿，如果a^2b出现在乘积中，则a^2c，b^2a，b^2c，c^2a，c^2b也必出现，并且它们每项的系数也相同，等等．通过对照即可得出，这个乘积有下列形状：

$$A(a^3+b^3+c^3)+B(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+C(abc).$$

易于验明$A=1$，$B=0$和$C=-3$．

1.6.1．在正方形$ABCD$内部构作等边三角形ABK，BCL，

CDM，DAN.证明：四条线段KL，LM，MN，NK的中点和八条线段AK，BK，BL，CL，CM，DM，DN，AN的中点是正十二边形的顶点.

证 在图1.18中，这12个顶点用大黑点标明；这些顶点中有两个记为a与b，见图.

利用图的对称性，只须证明$\angle bOK=15°$，$\angle aOb=30°$，和$|aO|=|bO|$.

注意到AN是BK的垂直二等分线的一部分，因此$|KN|=|NB|$.利用对称性可得MBN是一个等边三角形.记它的边长为s，而$\angle CBN=15°$.现在考虑三角形DBN；注意到Ob连接着DB的中点与DN的中点，所以Ob平行于BN，并且长度为BN的一半.于是$|Ob|=\frac{s}{2}$且$\angle bOK=15°$.由此易于验得$\angle aOb=\angle DOK-\angle bOK=45°-15°=30°$，且$|Oa|=|KN|/2=\frac{s}{2}$.

在一个对称性问题中，还能提供一种清晰的想象力，这种想象力常能使我们看到并发现用别的方法也许较难发现的关系.例如，单用对称性便可猜到xy在条件$x+y=1$，$x>0$，$y>0$之下的最大值应在$x=y=\frac{1}{2}$处达到.（x与y互相对称）.这是非充足理由推理的一个例子.这种推理法可简短地陈述如下"没有充分理由来作区分的场合，可能是没有区别的".那么，在本例中，由于没有理由指望最大值将出现在任何不同于$\frac{1}{2}$的x处，即x较靠近0或靠近1处；为了验证这一点，令$x=\frac{1}{2}+e$，则$y=\frac{1}{2}-e$，因此$xy=(\frac{1}{2}+e)$

$(\frac{1}{2}-e)=\frac{1}{4}-e^2$.在这个形式中，很明显，最大值当$e=0$时出现，也就是说在$x=y=\frac{1}{2}$时出现 .

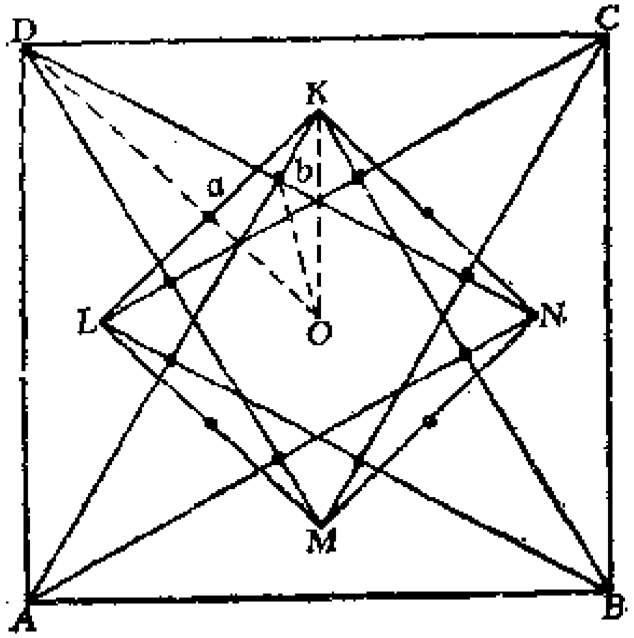


图1.18

下一个问题将提供这一原理的几个补充的例子。

1.6.2.

（a）在一切矩形中，哪些可以内接于一个已知圆，其中哪个面积最大？

（b）求一个三角形，它的三个内角的大小A、B、C能使$\sin A+\sin B+\sin C$取最大值.

（c）周长一定的一切三角形中，哪一个面积最大？

（d）体积为1的一切平行六面体中，哪一个的表面面积最小？

（e）能够内接于一个已知圆周的一切n边形中，哪一个面积最大？

解 （a）没有充足理由推理引导我们设想可内接于一个

圆的、具有最大面积的矩形是一个正方形（图1.19）．为了验证这一点，以x和y表示矩形的长和宽，并且，不失一般性可假定，适当选取单位之后，圆的直径等于1．我们希望在条件$x^2+y^2=1$之下求xy的最大值．这等价于在条件$x^2+y^2=1$之下求x^2y^2的最大值，而这与在本例之前已考虑过的是同一个问题；最大值在$x^2=y^2=\frac{1}{2}$处达到．这就是说，当矩形是一正方形时达到．

（b）注意到和式$\sin A+\sin B+\sin C$总是正数（因为每一项都是正的）并且当A任意接近180°时，这个和（数值上）可以任意小，因此当$A=B=C=60°$（即等边三角形）时$\sin A+\sin B+\sin C$最大．从2.4.1中的讨论，可以得到这点的证明．

类似地，我们可以认为（c），（d）和（e）的答案依次是一个等边三角形，一个立方体和一个正n边形，这些猜测的证明将在7.2.1，7.2.12和2.4.1中给出．

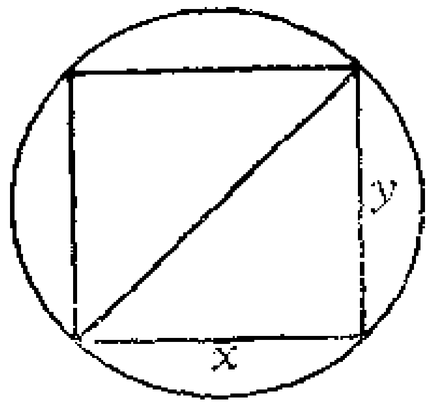


图1.19

1.6.3．计算$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+(\mathrm{tg}\,x)^{\sqrt{2}}}$．

解 这是一个不能用通常的积分技巧计算的问题；这就是说，被积函数没有原函数．然而，它是可以解决的，只要我们能够注意到被积函数关于点$\left(\frac{1}{4}\pi,\ \frac{1}{2}\right)$是对称的（图1.20）．为了说明这一点（它并不明显），记$f(x)=1/(1+(\mathrm{tg}\,x)^{\sqrt{2}})$时，只须证明对于一切满足$0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$的$x$，$f(x)+$

$f(\frac{\pi}{2}-x)=1$就行了。让我们来算一算：记$r=\sqrt{2}$，

$$f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x)=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^r(\frac{\pi}{2}-x)}+\frac{1}{1+\operatorname{tg}^r x}$$

$$=\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^r x}+\frac{1}{1+\operatorname{tg}^r x}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}^r x}{1+\operatorname{tg}^r x}+\frac{1}{1+\operatorname{tg}^r x}$$

$$=1.$$

由刚刚证明了的这个对称性可知，在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上曲线$f(x)$下方的面积等于矩形面积的一半（见图1.20），也就是说积分值等于$(\frac{\pi}{2})\Big/2=\frac{\pi}{4}$。

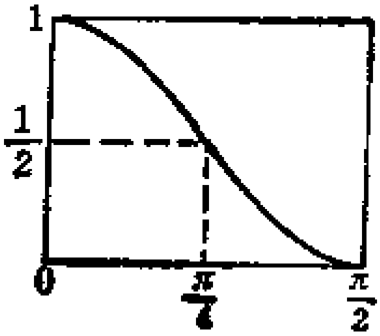


图1.20

另一个利用对称性的方法，在于挑选记号，下面是两个说明性的例子。

1.6.4. 设P是$y=f(x)$图形上的一点，f是一个三次多项式；设图形在P点的切线又同此图形交于Q点；以A表示曲线同线段PQ所围区域的面积。设B是另一区域的面积，此区域与上述区域的形成方法是一样的，只不过考虑的开始点是Q而不是P。问：A与B之间有什么关系？

解 我们知道，三次多项式的图形关于它的拐点是对称的（见8.2.17）。由于我们所感兴趣的面积不受坐标系选取的影响，我们可取拐点为坐标原点。于是，我们可以设三次函数的式子是

$$f(x)=ax^3+bx,\qquad a\neq 0.$$

（见图1.21）.

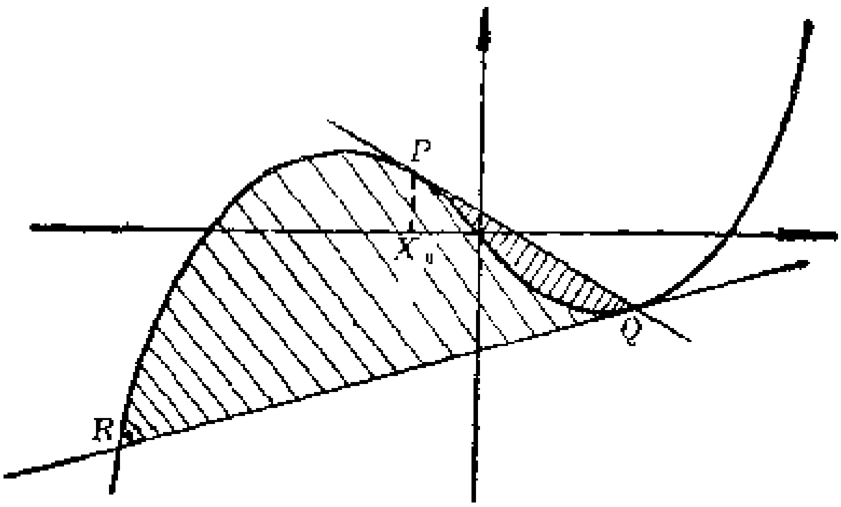


图1.21

假定x_0是P的横坐标，则Q的横坐标就是$-2x_0$.（我们不讨论这个直接计算的细节了.诚然,有一个很优美的办法能得出这个事实，但是它要用4.3节中的一些方法(见4.3.7)).

直接积分可见，面积A等于Kx_0^4,这里的K与x_0无关(计算细节在这里还是不讨论).

现在我们可以应用我们的上述结论于点P了.在Q点的切线将交曲线于R，它的横坐标显然是$-2(-2x_0)=4x_0$.而面积B则等于$K(-2x_0)^4=16Kx_0^4=16A$.

1.6.5. 定出满足

$$\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}(x+10^\circ)\operatorname{tg}(x+20^\circ)\operatorname{tg}(x+30^\circ)$$

的全部x的值来.

解 我们要利用一个简单的变量替换来引进对称性.设$y=x+15^\circ$，上式于是变为

$$\operatorname{tg}(y-15^\circ)=\operatorname{tg}(y-5^\circ)\operatorname{tg}(y+5^\circ)\operatorname{tg}(y+15^\circ).$$

这个式子等价于

$$\frac{\sin(y-15^\circ)\cos(y+15^\circ)}{\cos(y-15^\circ)\sin(y+15^\circ)}$$

$$=\frac{\sin(y-5^\circ)\sin(y+5^\circ)}{\cos(y-5^\circ)\cos(y+5^\circ)}.$$

利用恒等式

$$\sin A\cos B=\frac{1}{2}(\sin(A-B)+\sin(A+B)),$$

$$\sin A\sin B=\frac{1}{2}(\cos(A-B)-\cos(A+B)),$$

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}(\cos(A-B)+\cos(A+B)),$$

我们得

$$\frac{\sin(-30^\circ)+\sin 2y}{\sin(30^\circ)+\sin 2y}=\frac{\cos(-10^\circ)-\cos 2y}{\cos(-10^\circ)+\cos 2y},$$

简化后，得

$$\sin 4y=\cos 10^\circ$$

由此可知

$4y=80^\circ+360^\circ K$，$100^\circ+360^\circ K$，$K=0$，± 1，± 2，…

$x=5^\circ+90^\circ K$，$10^\circ+90^\circ K$，$K=0$，± 1，± 2，…

问题

1.6.6.

(a) 利用对称性展开乘积

$$(x^2y+y^2z+z^2x)(xy^2+yz^2+zx^2).$$

(b) 若$x+y+z=0$，证明

$$\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)\left(\frac{x^5+y^5+z^5}{5}\right)=\frac{x^7+y^7+z^7}{7}.$$

（以$z=-x-y$代入并应用二项式定理。另一种证法见4.3.9）.

1.6.7. 15枚分币摆成图1.22中展示的样子，分币的面上涂上黑色或白色。证明，存在着三个同色的分币，它们的中心是等边三角形的三个顶点。(这个问题有好几种利用对称性及"不失一般性"的论证途径)

1.6.8. 利用非充足理由原理，在条件$0<x_i<1$，$x_1+x_2+\cdots+x_n=1$之下求$x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2$何时取最小值．证明你的猜测（证明时可取$x_i=\frac{1}{n}+e_i$）.

1.6.9. 在等边三角形ABC内部取一点P，自P向三条边作垂线依次得垂足D, E与F，问P应位于何处才能使$PD+PE+PF$取值最大？P应在何处以使$PD+PE+PF$取值最小？证明你的答案。（提示：把图形关于它的一条边作一次反射会对你有帮助；当P平行于反射线移动时，$PD+PE+PF$将如何？）

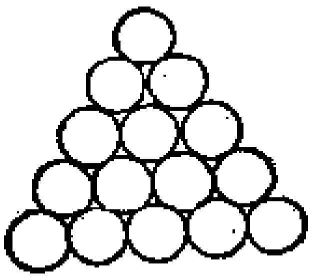


图1.22

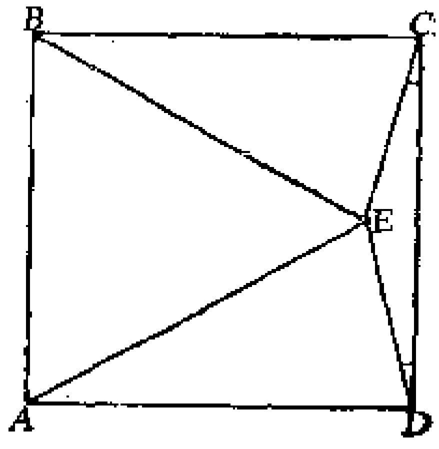


图1.23

1.6.10. 在图1.23中，$ABCD$是一个正方形，$\angle ECD=\angle EDC=15°$。证明三角形$AEB$是等边三角形。(解这个很美

的问题的关键在于利用中心对称性。具体说来，象在CD边上那样，在AB、BC和AD边上添加同样的15°角，并且利用非常相似于1.6.1中所构作的图解）。

1.6.11. 在由整数组成的等差级数中，相邻四项的乘积再加上公差的四次方总是一个完全平方。试利用带有对称性的记法来验证这个恒等式。

补充例题

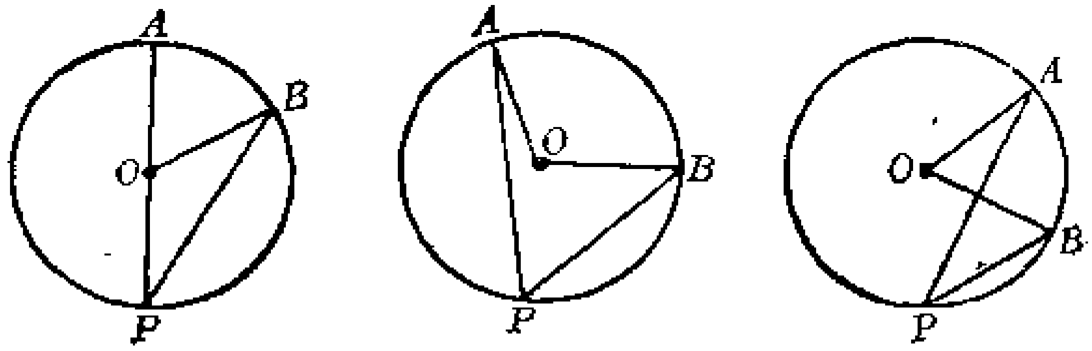
1.4.1，8.1.4，8.1.5，8.1.8，8.2.3。

1.7 区分种种情况

一个问题常可以分成一些为数不多的子问题，每个子问题可以逐个地加以解决，特别是当问题含有一个可以取一类值的量（"对于一切x…"）的时候，例如在证明形如"对于一切整数…"这样的命题的时候，可以分别讨论奇数与偶数两种情形。与此相似的是，一个关于三角形的命题，可以分成三个情形来证明，即锐角三角形、直角三角形和钝角三角形。有时碰巧了，所分成的子问题可以分阶段地安排成一些小目标，使得一旦证明了前面的情形，这些情形便可用来证明以后的步骤，这样的程序称作爬坡式程序。

作分析时的最初几步，宜于考虑一个问题怎样才能分成一些为数不多的（很可能）比较简单的子问题，在本节中的探索式方法，常常以下列形式给出："如果你不能解决这个问题，那么就找一个与之相关的比较简单的问题，并把它解出来。"

1.7.1. 证明圆周角等于对着同一弧的圆心角的一半。



1　　　　2　　　　3

图1.24

证　假定给了我们一个圆，其中心设为O，圆周角为APB，图1.24中画出了几个例子，我们要证明在一切情形下$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$。上面画出的三个图代表着三个本质上不同的情况。具体说来就是圆心O或者位于$\angle APB$之内（第2图），或位于$\angle APB$之外（第3图），或者在$\angle APB$的一条边上（第1图）。我们将用分别考虑这些情形中的每个情形的办法，来证明题述定理．

情形1　假定中心O在PA上，那么$\angle AOB=\angle OPB+\angle OBP$（外角等于内对角之和）$=2\angle OPB$（$\triangle OPB$是等腰的）$=2\angle APB$。于是结论成立。

情形2　如果O位于$\angle APB$的内部（第2图），延长PO交圆周于D。我们刚才已证明$2\angle APD=\angle AOD$和$2\angle DPB=2\angle DOB$。把这两个等式相加，即得所要证的结果。

情形3　如果O在$\angle APB$外面（第3图），延长PO交圆周于D。那么，利用情形1，有$2\angle DPB=\angle DOB$和$2\angle DPA=\angle DOA$。用第一个等式减第二个等式就得到所要的结果．于是全部证完。

1.7.2. 一个定义在有理数上的实值函数f，对一切有理数x和y，满足$f(x+y)=f(x)+f(y)$，证明对于一切有理数x，$f(x)=f(1)\cdot x$。

证 我们将分几步来证明。先对于正整数证明这个结果，然后对非正的整数证明，再对整数的倒数证明而最后对一切有理数证明。

情形1（正整数） 当$x=1$时，结论是成立的。$x=2$时，我们有$f(2)=f(1+1)=f(1)+f(1)=2f(1)$。对于$x=3$，$f(3)=f(2+1)=f(2)+f(1)=2f(1)+f(1)=3f(1)$。这个程序显然可以延续下去，使得对任何正整数$n$有$f(n)=nf(1)$。（正式的证明可以用数学归纳法给出——见第2章。）

情形2（非正的整数） 首先$f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$，两边同减$f(0)$便得$0=f(0)$；这就是说，$f(0)=0\cdot f(1)$。可是$0=f(0)=f(1+(-1))=f(1)+f(-1)$，由此可见$f(-1)=-f(1)$。与此相似，对任何正整数$n$，$f(n)+f(-n)=f(n+(-n))=f(0)=0$，因此$f(-n)=-nf(1)$。

情形3（倒数） 对于$x=\frac{1}{2}$，我们这样来证：$f(1)=f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2f\left(\frac{1}{2}\right)$。两边同除以2，即得$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}f(1)$。对于$x=\frac{1}{3}$，$f(1)=f\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)=3f\left(\frac{1}{3}\right)$，或$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}f(1)$。用相仿的办法可知，对任何正整数$n$，$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}f(1)$。对于$x=-\frac{1}{n}$，我们有$f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(-\frac{1}{n}\right)$

$=f\left(\frac{1}{n}+\left(-\frac{1}{n}\right)\right)=f(0)=0$，因此$f\left(-\frac{1}{n}\right)$ $=-\frac{1}{n}f(1)$。

情形 4（一切有理数）设n是一个整数，则$f\left(\frac{2}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n}\right)=2f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{2}{n}f(1)$。与此相仿，若$\frac{m}{n}$是任一有理数，其中$m$是一个正整数而$n$是一个整数，则

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=f(\underbrace{\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{m\text{项}})$$

$$=\underbrace{f\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{n}\right)}_{m\text{项}}$$

$$=mf\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{m}{n}f(1)\text{.}$$

这就完成了要证的结果——这是爬坡式推理的一个好例子。

1.7.3. 证明格点三角形（即平面上以格点为顶点的三角形）的面积$I+\frac{1}{2}B-1$，其中I与B依次表示三角形内部与边界上的格点数。

证 这是Pick定理（见2.3.1）的一个特例，它有几种巧妙的证法，每种证法都是把格点三角形集合分为几种特殊的类型。这样办的一个途径，是用边平行于坐标轴的矩形把格点三角形"箍"起来，使得矩形的至少一个顶点与三角形的

一个顶点重合。可以验证，每个格点三角形都可分入图1.25中画的几个互不等价类中的一类。

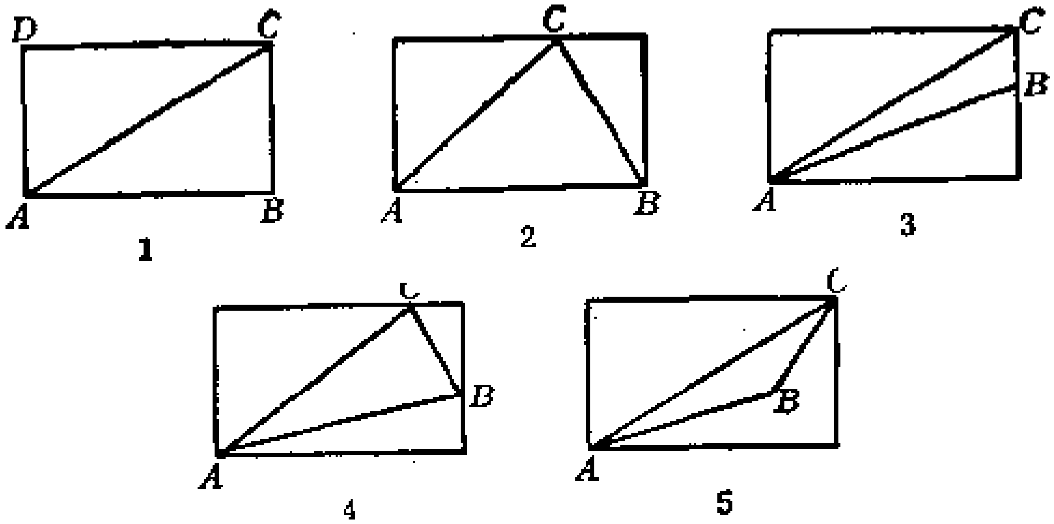


图1.25

组成第一类的是两条直角边平行于坐标轴的那些直角三角形。第二类包括那些一条底边平行于坐标轴的锐角三角形，这种三角形是第一类中的两个三角形之"和"。第三类中的是有一边平行于坐标轴的钝角三角形，它们都是第一类中的两个三角形之"差"。第四类与第五类包括那些各边都不与坐标轴平行的三角形。

本问题结论的证明构成一个爬坡式推理的图景。让我们从考虑第一类情形里的矩形$ABCD$开始。假定线段AB和CD依次含有a和b个格点，这里不计入它们的端点。那么，以I和B分别表示$ABCD$内部与边上的格点数时

$$I+\frac{1}{2}B-1=ab+\frac{1}{2}(2a+2b+4)-1$$

$$=ab+a+b+1$$

$$=ABCD\text{的面积}$$

现在假定AB、BC和AC分别含有a、b和c个格点，这里不计入它们的端点，并假定ABC含有i个内点，那么矩形$ABCD$有$2i+c$个内点，因而我们有（以I和B表示ABC的内部与边界上的格点）

$$\begin{aligned}I+\frac{1}{2}B-1&=i+\frac{1}{2}(a+b+c+3)-1\\&=\frac{1}{2}(2i+a+b+c+1)\\&=\frac{1}{2}\left[(2i+c)+\frac{1}{2}(2a+2b+4)-1\right]\\&=\frac{1}{2}ABCD\text{的面积}\\&=ABC\text{的面积}.\end{aligned}$$

其余情形可以类似处理；我们把细节留给读者完成。

问题

1.7.4.(三角形不等式)

(a) 证明：对一切实数x与y，有$|x+y|\leqslant|x|+|y|$.

(b) 证明：对一切实数x、y和z，有$|x-y|\leqslant|x-z|+|y-z|$

1.7.5. 求满足

$$\frac{3}{x-1}<\frac{2}{x+1}$$

的一切x的值.

1.7.6. 令$S=\{i(3,8)+j(4,-1)+k(5,4)|i,j,k$是整数$\}$，$T=\{m(1,5)+n(0,7)|m,n$是整数$\}$.证明$S=T$.（注：有序的整数偶相加和乘以整数时，按分量进行：$(s,t)+(s',t')=(s+s',t+t')$，$n(s,t)=(ns,nt)$）.

1.7.7. 定义在正有理数集上的一个实值函数f，对一切正有理数x与y满足$f(x+y)=f(x)f(y)$，证明，对于一切正有理数x有$f(x)=[f(1)]^x$。

1.7.8. 若对一切实的x和y有$F(x)F(y)-F(xy)=x+y$，试定出$F(x)$来。

补充例题

1.1.7，2.5.11$_c$，2.5.12，2.5.13，2.6.3，3.2.14，3.2.15，3.2.16，3.2.17，3.2.18，3.4.1，4.1.3，4.1.4，4.4.14，4.4.29，5.2.1，5.3.14$_c$，6.5.4，7.4.3，7.6.2，7.6.4，7.6.10，8.2.4.有一些可以化归讨论若干非常特殊情形的特别好的例子，它们是3.3.8，3.3.9，3.3.21，3.3.22，3.3.26.

1.8 反推

反推的含义是，假定结论成立，然后由结论引出推论一直达到某个已知的命题或达到一个容易证明的命题；在达到已给的或已知的命题之后，我们再把上述论证步骤逐步逆转进行推理，直至结论。

这个程式在高中代数及三角中是常见的。例如，求满足$2x+3=7$的一切实数x.我们的论证如下：假定x满足$2x+3=7$，那么在等式二边同减3并同除以2，便得$x=2$。由于在这个推导中每一步都是可逆的，我们的结论是：2就是满足$2x+3=7$的实数，而且它是唯一的有此性质的实数。

在常见的证明过程中，例如在上面这个例子中，通常并不把逆向的步骤明白地重写一遍，但是，判明哪个步骤可逆，哪

个不可逆是很重要的。例如，考虑等式$\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=2$，(这里和通常一样，平方根意味着正根)，把等式写成$\sqrt{x+1}=\sqrt{x-1}+2$，二边求平方得 $x+1=x-1+4\sqrt{x-1}+4$ 或$\sqrt{x-1}=-\frac{1}{2}$，再平方一次得，$x-1=\frac{1}{4}$或 $x=\frac{5}{4}$。我们的结论是，如果有一个 x能使$\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=2$，那么它必定是$\frac{5}{4}$。可是$\frac{5}{4}$并不满足原先的等式。发生这个结果的原因是上面的步骤并不都是可逆的。在这个例子中，我们有一步是从$\sqrt{x-1}=-\frac{1}{2}$到 $x-1=\frac{1}{4}$，这时如果把它逆回去，我们的论证将从 $x-1=\frac{1}{4}$推出$\sqrt{x-1}=\frac{1}{2}$。

1.8.1. 设α是一个固定的实数，$0<\alpha<\pi$，并且设

$$F(\theta)=\frac{\sin\theta+\sin(\theta+\alpha)}{\cos\theta-\cos(\theta+\alpha)},\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi-\alpha\ .$$

证明F是一个常数。(这是1.2.1中提出过的问题)

证 假定F是一个常数，则对一切 θ 有 $F(\theta)=F(0)$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi-\alpha$。这就是说

$$\frac{\sin\theta+\sin(\theta+\alpha)}{\cos\theta-\cos(\theta+\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\qquad(1)$$

$$[\sin\theta+\sin(\theta+\alpha)][1-\cos\alpha]$$
$$=\sin\alpha[\cos\theta-\cos(\theta+\alpha)]\qquad(2)$$

$$\sin\theta+\sin(\theta+\alpha)-\sin\theta\cos\alpha-\sin(\theta+\alpha)\cos\alpha$$
$$=\sin\alpha\cos\theta-\sin\alpha\cos(\theta+\alpha)\qquad(3)$$

$$\sin\theta+\sin(\theta+\alpha)-[\sin\theta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\theta]$$

$$-[\sin(\theta+\alpha)\cos\alpha-\sin\alpha\cos(\theta+\alpha)]=0 \quad (4)$$

$$\sin\theta+\sin(\theta+\alpha)-\sin(\theta+\alpha)-\sin(\theta+\alpha-\alpha)=0 \quad (5)$$

最后这个等式是个恒等式。为了证明本题，我们必须把这几步都逆转回去，唯一可能出问题的一步是从(2)到(1)；只要我们在从(2)到(1)的过程中不用零作除数，证明就没有问题了，可是因为 $0<\alpha<\pi$，所以 $(1-\cos\alpha)\neq 0$，由于 $0\leqslant\theta<\theta+\alpha\leqslant\pi$，所以$\cos\theta-\cos(\theta+\alpha)>0$，因此证明可以进行到底，换言之，从已知的恒等式(5)出发，我们能（通过步骤(4)，(3)，(2)，(1)）证明，对于一切θ，$0\leqslant\theta\leqslant\pi-\alpha$，$F(\theta)=\sin\alpha/(1-\cos\alpha)=$常数。

1.8.2. 如果a，b，c表示一个三角形的三边之长，证明

$$3(ab+bc+ca)\leqslant(a+b+c)^2\leqslant4(ab+bc+ca)$$

证 考虑左边的不等式。

$$3(ab+bc+ca)\leqslant(a+b+c)^2,$$

$$3(ab+bc+ca)\leqslant a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

$$ab+bc+ca\leqslant a^2+b^2+c^2$$

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\geqslant 0$$

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\geqslant 0$$

$$(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\geqslant 0$$

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant 0$$

最后这个不等式对于一切a、b、c的值都成立．现在考虑右边的不等式

$$(a+b+c)^2\leqslant4(ab+bc+ca),$$

$$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\leqslant4(ab+bc+ca)$$

$$a^2+b^2+c^2\leqslant 2(ab+bc+ca)$$

$$a^2+b^2+c^2\leqslant a(b+c)+b(a+c)+c(b+a)$$

最后这个不等式是对的，因为一个三角形的两边之和总是大于第三边的。这就是说$a^2\leqslant a(b+c)$，$b^2\leqslant b(a+c)$及$c^2\leqslant c(b+a)$。

上述论证过程的每一步都可逆，于是证明完毕。

1.8.3. 已知AOB是圆O的一条直径，BM是圆在B点的切线；CF是圆在E点的切线，它与BM相交于C；延长弦AE，与BM交于D。证明$BC=CD$。（见图1.26）。

证 假定$BC=CD$，则由于$BC=CE$（由C作圆的两条切线，切点为E与B时，这两段切线等长），所以有$CE=CD$。于是$\angle CED=\angle CDE$（等腰三角形的二底角相等）。这时，我们就被引向考虑图1.26中标出的几个角。

现在，由于$\triangle ABD$是个直角三角形，$\angle d$与$\angle a$互余，又，由于$\angle BEA$是一个直角（AOB是直径），所以$\angle e$与$\angle c$互余，因此$\angle a=\angle c$。但$\angle a=\angle c$是我们已知的，因为它们都对着圆O的同一个弧BE。

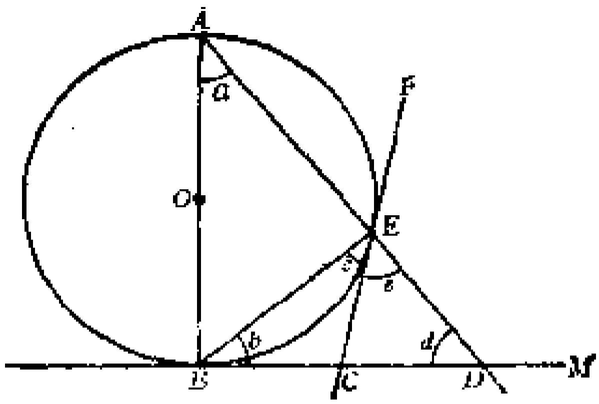


图1.26

于是，把步骤逆向推回去便可证完，那么（把推理略去），$\angle a=\angle c$，因而$\angle e=\angle d$。于是$CD=CE$，$CE=BC$，因而$BC=CD$。

1.8.4. 在有n（>1）个选手P_1，P_2，…，P_n参加的一次循环赛中，每个选手都同其它选手中的每一位比一次，规则是不许有平局。以W_r和L_r分别表示选手P_r获胜与失利的局

数，证明

$$\sum_{r=1}^{n} W_r^2 = \sum_{r=1}^{n} L_r^2.$$

证 假定 $\sum_{r=1}^{n} W_r^2 = \sum_{r=1}^{n} L_r^2$，则

$$\sum_{r=1}^{n} (W_r^2 - L_r^2) = 0$$

$$\sum_{r=1}^{n} (W_r - L_r)(W_r + L_r) = 0$$

但对于每个r都有$W_r + L_r = n-1$，所以，上式即

$$(n-1)\sum_{r=1}^{n} (W_r - L_r) = 0$$

$$\sum_{r=1}^{n} (W_r - L_r) = 0$$

$$\sum_{r=1}^{n} W_r = \sum_{r=1}^{n} L_r.$$

最后这个等式是成立的，因为n位选手总的获胜局数等于失利的总局数。把步骤反推回去即得证明。

问题

1.8.5.

(a) x和y是给定的正实数，证明

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leqslant \sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}.$$

(b) a和b是满足$a+b=1$的给定的正实数。证明

$$\frac{2}{\frac{a}{x}+\frac{b}{y}} \leqslant ax+by, \quad x>0, \ y>0.$$

1.8.6.

(a) 若a、b、c是正实数，且$a<b+c$，证明

$$\frac{a}{1+a}<\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}.$$

（b）若a、b、c是构成一个三角形的三条线段之长，证明，此时$\frac{1}{(a+c)}$，$\frac{1}{(b+c)}$，$\frac{1}{(a+b)}$也是可构成一个三角形的三边之长。

1.8.7. 两个圆外切于A，一条外公切线切它们于B和C。延长线段BA，交第二个圆于D。证明，CD是一条直径。

1.8.8. 考虑下列论证：假定θ满足

$$\operatorname{ctg}\theta+\operatorname{tg}3\theta=0$$

那么，由于

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

可得

$$\operatorname{ctg}\theta+\frac{\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}2\theta}{1-\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}2\theta}=0$$

$$\operatorname{ctg}\theta(1-\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}2\theta)+\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}2\theta=0$$

$$\operatorname{ctg}\theta-\operatorname{tg}2\theta+\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}2\theta=0$$

$$\operatorname{ctg}\theta+\operatorname{tg}\theta=0$$

$$1+\operatorname{tg}^2\theta=0$$

$$\operatorname{tg}^2\theta=-1$$

由于最后一个等式不可能成立，所以原来的方程不会有解。（我们不需要反向推导任何步骤，因为最后一步是推不出任何东西的）。可是$\theta=\frac{\pi}{4}$就满足$\operatorname{ctg}\theta+\operatorname{tg}3\theta=0$。问：在论证中哪步错了？

1.8.9. 用欧几里得工具（即直尺与圆规）在一个已知的三角形内画一个内接正方形，使得正方形的一边位于三角形的

一条已知边上.(提示：从正方形开始，作一个包围它而相似于已知三角形的三角形，然后利用相似图形对应边成比例的事实.)

补充例题

2.1.5，7.1.1，7.4.6，也可参看2.2节（归纳法）和3.5节（递归法）。

1.9 反证法

反证法的意思是，假设结论不真，由此导出一个接一个的推论，直至某个命题，它或者与所给的已知条件矛盾（间接证法），或者与已知为真的结论相矛盾（归谬证法），从而断言结论为真，比如，要证$\sqrt{2}$是个无理数，我们便可以假设它是有理数，然后导致一个矛盾．这种方法在结论易于作否定陈述、假设条件中只提供极少量可用的材料或者很少知道用什么方法直接推导的情形下，常宜于使用。

作为这种证法的一个简单的例子，我们来考虑调和级数是发散的证明过程：假定不然，不妨设调和级数收敛到r，那么

$$
\begin{aligned}
r &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots \\
&> \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\cdots \\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots \\
&= r.
\end{aligned}
$$

这是一个矛盾。于是得出级数发散的结论。

1.9.1. 已知a、b、c都是奇数，证明方程$ax^2+bx+c=0$不会有有理根。

证 假定p/q是一个有理根，其中p和q不全是偶数（这不失一般性）。我们先来证明p和q都不是偶数。因为，假定p是偶数，由$a(p/q)^2+b(p/q)+c=0$，我们知道有$ap^2+bpq+cq^2=0$。由于ap^2+bpq是偶数，cq^2必定是偶数，但这是不可能的，因为c和q都是奇数。当q是偶数时，我们也可以得到一个相类似的矛盾。因此p和q都是奇数并且$ap^2+bpq+cq^2=0$，但是最后这个等式说明了三个奇数的和等于零，这不可能。因此，原方程没有有理根。

考虑一下这个结果的另一个证明也有它的好处：我们知道$ax^2+bx+c=0$的根为有理数的充要条件是b^2-4ac是一个完全平方，因此可设$b^2-4ac=(2n+1)^2$，n是某个整数（由假设知b^2-4ac是奇数，因此如果它是完全平方，必定是奇数的平方）。把是4的倍数的各项合并得

$$b^2-1=4[n(n+1)+ac]$$

由于n和$n+1$中必有一个是偶数，$n(n+1)+ac$是奇数。因此上述等式右端可被4整除，但不能被8整除，但是左边能被8整除，因为$b^2-1=(b-1)(b+1)$，在$b-1$与$b+1$中有一个可被4整除而余下的一个则能被2整除，所以上面列出的等式是不可能成立的。这样我们便得到一个矛盾，（在这个证明中，我们是用观察两个数与8的倍数的关系，而不同于第一个证明中考虑2的倍数。在3.2节中，我们还将看到沿用这个想法而得到的更深入的矛盾）。

下面两节中有利用矛盾证法的补充说明。

问题

1.9.2. 在有2000人参加的晚会上，任何四个人中至少有一个人认识其余三个人，会上有三个人互不相识。证明其余的1997个人认识会上的每一个人（这里假定"认识"是一个对称关系，即A认识B，则B也认识A。问：如果认识不一定有这种对称性时，答案将如何？）

1.9.3. 证明：不存在正整数a、b、c和n使$a^2+b^2+c_2=2^nabc$.（由1.4.3，我们可假定a和b是奇数而c是偶数，等号两边与4有什么关系？）

1.9.4. 一个国家的每对市镇之间恰好有一种交通方式：公共汽车，火车或飞机。在这个国家里，这三种交通方式都存在；没有一个市镇同时拥有三种交通方式，并且任何三个市镇之间两两不用同一种交通方式相连接，四个市镇按上述规则可以如下连接：AB，BC，CD，DA用公共汽车，AC用火车，BD用飞机。

（a）给出一种论证，证明任何一个市镇都不可能用同一种交通方式连向三个不同的市镇。

（b）证明五个市镇之间不可能按上面要求的方式互相连接。

1.9.5. 设S是关于加法及乘法封闭的有理数集合，（即当a和b都是S的成员时，$a+b$和ab也是S的成员），并且有下列性质，即对每个有理数r，$r\in S$，$-r\in S$，$r=0$这三种情形恰有一种成立。

（a）证明0不属于S，

（b）证明一切正整数属于S．

（c）证明S是全体正有理数的集合。

补充例题

1.5.10, 1.6.7, 3.2.1, 3.2.6, 3.2.11, 3.2.13, 3.2.15, 3.2.17, 3.2.18, 3.3.4, 3.3.14, 3.4.2, 4.1.3, 4.4.6, 5.4.1, 也可参看1.10节（奇偶性）和1.11节（极端情形）.

1.10 利用奇偶性

奇偶性的思想，是求解问题的一个强有力而广泛应用的概念。在这一节中我们要考虑一些例子，然后在3.2节中推广这一思想.

1.10.1. 假定在三维欧氏空间中给定 9 个格点，证明在这些点两两之间所连线段上必有一个内点是格点.

证 格点坐标分量的奇偶配置，只有 8 个不同的花样，即（偶，偶，偶），（偶，偶，奇）…，（奇，奇，奇），由于这里共给定了 9 个格点，其中必有两个具有相同的奇偶花样，它们的中点便是一个格点。证毕.

1.10.2. 在 7 × 7 格的棋盘的每格上放一个马，问，此时，每个马能同时合乎国际象棋规则各走一步吗？

解 假定这个棋盘象通常棋盘那样，把各格黑白相间地涂上颜色，棋盘共有49格，假定其中24格是白的，25格是黑的.

考虑位于黑格内的25个马，如果它们每个都合乎规定地跳一步，那么它们必定都跳入共25个白格，但是只有24个白格可用，因此这样的走法是不能实现的.

1.10.3. 把一个马放在$4\times n$格的棋盘上，能否把它接连跳$4n$步，使得马跳遍棋盘上每一格并且回到最初位置？

解 在考虑这个问题以前，有趣的是对于 7×7 棋盘考虑同样的问题。假定想作这样一次"周游"，马第一步跳入与原位置不同颜色的一格，第二步则回到与原位置同色的一格，如此等等。于是看到，跳了奇数次之后，马跳入与原位置不同色的格。可是在 7×7 格棋盘上的一次周游，要跳49次，这是个奇数，因此马不可能回到原位置，所以周游是不可能的。

现在来考虑 $4\times n$ 棋盘。这时关于 7×7 棋盘的论证用不上了，因为 $4n$ 是偶数。为了解决这个问题，把 $4\times n$ 棋盘按图1.27所示的方式加以染色

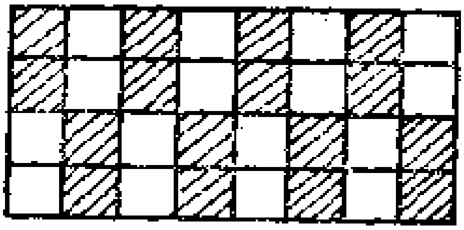


图1.27

注意到马从最上一行及最下一行的白格中起跳时，必落入第二与第三行中的白格，反之，在题目所要求的那种周游中，马从内两行必须跳回外两行的白格，这是因为在外两行上恰有 n 个白格，而想要达到这 n 个白格，只能从内两行的 n 个白格起跳才行。由此可见，马所走的路径中，永远不会有从白格跳入黑格的情形，所以这样的周游是不可能的。

1.10.4. 设 n 是一个大于1的奇数并设 A 是 $n\times n$ 的对称方阵，A 的每行和每列均为整数 $1,\cdots,n$ 的一个排列。证明，$1,\cdots,n$ 在 A 的主对角线上都出现。

证 由于 A 是对称的，所以主对角线以外的元素是成对出现的。由每个数恰在 A 中出现 n 次以及已知 n 是奇数，即可

推得结论 .

1.10.5. 设$a_1, a_2, \cdots, a_{2n+1}$是具有以下性质($P$)的整数集合：如将其中任一成员删去，可把余下的数分为具有相同和数的两个n元集合，证明，$a_1=a_2=\cdots=a_{2n+1}$.

证 首先观察到所有的整数$a_1, \cdots, a_{2n-1}$的奇偶性相同。为了证明这一点，只须注意到令$A=a_1+\cdots+a_{2n+1}$时，对每个i，$A-a_i$都是偶数（否则余下的数便不能分成所需的两部分了）。以a表示$a_1, \cdots, a_{2n+1}$中的最小数，且对每个i，令$b_i=a_i-a$，上述问题即等价于证明对一切i，$b_i=0$。可是$b_1, b_2\cdots, b_{2n-1}$满足性质(P)。由于其中有一个是0，所以每个b_i都必定是偶数。如果它们不全为0，令k为能使2^k整除每个b_i的最大正整数。对每个i，令$c_i=\frac{b_i}{2^k}$，那么c_1, $c_2\cdots, c_{2n+1}$也满足(P)，可是它们不全具有相同的奇偶性（因为其中有一个是0，而另有一个由k的选法可知是奇数）。因此一切b_i都是0，从而证完。

问题

1.10.6. (a) 在通常的 8 × 8 棋盘上，去掉左下角的一格与右上角的一格，问如此得到的盘能否被31块骨牌所复盖？（假定每块骨牌恰可复盖棋盘上相邻的两格）.

(b) 设在平面上给定了13个点$P_1, \cdots P_{13}$，假定它们之间联有线段P_1P_2, P_2P_3, $\cdots$, $P_{12}P_{13}$, $P_{13}P_1$，问，能否画一直线通过这些线段中每一条的内部.

1.10.7.

(a)能否沿着图1.28(a)的线画出一条路，它经过图中每条边恰好各一次？（提示，数一下从每个顶点发出的边

数。)

(b)能否沿着图1.28(b)的线画出一条路，它经过图中每个结点恰好各一次？（提示，交替地把顶点染色。）

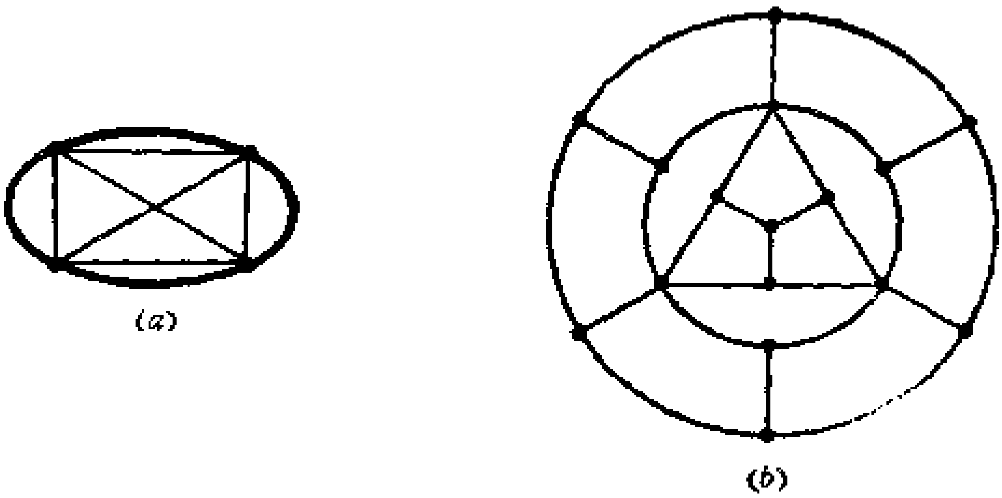
1.10.8. 以a_1，a_2，…，a_n表示数1，2，…，n的任一排列，证明，如果n是奇数，则乘积

$$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$$

是一个偶数。

1.10.9. 求出使得等式$(2^a-1)(2^b-1)=2^{2^c}+1$成立的一切非负整数a、b、c。(提示，把等式改写为等价形式$2^{a+b}-2^a=2^b+2^{2^c}$)。*

1.10.10. 证明当a是一个正整数时，方程$x^2-y^2=a^3$总有整数解。



1.28

---

*译者注：原题错为"证明，对一切非负整数a,b,c等式$(2^a-1)(2^b-1)=2^{2^c}+1$都不可能成立。"，但事实上，当$a=2$，$b=1$，$c=0$或$a=1$，$b=2$，$c=0$时等式可以成立。

补充例题

1.5.10，1.9.1，2.2.7，3.2.13，3.3.4，3.3.20，4.2.16(a)，4.3.4，7.4.6．关于这个方法的一种推广，见3.2节．

1.11 考虑极端情况

在探索问题的最初阶段，考虑让问题中的参数从一个极端值变到另一个极端值时所得到的推论常常是有益的。在本节中我们会看到，极端状态的存在常常是认识存在性结论（属于"证明有一个x它具有性质$P(x)$"这种类型的问题）的关键。

1.11.1． 给定平面上不全在一直线上的有限个点，证明有一条直线恰好经过其中两点．

证 若P是一个点而L是一条直线，以$d(P, L)$表示P到L的距离。以S表示正的距离$d(P, L)$的集合，其中P在题给点集中变化而L表示不通过P但至少通过题给点集中的两点的全体直线。集S是非空的、（因为所给的点不全在同一直线上）有限的。（题中只给了有限多个点，至少经过其中两点的直线数也是有限的。）因此，S有一个最小元素，记为$d(P, M)$．我们要证明M就恰好经过题给点集中的两个点．

假定M经过了题给点中的三个点，例如，经过的三点为P_1、P_2和P_3，以Q表示在M上距P最近的点，那么在点P_1，P_2，P_3中，至少有两个点，例如P_2与P_3位于Q点的同一侧（其中之一可以等于Q）（见图1.29）．适

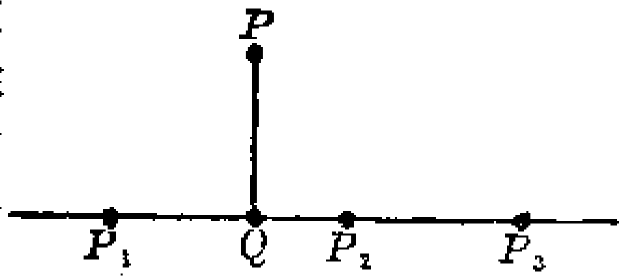


图1.29

当标号可设P_2距P较P_3为近。这时，令N为过P与P_3的直线并注意到$d(P_2, N)<d(P, M)$便得到一个与P和M的选法冲突的矛盾。于是可见，M只能经过题给点的两个点。

1.11.2. 设A是由平面上每三点都不共直线的$2n$个点组成的集合，假定其中n个染成了红色，另n个染成了蓝色。证明或否定下列命题：存在两两无公共点的n个闭线段，每条线段的两个端点分别是A中染有不同颜色的点。

证 如果我们不考虑线段是否相交，那么有若干种从n个红点及n个蓝点各取一点为端点连成直线段的配对方法。对于每种这样的配对所形成的图形，我们记下图中诸线段的总长，由于这种配对方法只有有限多种，所以这样得到的图形中必有如此一个，它所对应的线段总长最小。这个图形中的线段就没有公共点。（如果线段R_1B_1与R_2B_2相交，其中R_1、R_2表示红点，B_1、B_2表示蓝点，那么，我们把这两个线段改为R_1B_2与R_2B_1时，便可使新得图形线段总长缩短）。（另一解法见6.2.3）。

1.11.3. 在一次舞会上，男女青年双双起舞，但是任何一个男青年不都同每个女青年跳舞，而每个女青年则至少同一个男青年跳舞。证明，必定有这样两对舞伴bg与$b'g'$，其中b不同g'跳而g不同b'跳。

证 如果我们用矩阵的语言来说明，问题可能更容易了解些，虽然并不是非得这样做不可。以一个矩阵的各行对应于男青年，而列则对应于女青年。在b行g列处出现1或0分别意味着b与g跳舞和不跳舞，由任何一个男青年不都同每个女青年跳舞这个条件可得，(i)每行至少有一个0。与此相仿，我们有(ii)每列至少有一个1，我们希望证明有两行b与b'及

两列g与g'，在它们相交叉的位置处矩阵元素的配置，如下表那样：

$$\begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} \quad 或 \quad \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

以h表示任意一行。由(i)可知，在这一行里，例如在第k列处，有一个0，而由(ii)可知，在第k列上，例如在第m行处，有一个1：

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & & k & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ h \\ \\ m \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\ & \vdots & ? & \vdots & \\ \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} \end{array}$$

那么，如果有一列，它的第h行有一个1而第m行有一个0，我们的证明便完成了。一般说来，这样的一列可能并不存在。然而，如果把h进一步取作含有1的数目最多的一行时，这样的一列便必定存在，而问题即可解决了．

有了上述背景，我们便可以用不含矩阵解释的语言来重写我们的解答。设b是一个男青年，同他跳舞的女青年数最多。设g'是一个不同b跳舞的女青年，而b'则是g'的男舞伴，在b的舞伴中至少有一位女青年g不同b'跳舞（不然，b'将比b有更多舞伴）。如此的两对bg与$b'g'$便解答了我们的问题．

1.11.4. 证明接连的n个整数的乘积，总可以被$n!$整除．

证 首先我们注意到只要就n个接连的正整数来证明这个结果就可以了。因为如果这些整数中有一个是0，结果显

然是成立的。而如果所有的整数都是负的，则只须证明$n!$可以整除它们的乘积的绝对值 .

于是，假定有n个接连的正整数，它们的乘积不能被$n!$整除。在这样的n中取最小者，记为N。注意，$N>2$，因为两个接连的整数的乘积总是偶数。那么，我们假定有一个非负的整数m，能使$(m+1)(m+2)\cdots(m+N)$不被$N!$整除，在所有如此的m中，设M是最小的。注意，$M>0$，因为$N!$是可以被$N!$整除的。于是，我们假定$(M+1)(M+2)\cdots(M+N)$不能被$N!$整除。可是

$$\begin{aligned}&(M+1)(M+2)\cdots(M+N-1)(M+N)\\&=M[(M+1)(M+2)\cdots(M+N-1)]\\&\quad+N[(M+1)(M+2)\cdots(M+N-1)]\end{aligned}$$

由M的选法可知，$N!$整除$M[(M+1)(M+2)\cdots(M+N-1)]$，而由$N$的选法可知，$(N-1)!$整除$(M+1)(M+2)\cdots(M+N-1)$，从而可知$N!$整除$N[(M+1)(M+2)\cdots(M+N-1)]$。把这两点结合起来即可知，$N!$整除上述等式的左边。这同我们的假定相矛盾。这个矛盾就证明了我们的结论 .

（这个结果的一个简单的证明是看出$(m+1)(m+2)\cdots(m+n)/n!$等于二项式系数$\binom{m+n}{n}$，因此，当m是整数时，它就是整数.）

问题

1.11.5. 设$f(x)$是一个实系数多项式，并且对于每个实数x，$f(x)\geqslant 0$。证明对于一切实数x，$f(x)+f'(x)+\cdots+f^{(n)}(x)\geqslant 0$。（其中$f^{(k)}(x)$表示$f(x)$的第$k$阶导数）。

1.11.6. 给一个例子以说明1.11.1中的结论对于平面中无穷多个点的情形未必成立。1.11.1的证明中在哪一步对于无穷的情形没法用？

1.11.7. 证明存在一个有理数 $\frac{c}{d}$，其中 $d<100$，能使对于$k=1, 2, 3, \cdots, 99$成立

$$\left[k\frac{c}{d}\right]=\left[k\frac{73}{100}\right]$$

1.11.8. 设对于$n=1, 2, 3, \cdots$, P_n是命题. 又

(i) P_1是真的，并且

(ii) 如果对于每个正整数m，P_m是真的则P_{m+1}也是真的. 证明，P_n对于一切n都是真的.（提示：以S表示使P_n不真的全体整数的集合。假定S非空，以m表示S的最小元素 。）

补充例题

3.1.9，3.3.11，3.3.28，4.4.7，4.4.10以及6.3.7中给出的有关内容. 关于需要用到"类似极端"情形的例题，也可参看7.6节（两边夹出原理）和6.2节（中值定理）.

1.12 推广

看来似乎荒谬，可事实上当把一个问题推广了之后它常会变得更简单、更易处理和更好理解. 数学家们对于生活中的这个事实已经知之甚稔；实际上，抽象与推广是现代数学的基本特征. 一个更一般的提法是扬弃掉非本质的性质，而提供一些全新的解题方法 .

1.12.1. 求$\sum_{k=1}^{\infty}k^2/2^k$ 的和 .

解 我们将转换求和数$S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2x^k$，而后计算

$S\left(\frac{1}{2}\right)$. 引入变量 x 的理由是，这使我们可以利用微积分的技巧。我们知道

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \quad x \neq 1 .$$

两边求导数，得

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{(1-x)(-(n+1)x^n)+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

在这个等号两边同乘以 x，再求一次导数并把结果乘以 x，即得

$$S(x) = \sum_{k=1}^{n} k^2 x^k$$

$$= \frac{x(1+x)-x^{n+1}(nx-n-1)^2-x^{n+2}}{(1-x)^3},$$

于是得

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k} = 6 - \frac{1}{2^{n-2}}\left(\frac{1}{2}n-n-1\right)^2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= 6 - \left(\frac{n^2+4n+6}{2^n}\right).$$

1.12.2. 计算下列行列式（Vandermonde行列式）：

$$\det\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

解　我们假定 $a_i \neq a_j$，$i \neq j$，因为否则行列式等于 0，为了能更清楚地把注意力集中于主要思想，我们先来看 $n=3$ 的情形：

$$\det\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{pmatrix}.$$

在这个行列式中，用变量x代替c，则行列式成为一个二次多项式$P(x)$。此外，$P(a)=0$，$P(b)=0$.因为在相应的矩阵中分别以a或b代替c时，都有两行全同。因此

$$P(x)=A(x-a)(x-b)\ .$$

其中A是某个常数．可是A是x^2的系数，回到行列式，可见这个系数是

$$\det\begin{bmatrix}1 & a\\ 1 & b\end{bmatrix},$$

于是$A=b-a$。而原来的3×3行列式等于

$$P(c)=(b-a)[(c-a)(c-b)].$$

一般情形是类似的，以D_n表示要计算的（n阶）行列式，把矩阵的最下面一行中的a_n换成变量x，这样得到的矩阵的行列式是一个$n-1$次多项式$P_n(x)$，它在a_1，a_2，…，a_{n-1}处等于0。因此，由因式定理（见4.2节）知

$$P_n(x)=A(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1}).$$

其中A是一个常数．和前面一样，A是x^{n-1}的系数。把行列式按最下面一行展开，即可显见$A=D_{n-1}$，这就是说

$$D_n=P_n(a_n)=D_{n-1}[(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})],$$

对于D_{n-1}我们也可以重复这个论证法，等等。所以最终结果是：

$$D_n=\prod_{k=2}^{n}\left[\prod_{i=1}^{k-1}(a_k-a_i)\right].$$

1.12.3. 已知$\int_0^\infty(\sin x)/x\,dx=\frac{1}{2}\pi$，试计算

$\int_0^\infty (\sin^2 x)/x^2 dx$.

解 我们先用所谓求参数导数的技巧来计算更一般的积分

$$I(a)=\int_0^\infty \frac{\sin^2 ax}{x^2}dx, \qquad a\geqslant 0 .$$

在上面的等号二边对a求导数，我们得到

$$I'(a)=\int_0^\infty \frac{2\sin ax\cos ax\cdot x}{x^2}dx$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin 2ax}{x}dx$$

现在，令$y=2ax$得；$dy=2adx$，从而

$$I'(a)=\int_0^\infty \frac{\sin y}{y}dy \ =\frac{1}{2}\pi .$$

二边对a求积分，得

$$I(a)=\frac{1}{2}\pi a+C, \qquad C\text{是常数}.$$

由于$I(0)=0$，可得$C=0$，于是$I(a)=\frac{1}{2}\pi a$；$a\geqslant 0$. 令$a=1$即得$I(1)=\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\frac{1}{2}\pi$.（顺便说说，$\int_0 \frac{\sin x}{x}dx$的值可以用计算一个更一般的积分——沿复平面上一个回路的一个复值函数的积分——而得到。）

问题

1.12.4. 在二项展开式

$$(1+x)^n = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

（或它的各阶导数中的一个）之中，令x等于适当的值以计算下列各个和数 .

(a) $\sum\limits_{K=1}^{n} K^2\binom{n}{K}$, (b) $\sum\limits_{K=1}^{n} 3^K\binom{n}{K}$,

(c) $\sum\limits_{K=1}^{n}\frac{1}{K+1}\binom{n}{K}$, (d) $\sum\limits_{K=1}^{n}(2K+1)\binom{n}{K}$.

1.12.5. 计算

$$det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{pmatrix}$$

(把d换为变数x，利用四次方程中x^3的系数的负值等于它的各根之和这个事实（见4.3节））.

1.12.6.

(a) 计算$\int_0^\infty (e^{-x}\sin x)/x\ dx$

（考虑$G(k)=\int_0^\infty (e^{-x}\sin kx)/x\ dx$并利用对参数求导数）

(b) 计算$\int_0^1 (x-1)/\ln x\ dx$

（考虑$H(m)=\int_0^1 (x^m-1)/\ln x\ dx$，并利用对参数求导数）.

(c) 计算$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(\pi x)-\operatorname{arctg} x}{x}dx$.

（考虑$F(a)=\int_0^\infty (\operatorname{arctg}(ax)-\operatorname{arctg} x)/x\ dx$，并利用对参数求导数）.

1.12.7. $\sqrt[3]{60}$与$2+\sqrt[3]{7}$哪个比较大？（把每个数求立方得到的结果更复杂，不易解决，故而考虑一个更一般的问题：$\sqrt[3]{4(x+y)}$与$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}$哪个更大？其中，x、$y\geqslant 0$，取

$x=a^3$, $y=b^3$)。

补充例题

1.4.2, 2.2.6, 2.2.7, 4.1.4, 5.1.3, 5.1.4, 5.1.9, 5.1.11, 5.4.4, 5.4.5, 5.4.6, 5.4.7, 6.9.2, 7.4.4, 也可参看2.4节（归纳与推广）。

第二章　归纳法原则与抽屉原则

数学命题有两个形式：普适性命题，它陈述对于某特定集合内的一切x的值都成立的某件事情；存在性命题，它陈述对于某特定集合内的某个x的值为成立的某件事情。前一类型可表述为“对于(在一个集合S内的)一切x都有$P(x)$”，后一类型可表述为“(在集合S内)存在一个x，使得$P(x)$”。这里$P(x)$是关于x的一个命题。在本章内，我们将考虑处理这两种命题的两个重要方法：(i)处理普适性命题的数学归纳法原则；(ii)处理存在性命题的抽屉原则。

2.1　建立在$P(k)$上的归纳法

设a是一个整数而对于每个$n\geqslant a$，$P(n)$是关于n的一个命题（补题），数学归纳法原则可陈述如下：

如果

(i)$P(a)$为真，并且

(ii)对于每个$k\geqslant a$，$P(k)$为真蕴涵$P(k+1)$为真，则$P(n)$对于一切整数$n\geqslant a$为真。

注意，这个原则用了两个简单的步骤，便使我们能够证明无穷多个命题，（亦即，对于一切整数$n\geqslant a$，$P(n)$为真）。

当对于前几个特殊的情形（$P(a)$，$P(a+1)$，$P(a+2)$，…）已建立了一个图景之后，这个方法用起来特别便当（见1.1节"寻求一种数学模型"）。

在这一节里，我们考虑这样的归纳论证：在第(ii)步中，直接由$P(k)$之为真过渡到$P(k+1)$为真——也就是说$P(k+1)$之为真是"被建立在"$P(k)$为真的先一步考虑的基础上的。这同由考虑$P(k+1)$开始的论证法（在下一节中考虑）略为不同。

2.1.1. 用数学归纳法证明二项式定理

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i},\ n\text{是一个正整数}.$$

证 容易验明$n=1$时结论成立。

假设结论对于整数k成立，（我们要以$P(k)$为真作基础），两边同乘以$(a+b)$，得

$$(a+b)^k(a+b)=\left[\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^i b^{k-i}\right](a+b)$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{i+1}b^{k-i}+\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^i b^{k+1-i}$$

在第一个和式中，作变数替换$j=i+1$，得

$$=\sum_{j=1}^{k+1}\binom{k}{j-1}a^j b^{k+1-j}+\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^i b^{k+1-i}$$

$$=\left[\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j-1}a^j b^{k+1-j}+a^{k+1}\right]+\left[\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}a^i b^{k+1-i}+b^{k+1}\right]$$

$$=a^{k+1}+\sum_{i=1}^{k}\left[\binom{k}{i-1}+\binom{k}{i}\right]a^i b^{k+1-i}+b^{k+1}$$

$$=a^{k+1}+\sum_{i=1}^{k}\binom{k+1}{i}a^ib^{k+1-i}+b^{k+1}$$

$$=\sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}a^ib^{k+1-i}.$$

这里我们用了基本恒等式$\binom{k}{i-1}+\binom{k}{i}=\binom{k+1}{i}$（见2.5.2）．这便是$P(k+1)$的形式．因此，由归纳法证明已完成．

2.1.2. 设$0<a_1<a_2<\cdots<a_n$并设$e_i=\pm1$，证明当e_i跑遍2^n个可能的符号组合时，$\sum_{i=1}^{n}e_ia_i$至少可取到$\binom{n+1}{2}$个不同的值．*

证　当$n=1$时，恰有2个不同的值（a_1和$-a_1$），而$\binom{2}{2}=1$，因此结论成立．

假定当$n=k$时结论为真，即$\sum_{i=1}^{k}e_ia_i$　至少取$\binom{k+1}{2}$个不同的值，假定又给定了另一元素a_{k+1}，$a_{k+1}>a_k$．我们必须证明我们能够产生$\binom{k+2}{2}$个不同的和数．设由$a_1,\cdots,a_k$所产生的至少$\binom{k+1}{2}$个不同的和数已按从小到大的顺序排好．由题设条件可知，其中$-(a_1+\cdots+a_k)$最小而$(a_1+\cdots+a_k)$最大．把它们每一个都加以a_{k+1}，我们便得到由a_1，$\cdots$，a_k，a_{k+1}所产生的和数中的至少$\binom{k+1}{2}$个不同的和数．另外，在由a_1，$\cdots$，a_k所产生的和数中有$-(a_1+\cdots+a_k)$，$-(-a_1+a_2+\cdots+a_k)$，$-(a_1-a_2+a_3+\cdots+a_k)$，$\cdots$，$-(a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}-a_k)$等共$k+1$个互不相等的和数．把它们分别减去$a_{k+1}$，就得到由$a_1,\cdots,a_{k+1}$产生的$k+1$个不

---

*译者注：原文有误，已作订正

同的和数，它们与上述至少$\binom{k+1}{2}$个不同的和数必定互不相等，因为这$k+1$个和数中最大的$-(a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}-a_k)-a_{k-1}$比前述$\binom{k+1}{2}$个不同的和数中的最小数$-(a_1+\cdots+a_k)+a_{k+1}$要小，但$\binom{k+1}{2}+(k+1)=\binom{k+2}{2}$。由归纳法即知，在$n$为任何正整数时，结论为真．

数学归纳法是一种可试用于任何形如"证明对一切$n\geqslant a$，$P(n)$成立"的问题的方法。启发我们用这种方法的提示，常常仅由有一个参数n出现而发出。但须注意的是，归纳法也可应用于其它许多问题，其对象是取自更为一般的集合。例如，一个关于全体多项式的命题，可能用关于多项式的次数作归纳而得证。一个关于矩阵的定理可用关于矩阵的行数与列数施行归纳法而得证。在符号逻辑中一些关于命题的结果则是由对于命题中的逻辑关系的个数作归纳而得出。这种不是常见的"归纳集合"的一系列方法可以不断地增多，这里，我们仅给出两个例子；其余的例子则参阅本书全书（例如可参看以下四节以及在"补充例题"中所列的例题）。

2.1.3．如果V、E和F依次表示一个连通的平面地图中的顶点、边和面的数目．那么

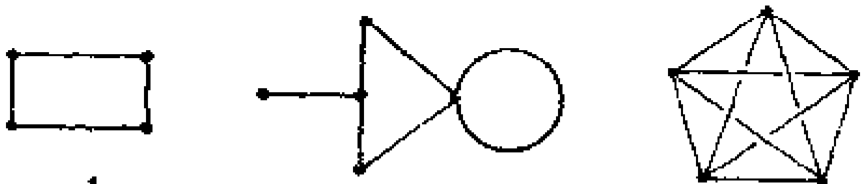
$$V-E+F=2$$

解　大家对于这个问题里的术语都可能直观地理解。但是为了更确切起见，下面给出它们的定义．

一个网络是指（平面或空间中的）一个由有限（不等于0）条边组成的一个图，各边之间除端点有可能公共外没有交点。弧的端点称为网络的顶点。网络中的一条路是如此

的一串两两不同的弧，可以连续地沿着它们走下去而其中任何一个弧都不会被重复走过。一个网络称为连通的，即它的任何两个不同的顶点之间都连有这网络中的一条路。一个地图是指含于某曲面内的一个网络。如果这曲面是一个平面，则这个地图便称为一个平面地图。平面地图中的边，称为边。平面地图的面是由其（由边组成的）边界所界定的区域 。

图 2—1 画出了三个连通网络的例子，前两个是平面地图．对于第一个地图，$V=4$，$E=4$，$F=2$；在第二个地图中，$V=5$，$E=6$，$F=3$．第三个网络不是平面地图．然而如果我们把它压平到一个平面内，并且把交点处都安上一个顶点，我们就会有$V=10$，$E=20$，$F=12$ ．



1　　2　　3

图　2.1

现在回过来考虑定理．这个结果的证明关键，在于认清连通的平面地图可以从单独的一个点出发，经过下面一系列的构作法而构成（每步构作都保持地图的连通性）：

（i）给一个已有的边添加一个顶点 ．

（ii）给一个顶点添加一条从这点发出又返回这点的边（例如・变作○）．

（iii）在已有的两个顶点之间添加一条边．（例如，⊐变作□）

（iv）对已有的一个顶点，添加一条边及一个顶点．（例如・变作•—）．

我们要对于构作一个平面地图所需的步骤数进行归纳．如果网络由单独的一个点构成，那么$V=1$，$F=1, E=0$，从而$V-E+F=2$．

假定对于需用k步可构成的平面地图，结论已成立，那么，每一步骤所发生的纯变化如下表所示：

构　作　手　续	ΔV	ΔE	ΔF	$\Delta(V-E+F)$
(i)	+1	+1	0	0
(ii)	0	+1	+1	0
(iii)	0	+1	+1	0
(iv)	+1	+1	0	0

由于进行了第$k+1$步时，量$V-E+F$保持不变，于是由归纳法证明完成．

2.1.4．给定一个正整数n和一个实数x，证明

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]$$

$=[nx]$．

证　虽然在这个问题里有一个整数参数n，我们还不能对于一个固定的x关于n用归纳法．当然，更不能对x作归纳法，因为x是在实数范围内变动的（对于一个给定的实数x，不存在紧挨着它而比它大的实数y）．因此对这个问题是不能用归纳法的．

处理这个问题的想法是，对于子区间$\left[\frac{k}{n}, \frac{(k+1)}{n}\right)$，$k=0, \pm1, \pm2, \cdots$中的一切$x$来证明上述结论．

首先假定 x 属于子区间 $[0, \frac{1}{n})$，这时对于 $i=0, 1, \cdots, n-1$，$[x+\frac{i}{n}]=0$，因此 $\sum_{i=0}^{n-1}[x+\frac{i}{n}]=0$。$[nx]$ 也等于 0。所以在"第 1 个"子区间中结论为真。

现在，假定结论在区间 $[\frac{(k-1)}{n}, \frac{k}{n})$ 内成立，其中 k 是一个正整数，而 x 是此区间内的任何实数。即这时有

$$[x]+[x+\frac{1}{n}]+[x+\frac{2}{n}]+\cdots+[x+\frac{n-1}{n}]$$
$$=[nx]$$

给 x 加 $\frac{1}{n}$（这样便得到在 $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$ 内的任意一个数），这样上式等号左边各项中除最后一项以外都向右"移动"了一项，而最后一项 $[x+\frac{n-1}{n}]$ 则变为 $[x+1]$，它比 $[x]$ 多 1，因此把 x 换为 $x+\frac{1}{n}$ 时，上述等式左边增加了 1。

与此同时，当 $[nx]$ 中的 x 换成 $x+\frac{1}{n}$ 时，它的值也增加了 1，由于等式两边当 x 换成 $x+\frac{1}{n}$ 时都增加 1，所以当 x 属于 $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$ 时，结论仍然成立。

由归纳法，本题的结论对于一切正的 x 都成立，相仿可证，本结论对于一切负的 x 都成立。（把 x 换成 $x-\frac{1}{n}$）。

下一个例题是怎样由 $P(k)$ "造" $P(k+1)$ 的一个好的说明。

2.1.5. 若 $a>0$ 且 $b>0$，则 $(n-1)a^n+b^n \geqslant na^{n-1}b$，$n$ 是

一个正整数，当且仅当$a=b$时取等号．

证　$n=1$时结论为真．假定对于整数k结论为真．为了建造$P(k+1)$，并得到适当的左边，我们必须

(i) 乘以a，得

$$(k-1)a^{k+1}+b^ka\geqslant ka^kb,$$

(ii) 加a^{k+1}，得

$$ka^{k+1}+b^ka\geqslant ka^kb+a^{k+1},$$

(iii) 减b^ka，得

$$ka^{k+1}\geqslant ka^kb+a^{k+1}-b^ka\ .$$

(iv) 加b^{k+1}，得

$$ka^{k+1}+b^{k+1}\geqslant ka^kb+a^{k+1}-b^ka+b^{k+1}$$

由归纳假定我们知道，这个不等式成为等式的充要条件是$a=b$．剩下只须证明$ka^kb+a^{k+1}-b^ka+b^{k+1}\geqslant(k+1)a^kb$，且等号当且仅当$a=b$时成立．为此，我们来反推：

$$ka^kb+a^{k+1}-b^ka+b^{k+1}\geqslant(k+1)a^kb,$$

$$-a^kb+a^{k+1}-b^ka+b^{k+1}\geqslant 0,$$

$$a^k(a-b)+b^k(b-a)\geqslant 0,$$

$$(a^k-b^k)(a-b)\geqslant 0\ .$$

而最后的不等式是对的($a-b$与a^k-b^k同号)，并且，当且仅当$a=b$时等式成立．因此由归纳法即得证．（注意：这个结论是算术平均——几何平均不等式的一个特殊情形；见7.2节）．

问题

2.1.6.

(a) 用归纳法证明$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$．

(b) 用归纳法证明 $2!4!\cdots(2n)! \geqslant ((n+1)!)^n$ 。

2.1.7. 划有限条直线把欧氏平面分成一些区域。证明：可以把这些区域染成红色或蓝色使得任何二块相邻的区域颜色不相同 。

2.1.8. 证明方程式 $x^2+y^2=z^n$ 对于一切 $n=1,2,3,\cdots$ 都有正整数解组（x、y、z），（一个好的证明法是，分 n 为奇数及 n 为偶数两个情形。又，3.5.1中有这个问题的一个非归纳法证明） 。

2.1.9. n 个人进行一次循环赛，每局的结果不是胜便是负。证明，给选手编上号：$P_1,P_2,P_3,\cdots,P_n$，使得 P_1 胜 P_2，P_2 胜 $P_3\cdots$，P_{n-1} 胜 P_n 。

2.1.10. 共有 n 个人，其中每个人都是人群中至少一半人的朋友，那么一定可以排一圈座位，使大家就坐，且使得每人的左右邻座都恰是此人的朋友 。

2.1.11. 下列步骤给出二项式定理的另一证明。我们知道，$(a+x)^n$ 可以写成一个 n 次多项式，因此有常数 A_0，A_1，$\cdots$，A_n 使得

$$(a+x)^n=A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots+A_nx^n\ .$$

(a) 用归纳法描述等式每边求 k 次导数后所得到的等式 。

(b) 对于 $k=0，1，2\cdots，n$，在(a)中求到的 k 次方程中令 $x=0$ 以算出 A_K 。

2.1.12. 假定 $f:R\to R$ 是一个函数，它满足：对于一切 x 有 $f(2x-f(x))=x$。又，令 r 为一固定的实数 。

(a) 证明，若 $f(x)=x+r$，则对于一切正整数 n，$f(x-nr)=(x-nr)+r$ 。

(b) 证明，如果f是一对一的函数（即由$f(x)=f(y)$可推出$x=y$）。则(a)中的性质对于一切整数n也成立．

补充例题

1.1.2，1.1.8，3.2.8，6.5.13，7.1.4．

2.2 归纳法：建立$P(k+1)$

在本节中，我们考虑这样的归纳论证法，它首先对$P(k+1)$发起直接攻势，在这个过程中进行反推以利用关于$P(k)$为真的归纳假定．从理论上讲，本节的论证法全都可以改写成前一节的形式，反过来也一样．但是从实用的观点看来，常常是采用这种形式比用另一种形式要方便得多．

2.2.1．证明：对于$n=0,1,2,\cdots$，$\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}$都是整数．

证　当$n=0$时，结论显然为真．假定$n=k$时结论成立，需要我们证明的是

$$\frac{(k+1)^5}{5}+\frac{(k+1)^4}{2}+\frac{(k+1)^3}{3}-\frac{(k+1)}{30}$$

是一个整数．展开每项的分子，得

$$\frac{k^5+5k^4+10k^3+10k^2+5k+1}{5}+\frac{k^4+4k^3+6k^2+4k+1}{2}$$
$$+\frac{k^3+3k^2+3k+1}{3}-\frac{k+1}{30},$$

接着（为了利用$P(k)$）重新组合得

$$\left[\frac{k^5}{5}+\frac{k^4}{2}+\frac{k^3}{3}-\frac{k}{30}\right]+\left[(k^4+2k^3+2k^2+k)+(2k^3\right.$$
$$\left.+3k^2+2k)+(k^2+k)+1\right].$$

由归纳假定可知第一个括号内是一个整数，第二个括号内也是整数，因为它是一些整数的和，因此由归纳法即得证（请注意，如果由$P(k)$出发的话，到达$P(k+1)$将相当困难）。

2.2.2. 设a、b、p_1、p_2、…、p_n都是实数，$a\neq b$，定义$f(x)=(p_1-x)(p_2-x)(p_3-x)\cdots(p_n-x)$。证明

$$
\det\begin{pmatrix}
p_1 & a & a & a & \cdots & a & a\\
b & p_2 & a & a & \cdots & a & a\\
b & b & p_3 & a & \cdots & a & a\\
b & b & b & p_4 & \cdots & a & a\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
b & b & b & b & \cdots & p_{n-1} & a\\
b & b & b & b & \cdots & b & p_n
\end{pmatrix}=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}.
$$

证 和许多行列式问题相似，这个问题也可以用数学归纳法处理。当$n=1$时，我们有$f(x)=p_1-x$，$\det(p_1)=p_1$，而

$$\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}=\frac{b(p_1-a)-a(p_1-b)}{b-a}=p_1.$$

因此结论成立。

假定结论对于$k-1$成立，$k>1$，而考虑关于k个实数p_1，…，p_k的情形。（我们从建立$P(k)$的式子开始，接着想反过来落实到$P(k-1)$的成立上以完成归纳步骤）。我们想计算

$$
\det\begin{pmatrix}
p_1 & a & a & a & \cdots & a & a \\
b & p_2 & a & a & \cdots & a & a \\
b & b & p_3 & a & \cdots & a & a \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
b & b & b & b & \cdots & p_{k-1} & a \\
b & b & b & b & \cdots & b & p_k
\end{pmatrix}
$$

将第一列减去第二列（这不改变行列式），得：

$$
\det\begin{pmatrix}
p_1-a & a & a & a & \cdots & a & a \\
b-p_2 & p_2 & a & a & \cdots & a & a \\
0 & b & p_3 & a & \cdots & a & a \\
0 & b & b & p_4 & \cdots & a & a \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & b & b & b & \cdots & p_{k-1} & a \\
0 & b & b & b & \cdots & b & p_k
\end{pmatrix}
$$

然后按第一列展开得

$$
(p_1-a)\det\begin{pmatrix}
p_2 & a & \cdots & a & a \\
b & p_3 & \cdots & a & a \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
b & b & \cdots & p_{k-1} & a \\
b & b & \cdots & b & p_k
\end{pmatrix}
$$

$$-(b-p_2)\det\begin{pmatrix} a & a & \cdots & a & a \\ b & p_3 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & p_{k-1} & a \\ b & b & \cdots & b & p_k \end{pmatrix}$$

这两个($(k-1)\times(k-1)$矩阵的)行列式都具有可以利用归纳假定$P(k-1)$的形式．为了利用$P(k-1)$，我们要引进一些记号．对于第一个行列式，令$F(x)=(p_2-x)(p_3-x)\cdots(p_k-x)$而对于第二个行列式，令$G(x)=(a-x)(p_3-x)\cdots(p_k-x)$．于是由归纳假定，上面这个表达式等于

$$(p_1-a)\left[\frac{bF(a)-aF(b)}{b-a}\right]$$

$$-(b-p_2)\left[\frac{bG(a)-aG(b)}{b-a}\right].$$

但$G(a)=0$而$(p_1-a)F(a)=f(a)$，因此上式即

$$\frac{bf(a)-a(p_1-a)(p_2-b)\cdots(p_k-b)-a(a-b)(p_2-b)\cdots(p_k-b)}{b-a}$$

$$=\frac{bf(a)-a(p_2-b)\cdots(p_k-b)[(p_1-a)+(a-b)]}{b-a}$$

$$=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}.$$

由归纳法即得结论．

问题

2.2.3． 给1.1.3中的归纳步骤以证明．

2.2.4． 对于区间$0\leqslant x\leqslant\pi$中的一切x，证明$|\sin nx|\leqslant n\sin x$，$n$是非负整数．

2.2.5. 以Q表示有理数集合。求出满足下列两个条件的一切由Q到Q的函数f。(i)$f(1)=2$，(ii)对于Q中的一切x与y，$f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1$，

2.2.6. 若a、b、$c\geqslant 1$，证明$4(abc+1)\geqslant(1+a)(1+b)(1+c)$。

（提示，证明更广的不等式$2^{n-1}(a_1a_2\cdots a_n+1)\geqslant(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$）

2.2.7. 在从1到100这100个整数中给定51个形成一个集合。证明，这个集合中至少有一个成员可以整除另一成员。（提示，证明一个更一般的结果，即同一个性质对于在从1到$2n$这$2n$个整数中取出的$n+1$个整数也成立）关于本题的非归纳法证明，见2.6.1。

2.2.8. 批判关于下述定理的证明：

元素为非负整数的一个$n\times n$矩阵，若对于它的每个0元素，含有这个0元素的行与列的行和与列和之和至少等于n。证明此矩阵中全部元素之和至少是$\frac{n^2}{2}$。

证明(?) $n=1$时结论成立。假定此结论对于$n=k-1$成立，然后考虑$k\times k$矩阵。如果没有0元素，结论显然成立，如果$a_{ij}=0$，那么由假定，第i行与第j列之和至少为k。按归纳假定，由删去第i行与第j列而得的$(k-1)\times(k-1)$子矩阵中诸元素之和至少为$\frac{(k-1)^2}{2}$，由此即得$k\times k$矩阵中元素之和至少是$\frac{(k-1)^2}{2}+k=(k^2-2k+1)/2+k=(k^2+1)/2>k^2/2$，从而由归纳法即得结论。

补充例题

1.1.11，1.12.2，3.1.11，4.2.21，4.3.5，4.3.24，6.5.12，6.6.1，7.1.6，7.1.13，7.2.5，7.3.5．

2.3 强归纳法

设a是一个整数，而对每个整数$n \geqslant a$，$P(n)$是关于n的一个命题．强形式的数学归纳法可陈述如下：

若

(i) $P(a)$为真，且

(ii) 由对于每个整数$k \geqslant a$，$P(a)$，$P(a+1)$，$\cdots$，$P(k)$为真

可推出$P(k+1)$为真，

则对于一切整数$n \geqslant a$，$P(n)$为真．

这个归纳法原则与前面的归纳法原则不同，在于步骤(ii)中有一个较强的假定，即，我们用假定$P(a)$，$P(a+1)$，$\cdots$，$P(k)$来代替只假定$P(k)$，以证明$P(k+1)$．从理论上讲，这两种形式的归纳法是等价的，但在实践中，有一些问题用这个强形式更容易处理．

2.3.1．（Pick定理）．证明，一个简单的格点多边形（即以格点为顶点而各边不相交叉的多边形）的面积可用$I+\frac{1}{2}B-1$算出．其中I与B依次表示在这个多边形内部与边界上的格点数．

证　我们对多边形的边数作归纳．三角形的情形已在1.7.3中证明过了．现在，我们来考虑一个简单的k边格点多边形，$k>3$．我们首先证明这样的多边形必有一条含于其内部的对角线．如果是凸多边形（等价地说，每个内角都小于180°的

多边形），这是显然的。因此，假定在某顶点V处内角大于180°，这时从V点发出一条半射线，然后让它扫过多边形的内部时，必定会碰上另一个顶点，（不然，多边形将会包围了一个面积为无穷大的区域），而这就决定了一条以V为一个端点的、位于多边形内的对角线D 。

假定我们的多边形P有I个内格点和B个边界格点，而内对角线D把P分为两个简单的格点多边形P_1与P_2，它们分别有I_1与I_2个内格点，B_1与B_2个边界格点。假定在D上除端点外有x个格点，则$B=B_1+B_2-2-2x$，而$I=I_1+I_2+x$ 。

现在令A，A_1与A_2依次表示P，P_1与P_2的面积，则

$$
\begin{aligned}
A&=A_1+A_2\\
&=(I_1+\frac{1}{2}B_1-1)+(I_2+\frac{1}{2}B_2-1)\\
&=(I_1+I_2)+\frac{1}{2}(B_1+B_2)-2\\
&=(I_1+I_2+x)+\frac{1}{2}(B_1+B_2-2x)-2\\
&=I+\frac{1}{2}(B+2)-2\\
&=I+\frac{1}{2}B-1 .
\end{aligned}
$$

于是由归纳法即得结论。

注意，在这个例子中，归纳论证的第一步正是最困难的。（已在1.7.3中作过了。）而归纳步骤（步骤(ii)）从概念上讲则是很简单的。

问题

2.3.2.

（a）证明：每个大于1的正整数都可写成素数之积。

（b）由著名定理Bertrand假设，对于每个数$x>1$，在x与$2x$之间必有一素数.利用这个事实证明：每个正整数都可以写成不相同的素数之和.（在这个结论中，我们把1也当作素数.）

2.3.3.

（a）证明每个正整数都能写成不相同的Fibonacci数之和。

（b）设$k\gg m$表示$k\geqslant m+2$.证明每个正整数n可表为$n=F_{k_1}+F_{k_2}+\cdots+F_{k_r}$的形式.其中$F_{k_i}$都是Fibonacci数，并且$k_1\gg k_2\gg\cdots\gg k_r\gg 0$。

（c）证明第(b)部分中的表示法是唯一的。

补充例题

3.1.1，3.1.2，3.1.18，3.5.5，6.2.3.

2.4 归纳与推广

（在1.12节中）我们已经见到过，当把一个问题改写成一个更广的问题时，有时更易于处理.对于用归纳法的问题，这也是对的.例如，可能会发生这样的情况：原来的命题$P(1)$，$P(2)$，$P(3)$，…没有包含足够的信息以使我们能完成归纳步骤（步骤(ii)），这时自然要重组命题，把它们改写成一种更强一些、更一般一些的形式，即$Q(1)$，$Q(2)$，…（其中，对每个n可由$Q(n)$推出$P(n)$）然后再去找归纳证法。

2.4.1. 如果$A_1+\cdots+A_n=\pi$，$0<A_i\leqslant\pi$，$i=1$，…，n，那么

$$\sin A_1+\cdots+\sin A_n\leqslant n\sin\frac{\pi}{n}.$$

解 设$P(k)$是定理中对于一个给定的k所说的命题，并假定$P(k)$是真的。为了实现归纳步骤，假定$A_1+\cdots+A_k+A_{k+1}=\pi, 0<A_i\leqslant\pi, i=1,2,\cdots,k+1$。在这个形式下，如何利用$P(k)$是不明显的。举例说，采取把$A_k$与$A_{k+1}$结合成一项的办法，这样便有$A_1+\cdots+A_{k-1}+(A_k+A_{k+1})=\pi$，然后应用归纳假定以得到

$$\sin A_1+\cdots+\sin A_{k-1}+\sin(A_k+A_{k+1})$$

$$\leqslant k\sin\frac{\pi}{k}.$$

但是，由这一步可以导出$P(k+1)$

$$\sin A_1+\cdots+\sin A_k+\sin A_{k+1}\leqslant(k+1)\sin\frac{\pi}{k+1}$$

则仍是完全不清楚的。

要所有的A_i加起来等于π这个要求似乎过苛了。我们考虑用以下的命题$Q(n)$来作替代：

若$0<A_i\leqslant\pi$，$i=1,\cdots,n$，则

$$\sin A_1+\cdots+\sin A_n\leqslant n\sin\left(\frac{A_1+\cdots+A_n}{n}\right).$$

（注意：由$Q(n)$可推出$P(n)$）。显然，$Q(1)$为真。假定$Q(k)$为真并且设$0<A_i\leqslant\pi$，$i=1,\cdots,k+1$，则

$$\sin A_1+\cdots+\sin A_k+\sin A_{k+1}$$

$$\leqslant k\sin\left(\frac{A_1+\cdots+A_k}{k}\right)+\sin A_{k+1}$$

$$=(k+1)\left[\frac{k}{k+1}\sin\left(\frac{A_1+\cdots+A_k}{k}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{k+1}\sin A_{k+1}\right]$$

$$\leqslant (k+1)\left[\sin\left(\frac{k}{k+1}\left(\frac{A_1+\cdots+A_k}{k}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{k+1}A_{k+1}\right)\right]$$

$$=(k+1)\sin\left(\frac{A_1+\cdots+A_{k+1}}{k+1}\right).$$

（最后一个不等号的成立，可由1.2.12(b)的结论推出）.于是由归纳法即得结论.

现在，我们可以证明1.6.2(c)中的猜测了：内接于一个圆的面积最大的多边形是正多边形.为此，假定$n\geqslant 3$，P_1，P_2，…，P_n依次是内接于半径为r的圆的多边形的顶点.以O表示圆心，令T_i表示三角形P_iOP_{i+1}的面积，$i=1$，…，n（这里我们约定$P_{n+1}=P_1$），令$A_i=\angle P_iOP_{i+1}$，（图2.2），则

$$T_i=2\left[\frac{1}{2}\left(r\cos\frac{1}{2}A_i\right)\left(r\sin\frac{1}{2}A_i\right)\right]$$

$$=r^2\cos\frac{1}{2}A_i\sin\frac{1}{2}A_i$$

$$=\frac{1}{2}r^2\sin A_i$$

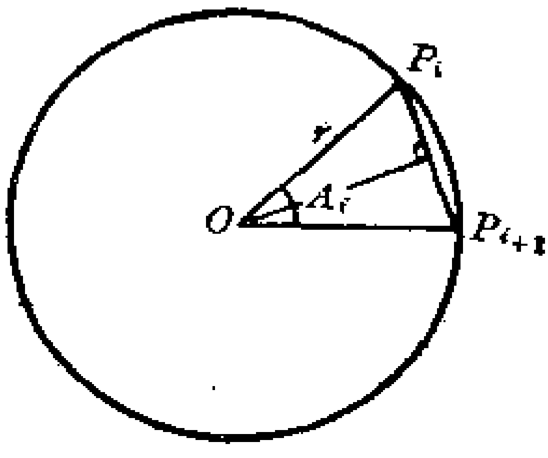


图2.2

具有最大面积的多边形中必定对每一个i都成立$0<A_i\leqslant\pi$.前面的这个结论便可以应用，从而有

$$\text{多边形的面积}=\sum_{i=1}^{n}T_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}r^2\sin A_i=\frac{1}{2}r^2\sum_{i=1}^{n}\sin A_i$$

$$\leqslant \frac{n}{2} r^2 \sin\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A_i\right]$$
$$= n\left[\frac{1}{2} r^2 \sin\frac{2\pi}{n}\right].$$

右端就是正n边形的面积，从而证毕。

2.4.2. 设$f(x)=(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$，$x>1$．证明：$n$为奇数时$f^{(n)}(x)>0$而$n$为偶数时$f^{(n)}(x)<0$。

证 假如用$f^{(k)}(x)$来表示出$f^{(k+1)}(x)$，但是稍为看一下前几个导数，就发现难以实现：

$$f'(x)=\frac{x}{(x^2-1)^{1/2}},$$

$$f''(x)=-\frac{1}{(x^2-1)^{3/2}},$$

$$f'''(x)=\frac{3x}{(x^2-1)^{5/2}},$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{-12x^2+1}{(x^2-1)^{7/2}},$$

$$f^{(5)}(x)=\frac{60x^3+31x}{(x^2-1)^{9/2}},$$

$$f^{(6)}(x)=-\frac{522x^4+266x^2+31}{(x^2-1)^{11/2}}.$$

如果转而考虑下列重新构作的命题：若$f(x)=(x^2-1)^{1/2}$，$x>1$，则

$$f^{(n)}(x)=\frac{g_n(x)}{(x^2-1)^{(2n-1)/2}},$$

其中$g_n(x)$是一个$n-2$次的多项式，并且

$$g_n(x)\text{是}\begin{cases}\text{一个奇函数，它的一切系数都非负数，}\\ \text{（当}n\text{为奇数时）}\\ \text{一个偶函数，它的一切系数都非正数．}\\ \text{（当}n\text{为偶数时）}\end{cases}$$

那么，这个命题就可以用归纳法证明（我们略去了繁琐的细节），而由此可以推出原先的结论。

2.4.3. 以F_i表示$Fibonacci$数列的第i项。证明$F_{n+1}^2+F_n^2=F_{2n+1}$。

证 $n=1$时结论是成立，所以，假定结论对于整数k成立，则有

$$\begin{aligned}F_{k+2}^2+F_{k+1}^2&=(F_{k+1}+F_k)^2+F_{k+1}^2\\&=F_{k+1}^2+2F_{k+1}F_k+F_k^2+F_{k+1}^2\\&=(F_{k+1}^2+F_k^2)+(2F_{k+1}F_k+F_{k+1}^2)\\&=F_{2k+1}+(2F_{k+1}F_k+F_{k+1}^2),\end{aligned}$$

最后一步用了归纳法假定。

如果我们能证明$2F_{k+1}F_k+F_{k+1}^2=F_{2k+2}$，那么便证完了，因为这样我们便可以接上前面的论证，得到$F_{2k+1}+(2F_{k+1}F_k+F_{k+1}^2)=F_{2k+1}+F_{2k+2}=F_{2k+3}$，这就完成了归纳步骤。因此，剩下的就是去证明$2F_{n+1}F_n+F_{n+1}^2=F_{2n+2}$。我们仍用归纳法，这个式子当$n=1$时是对的，假定它对于$k$也为真，则我们有

$$\begin{aligned}2F_{k+2}F_{k+1}+F_{k+2}^2&=2(F_{k+1}+F_k)F_{k+1}+F_{k+2}^2\\&=2F_{k+1}^2+2F_{k+1}F_k+F_{k+2}^2\\&=(2F_{k+1}F_k+F_{k+1}^2)+(F_{k+1}^2+\\&\quad+F_{k+2}^2)\\&=F_{2k+2}+(F_{k+1}^2+F_{k+2}^2).\end{aligned}$$

而这一来我们就回到了原先的问题：$F_{k+2}^2+F_{k+1}^2=F_{2k+3}$吗？如果是这样，就有$F_{2k+2}+(F_{k+1}^2+F_{k+2}^2)=F_{2k+2}+F_{2k+3}=F_{2k+4}$。从而完成了归纳过程。可见这两个问题是互相关联着的：第一个的为真有赖于第二个的为真，反过来，

第二个的为真也依赖于第一个的为真。

我们可以用下列办法同时证明这两个命题，从而解决这一困难。考虑两串命题

$$P(n):\ F_{n+1}^2+F_n^2=F_{2n+1},$$

$$Q(n):\ 2F_{n+1}F_n+F_{n+1}^2=F_{2n+2}\ .$$

$P(1)$与$Q(1)$都是真的。前面的讨论表明，$P(k)$与$Q(k)$可推出$P(k+1)$而$P(k+1)$与$Q(k)$可推出$Q(k+1)$。由此可知，$P(k)$与$Q(k)$可推出$P(k+1)$与$Q(k+1)$，从而证毕。

2.4.4. 设$f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$，其中$n$是一个正整数而$a_1$，…，$a_n$都是实数。已知对一切实数$x$有$|f(x)|\leqslant|\sin x|$，证明$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant 1$。

证 假设我们试着对$f(x)$的项数作归纳。当$n=1$时，$f(x)=a_1\sin x$，而由于$|f(x)|\leqslant|\sin x|$，可见

$$|a_1|=\left|a_1\sin\frac{\pi}{2}\right|=\left|f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|\leqslant\left|\sin\frac{\pi}{2}\right|=1.$$

假定结论对于k成立，然后考虑函数

$$f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_k\sin kx+$$
$$a_{k+1}\sin(k+1)x,$$

a_1，a_2，…，a_{k+1}是某些选定的实数，并假定对一切x有$|f(x)|\leqslant|\sin x|$。由于$\sin(k+1)x=\sin kx\cos x+\sin x\cos kx$，我们可以把$f(x)$写成

$$f(x)=(a_1+a_{k+1}\cos kx)\sin x+a_2\sin 2x+\cdots$$
$$+a_{k-1}\sin(k-1)x+(a_k+a_{k+1}\cos x)\sin kx.$$

于是我们已把$f(x)$改写成k项之和。它或多或少地有些象我们可以应用归纳假定的类型。困难在于这时正弦项的系数不全是常数，它们之中有的是x的函数。这件事提示我们考虑下列更一般的问题：设$a_1(x)$，…，$a_n(x)$都是x的可微函数，

又设$f(x)=a_1(x)\sin x+a_2(x)\sin 2x+\cdots+a_n(x)\sin nx$，已知，对于一切实的$x$，$|f(x)|\leqslant|\sin x|$，证明

$$|a_1(0)+2a_2(0)+\cdots+na_n(0)|\leqslant 1 .$$

如果我们能证明这个命题，那么我们也就解决了原先的问题。因为对一切x取$a_i(x)\equiv a_i$，a_i是常数，$i=1, 2, \cdots, n$，就得到原来的问题。

我们仍用归纳法。当$|a_1(x)\sin x|\leqslant|\sin x|$时，由于$x$接近于0时$\sin x\neq 0$，因此，对于这样的$x$，$|a(x)|\leqslant 1$。而由于$a_1(x)$在$x=0$是连续的，即可知$|a_1(0)|\leqslant 1$。这就推得了在$n=1$的情形结论为真。

现在假设结论在$n=k$时为真，然后考虑函数

$$f(x)=a_1(x)\sin x+a_2(x)\sin 2x+\cdots$$
$$+a_{k+1}(x)\sin(k+1)x,$$

其中$|f(x)|\leqslant|\sin x|$而$a_i(x)$都是可微函数，和前面一样，此式可改写为等价的形式

$$f(x)=[a_1(x)+a_{k+1}(x)\cos kx]\sin x$$
$$+a_2(x)\sin 2x+\cdots+a_{k-1}(x)\sin(k-1)x+[a_k(x)$$
$$+a_{k+1}(x)\cos x]\sin kx .$$

现在，我们可以用归纳假定，得到

$$|[a_1(0)+a_{k+1}(0)]+2a_2(0)+\cdots+(k-1)a_{k-1}(0)$$
$$+k(a_k(0)+a_{k+1}(0))|\leqslant 1 .$$

但这就是

$$|a_1(0)+2a_2(0)+\cdots+ka_k(0)+(k+1)a_{k+1}(0)|\leqslant 1 .$$

即所希望得到的形状。（在6.3.2中有这个结论的一个非归纳法的证明。）

问题

2.4.5. 设S表示一个$n\times n$的格点方块，$n\geqslant 3$.证明可以画一条由$2n-2$个线段所组成的折线，它经过S的全部n^2个格点．

2.4.6. 设$f_0(x)=\dfrac{1}{(1-x)}$，并定义$f_{n+1}(x)=xf'_n(x)$.证明，当$0<x<1$时$f_{n+1}(x)>0$．

2.5 递 归

在1.1.1的解法之中，我们以A_n表示一个n元集合的子集数．我们证明了$A_{n+1}=2A_n$，$A_0=1$．这是递归关系的一个例子，即使我们没有（象归纳法要求的那样）关于A_n的明显表达式，递归关系决定了一条“生路”或者算法，它告诉我们怎样计算A_{n+1}.在这一节里，我们注意这样的问题，它可以约化成等价的问题而其中的参数变小.递归法就是一再地应用这种约化的论证，直到参数的值小到问题可以解出为止．

2.5.1. （河内之塔问题）假定有n个外径不相同的圆环套在一根垂直竖立的钉子上，最大的环在最下面，形成一个上小下大的塔（图2.3），在这个钉子以外充分远处，另有两个垂直竖立的钉子，我们希望把这些圆环每次一个地搬套在第二颗钉子上形成一个与原先完全一样的塔,在搬的过程中，不允许把大环放在小环上面（这就需要用第三颗钉子).为了完成这样的搬套，最少需要动多少次？

解 以M_n表示搬完一迭n个圆环所需的最少搬动次数．显然$M_1=1$.因此可设$n>1$，为了把最大的环放到第二颗钉

子的底部，必须把它上面$n-1$个环搬套到第三颗钉子上去，这最少要动M_{n-1}次（用我们选定的记号）．把最大的环套到第二颗钉上需要动一次，然后要动M_{n-1}次以把套在第三颗钉上的$n-1$个环套到第二颗钉上．于是

$$M_n=2M_{n-1}+1,\quad M_1=1\ .$$

基于这个递归公式，很容易用归纳法证明$M_n=2^{n+1}-1$ ．($M_{n+1}=2M_n+1=2(2^{n+1}-1)+1=2^{n+2}-1$)．

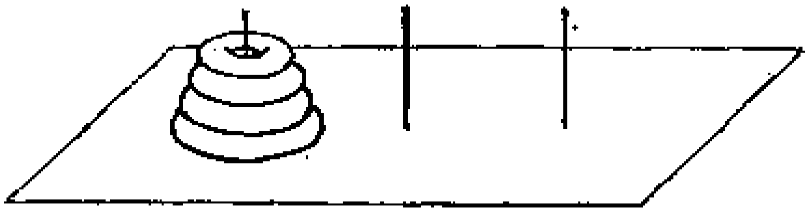


图2.3

以a_1，a_2，…，a_n表示1，2，…，n的一个排列．我们可以用下列办法给这个排列一个几何解释．取一个$n\times n$格的棋盘，对于每个i，把一个车放在（自左至右的）第i列和（从上到下的）第a_i行交叉的格内．例如，排列3，2，5，4，1便可用图2.4的情形来表示，用这种办法，我们便知道，1，2，…，n的一个排列就相当于把n个“不受攻击的”车放到一块$n\times n$棋盘上的一种放法．这种对应关系使我们可以几何地思考排列，并且利用在棋盘上不受攻击的车的形象与语言．

5			R		
4				R	
3	R				
2		R			
1					R
	1	2	3	4	5

图2.4

2.5.2． 以Q_n表示在$n\times n$棋盘上如此放n个不受攻击的车的放法数，这种放法所得的图样要关于棋盘的从左下角到右上角的对

角线对称。

证明

$$Q_n = Q_{n-1} + (n-1)Q_{n-2}$$

证 位于第一列的车有两个可能，它或者位于棋盘的左下角，或者不是.如果它位于左下角，那么有Q_{n-1}种方法放置其余的$n-1$个车.如果不是，那么它可能位于第一列的其余$n-1$格中的任何一格，一旦它放好了，那么它就唯一地决定了在第一行中同它对称（关于上面说过的对角线对称）的那个车的位置，而其余的$n-2$个车则有Q_{n-2}种放法，把这些想法合在一起，就给出了所要的结论。

2.5.3. 把一枚硬币连掷n次，在投掷过程中接连出现两次正面向上的概率等于多少？

解 以P_n表示在n次投掷中不发生接连两次正面向上的概率.显然，$P_1=1$，$P_2=\dfrac{3}{4}$.若$n>2$，有两种情形：

如果第一次掷得背面向上，那么在其余$n-1$次投掷中不出现两次正面朝上的概率是P_{n-1}（用我们所选定的记号）。如果第一次掷得正面，那么第二次必须掷出反面，以免接连出现两次正面，而在之后的$n-2$次投掷中不接连二次出现正面的概率是P_{n-2}.因此

$$P_n = \frac{1}{2}P_{n-1} + \frac{1}{4}P_{n-2},\quad n>2.$$

这个递归关系二边同乘2^n，可以得到一个更熟悉的式子：

$$2^nP_n = 2^{n-1}P_{n-1} + 2^{n-2}P_{n-2},$$

对每个n，记$S_n = 2^nP_n$，则得

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2}.$$

这恰是关于 *Fibonacci* 数列的递归关系式（注意 $S_n = F_{n+2}$）。

因此，我们要找的概率是$Q_n = 1 - P_n = 1 - \frac{F_{n+2}}{2^n}$.

下面这个例子并不能得出一个明显的递归公式，但是它解释了"反推"的思想，而这正是递归概念的特征。

2.5.4. 证明任何正的有理数都可以表为调和级数的有限个不相同的项之和。

证 设$\frac{m}{n}$是一个正的有理数，则

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} .$$

它是调和项的m个复本的和，利用恒等式

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$$

递归地展开每个复本，直到所有的项互不相同为止，这样即知命题为对。

问题

2.5.5. 在欧氏平面上画n条直线，其中任何二条都不平行，任何三条都不共点，以P_n表示这样的n条直线把平面划成的区域的数目。证明 $P_{n+1} = P_n + (n+1)$.

2.5.6.

(*a*) 以E_n表示如此的$n \times n$矩阵的行列式，其主对角线（从左上到右下）下方的元素都是-1，主对角线及其上方的元素都是1。证明，$E_1 = 1$，并且对于$n>1$有$E_n = 2E_{n-1}$.

(*b*) 以D_n表示如此的$n \times n$矩阵的行列式，其第(i, j)个元素（即位于第i行第j列交叉处的元素）是i与j之差的绝对值。证明，$D_n = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$.

(c) 以F_n表示如此的$n\times n$矩阵的行列式，它的主对角线上的元素都是a，上次对角线（即紧挨着主对角线而位于它上方的、有$n-1$个元素的对角线）上的元素都是b，下次对角线（即紧挨着主对角线而位于它下方的、有$n-1$个元素的对角线）上的元素都是c。对于$n>2$，证明$F_n=aF_{n-1}+bcF_{n-2}$。当$a=b=1$而$c=-1$时，结果如何？

(d) 设A_n是$n\times n$矩阵的行列式，此矩阵的第(i,j)个元素是$a^{|i-j|}$，试利用寻找A_n与A_{n-1}间的递归关系的办法来计算A_n的值。

2.5.7.

(a) 设$a_1, a_2, \cdots, a_n$是正的实数，而

$A_n=\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)}{n}$，证明$A_n\geqslant A_{n-1}^{\frac{n-1}{n}}\cdot a_n^{\frac{1}{n}}$，等号当且仅当$A_{n-1}=a_n$时成立。（提示：用2.1.5中的不等式）。

(b) 算术平均——几何平均不等式，利用第(a)部分证明

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\geqslant(a_1\cdots a_n)^{1/n}$$

等号当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时成立。

2.5.8. 两位乒乓球选手A和B，协议比赛若干局，选手的匹配是旗鼓相当的，假定先发球的人获胜此局的概率为P（可能是A选手在某一局先发球而以概率P获胜，也可能是B选手在另一局先发球而以概率P获胜）。假定A选手在第一局中首先发球，但在这以后，输一局的在接下去的一局中便先发球，以P_n表示A在第n局获胜的概率，证明$P_{n+1}=P_n(1-P)+(1-P_n)P$。

2.5.9. 一个赌博研究者，投掷一枚匀称的硬币，在每次掷

得正面朝上时记一分而掷得背面朝上时记二分．证明在连着掷n次当中的某个时刻，他恰好记了n分的概率是$\frac{1}{3}(2+(-\frac{1}{2})^n)$.（提示：以$P_n$表示在某时刻分数恰为$n$分的概率．用$P_{n-1}$来表出$P_n$或者用$P_{n-1}$与$P_{n-2}$表出$P_n$，利用这个递归关系给出一个归纳证明）．

2.5.10. （*Josephus*问题）把1，2，…，n这n个数依次（比如说按顺时针方向）排在一个圆周上.现在，先划掉2，接下去依顺时针方向把余下的数每隔一个划去一个，直到只剩下一个数为止，（比如，对于$n=5$的情形，依次划去的数是2，4，1，5.而只留下了3.）以$f(n)$表示最后留下的数，证明

$$f(2n)=2f(n)-1,$$
$$f(2n+1)=2f(n)+1\ .$$

在（3.4.5中，还要接着讨论这个问题.）

2.5.11.

（a）以R_n表示把n个不受攻击的车放在$n\times n$棋盘上的如下的放法数：每个放法都使得摆出的图样在棋盘上绕中心顺时针转90°时，保持原样．

证明

$$R_{4n}=(4n-2)R_{4n-4}$$
$$R_{4n+1}=R_{4n}$$
$$R_{4n+2}=0=R_{4n+3}\ .$$

（b）以S_n表示把n个不受攻击的车放在$n\times n$棋盘上的如下的放法数：每次摆出的图样对于棋盘中心是对称的．证明

$$S_{2n}=2nS_{2n-2},$$
$$S_{2n+1}=S_{2n}\ .$$

（c）以T_n表示把n个不受攻击的车放到$n\times n$棋盘上的如下的放法的数目，使得摆出的图样关于棋盘的两条对角线都对称，证明

$$T_2=2,$$
$$T_{2n+1}=T_{2n},$$
$$T_{2n}=2T_{2n-2}+(2n-2)T_{2n-4}\ .$$

2.5.12. 设一个圆有一个内接正$2n$边形，以T_n表示连接它的一对对顶点而使这样所得到的线段互不相交的方法的数目.如果我们设$T_0=1$，证明

$$T_n=T_0T_{n-1}+T_1T_{n-2}+T_2T_{n-3}+\cdots+T_{n-1}T_0$$

（本问题有一个后续，见5.4.10）

2.5.13. 设$a_1,a_2,\cdots a_n$是集合$S_n=\{1,2,\cdots,n\}$的一个排列. S_n中的元素i当$a_i=i$时，称为此排列的一个不动点.

（a） S_n的一个更列是S_n的一个没有不动点的排列.以g_n表示S_n的更列数，证明

$$g_1=0,\qquad g_2=1$$

和$n>2$时

$$g_n=(n-1)(g_{n-1}+g_{n-2})$$

（提示，一个更列，或者使第一个元素与另一元素互换或者不如此）.

（b） 以f_n表示S_n的恰有一个不动点的排列的数目，证明 $|f_n-g_n|=1$.

2.5.14. 假定有n位男士在参加一次晚宴前把各自的帽子作了记号存放在衣帽间里，当他们回家的时候，帽子是用一种随机的方式还给他们的. 问，每个人拿到的都不是自己

的帽子的概率是多少？（提示：以p_n表示这个概率，则$p_n=g_n/n!$，其中g_n的意义与2.5.13中相同，设$c_n=p_n-p_{n-1}$，利用2.5.13(a_1)找到的递归关系，证明$c_2=\frac{1}{2}$，$c_n=-\frac{c_{n-1}}{n}$。利用这一点，证明$p_n=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}$。当$n$很大时，$p_n\approx\frac{1}{e}$）

2.5.15.

(a) 令$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$，关于$I_n$找一个递归关系。

(b) 证明 $I_{2n}=\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times2n}\cdot\frac{\pi}{2}$

(c) 证明 $I_{2n+1}=\frac{2\times4\times6\times\cdots\times(2n-2)}{1\times3\times5\cdots\times(2n-1)}$。

补充例题

1.1.1(解法2)，4.3.9，5.3.5，5.3.14，5.3.15，5.4.8，5.4.9，5.4.24，5.4.25，5.4.26，基于"重复论证"的论证法都和归纳法及递归紧密相关，在这个意义下的例子是4.4.4，4.4.17，在6.1节中的中值定理的证明，6.1.5，6.1.6，6.3.6，6.8.10，以及在7.2节中给出的关于算术平均——几何平均不等式的探索法。

2.6 抽屉原则

当一个充分大的集合（其成员称为对象）分为数目足够少的类时，这些类中的一个所含有对象的数目将有某个极少值，这个内容将在下列明了的命题中叙述得更加准确。

抽屉原则：若把$kn+1$个对象（$k\geqslant1$）分入n个盒子，那

么必有一个盒子其中将至少含有$h+1$个对象。

这条原则，即令当$h=1$时，本身是一个证明存在性定理的强有力的工具。然而，要有一些经验才能认识到什么时候利用它，以及如何利用它。

2.6.1. 给定由$n+1$个正整数所组成的一个集合，其中每个数都不超过$2n$，证明这个集合中至少有一个成员能整除集合的另一成员。

解 这与2.2.7是一样的。在那里是用对n行归纳法处理的。可是，这个问题实际上是关于某个已知的n的一个存在性定理，正如我们即将看到的那样，它可以用抽屉原则很优美地加以解决。

把所选定的数记作$x_1, x_2\cdots, x_{n+1}$，而对于每个i，记$x_i=2^{n_i}y_i$，其中n_i是非负的整数，而y_i是奇数。令$T=\{y_i: i=1,2,\cdots n+1\}$，则$T$是一组$n+1$个奇数，每个奇数都小于$2n$。由于只有$n$个比$2n$小的奇数，由抽屉原则可知，$T$中有两个数是相等的，例如$y_i=y_j$，$i<j$，然而

$$x_i=2^{n_i}y_i,\quad x_j=2^{n_j}y_j$$

如果$n_i\leqslant n_j$，则x_i除得尽x_j；如果$n_i>n_j$，则x_j除得尽x_i。于是证毕。

2.6.2. 考虑在边长为1的正方形S内部的五个点P_1, P_2, P_3, P_4, P_5，以d_{ij}表示点P_i与P_j间的距离。证明，这些距离d_{ij}之中至少有一个小于$\frac{\sqrt{2}}{2}$。

证 如图2.5所示，把S分成四个相等的正方形。由抽屉原则可知，有两点属于这些小块中的一块（位于两个小方块的公共边界上的点，可以认为同时属于这两个方块）。这两

点之间的距离便小于$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.6.3. 假定一块4×7的棋盘上的每个方格，如下面所画出那样，或染为白色或染为黑色。证明，在任何这样的染色之后，棋盘必定含有一个（由棋盘的水平线及垂直线围成的）矩形，如我们在图2.6中示意画出的那样，它的四角处的方格颜色相同。

证 这样的矩形甚至在3×7棋盘上就存在了。每一列的颜色排布格式必定是图2.7中所画的类型中的一种.

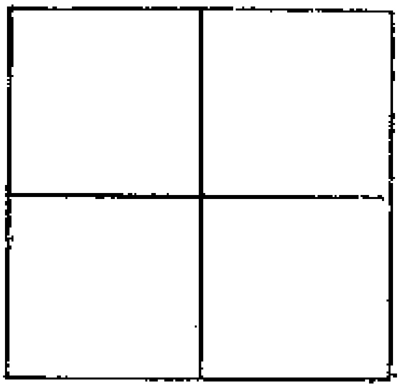


图2.5

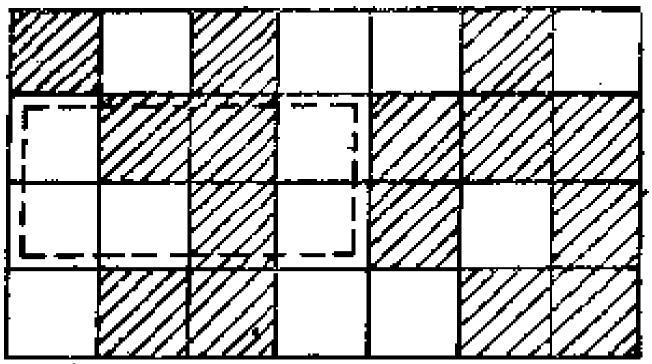


图2.6

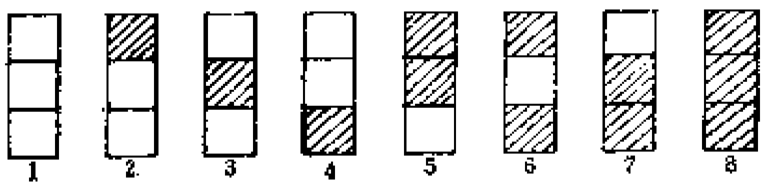


图2.7

假定有一列属于类型1。那么当余下的六列是类型1,2,3或4中之一时，即已证完，因此，假定其余的各列属于类型5,6,7或8.可是由抽屉原则，这余下的六列中必有两列类型相同，于是也已证完。

如果有一列属于类型8,推理相同。

因此，假定没有一列是属于类型1或8，可我们有七列但只有六个类型，由抽屉原则，必有两列类型相同。从而证毕。

2.6.4. 证明，存在着绝对值都小于一百万的、不全为0的三个整数a、b、c，使得

$$|a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}|<10^{-11}$$

证 设S是由10^{18}个形如$r+s\sqrt{2}+t\sqrt{3}$的实数组成的集合，其中r，s，t都在$\{0,1,2,\cdots,10^{6}-1\}$中取值。又令$d=(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})10^{6}$，则$S$中的每个$x$都属于区间$0\leqslant x<d$。把这个区间等分为$10^{18}-1$个长为$e=d/(10^{18}-1)$的子区间，由抽屉原则，$S$中的$10^{18}$个数之中，必有两个同时位于某个子区间内。它们的差，$a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$就给出了所要找的a,b,c。因为$e<10^{7}/10^{18}=10^{-11}$。

2.6.5. 从1到99（用10进制记号）这99个数中任取十个自然数组成一个集合，证明这个集合有两个不相交的子集合，这两个子集合的各自元素之和相等。

证 对于十个数组成的已选定的集合，我们有$2^{10}-1=1023$个（不同的）非空子集。这些子集中的每一个元素之和都小于1000。因为，即使是$90+91+\cdots+99$也小于1000。因此，由抽屉原则，必有两个子集A与B，其元素之和相同。把同时属于这两个集合的元素扔掉之后，我们便得到两个不相交的集合$X=A-(A\cap B)$，$Y=B-(A\cap B)$，它们的元素之和相同。（X和Y都不是空集，否则有$A\subset B$或$B\subset A$，这是不可能的，因为它们的元素加起来等于同一个数。）

问题

2.6.6. 设A是从算术级数$1,4,7\cdots,100$中任意选出的20个不相同的整数组成的集合。证明，A中必有两个不同的整数，它

们的和等于104.

2.6.7.

(a) 设S是在平面上每边边长为2米的一个正方形区域. 证明, 在S中的9个点之中必有3个, 以它们作顶点的三角形面积$\leqslant \frac{1}{2}$平方米.

(b) 19支箭射在形状是每边为1米的正六边形的箭靶上. 证明, 必有两支箭互相间的距离不超过$\frac{\sqrt{3}}{3}$米.

2.6.8. 证明, 如有n个人出席晚会, 则其中必有二人(在出席者之中)认识同样多的人.

2.6.9. 围着一张圆桌均匀地放好了15把椅子, 在圆桌上对着椅子放好了15位客人的姓名卡片, 各位客人就座时都没有注意到这些卡片, 及至坐好之后, 才弄明白, 大家都没有面对自己的卡片就座. 证明, 可以把桌子适当转动, 使得在转动之后, 至少有两位客人同时正确入座.

2.6.10. 设X为任一实数。证明, 在数

$$X,\ 2X,\ \cdots(n-1)X$$

之中有一个数, 它与一个整数之差至多是$\frac{1}{n}$.

2.6.11.

(a) 证明在任何6个人之间, 或者有3个人互相是朋友, 或者有3个人互相不认识. (提示: 把6个人表为一个正六边形的6个顶点. 如果某两个顶点所代表的互为朋友, 则在这两个顶点之间连一条红线段, 不然, 便连一条蓝线段. 考虑其中一个顶点, 例如顶点A, 从A发出的线段中至少有三条颜色相同. 下面便有两个情形可供考虑.)

(b) 有17个人互相通信——每个人同所有其余的人都通信。在他们的信中只讨论三个课题，而每一对通信者之间只讨论这三个课题中的一个课题。证明，至少有三个人，他们互相之间给对方写的都是关于同一课题的话。

2.6.12. 证明不存在不超过24的7个正整数，它们能使得一切子集的元素之和互不相同。

补充例题

1.10.1, 3.2.1, 3.2.5, 3.2.19, 3.2.20, 3.3.24, 4.4.10.

第三章　算　术

在这一章，考虑算术问题中的重要的解题方法。最基本的技术依赖算术基本定理，它指出每一个整数可以唯一地表示成素数的乘积。证明这一关键定理所必需的理论基础是关于整除性的讨论。因此，这一章从考虑最大公约数与最小公倍数的问题开始。理解这问题的要点是带余除法与欧几里得（*Euclid*）算法。

在第二节，介绍模算术的技术(奇偶性的一种推广)。对许多讨论整数之间关系的问题，是一种有效的方法。在最后两节，再次指出记号在解题中的重要性，我们考虑数的表示问题：整数的十进表示，复数的直角坐标式、三角式与指数式。

3.1 最大公约数

给定整数a、b，如果存在整数q，满足$b=qa$，那么我们说a整除b，并记为$a|b$。在这一定义的基础上，容易证明下面的极为有用的结论：如果n整除表达式$a=b+c$中的某两项，那么n整除所有的三项（注意：在这一章中，除非特别声明，所有变数都是整变数）。

如果$a_1,\cdots,a_n$是已给整数，我们用$\gcd(a_1,\cdots,a_n)$表

示它们的最大公约数，用lcm $(a_1,\cdots,a_n)$ 表示它们的最小公倍数 .

3.1.1. 求出满足以下三个条件的所有函数f

(i) $f(x,x)=x$

(ii) $f(x,y)=f(y,x)$

(iii) $f(x,y)=f(x,x+y)$

假定其中变数及f的值都是正整数.

解 观察特殊的情况引导我们猜测$f(x,y)=\gcd(x,y)$. 我们对和$x+y$进行归纳，证明这一猜测成立.

$x+y$ 的最小值为2，在$x=y=1$时取得.由(i)，$f(1,1)=1$，又$\gcd(1,1)=1$.因此猜测在这时成立.

假设x与y为正整数，$x+y=k>2$.又假设我们的猜测对所有较小的和成立.

由(i)与(ii)，不失一般性，可以假定$x<y$.由(iii)，$f(x,y)=f(x,+(y-x))=f(x,y-x)$.根据归纳假设，$f(x,y-x)=\gcd(x,y-x)$.只要证明$\gcd(x,(y-x))=\gcd(x,y)$.

如果$c|x$，$c|y$，那么$c|x$并且$c|y-x$. 由此$\gcd(x,y)\leqslant\gcd(x,y-x)$.类似地，如果$c|x$，$c|y-x$，那么$c|x$并且$c|y$，因此$\gcd(x,y-x)\leqslant\gcd(x,y)$. 综合所述，必须$\gcd(x,y)=\gcd(x,y-x)$.证毕.

下面的结论是数论的基础.

带余除法 如果a、b为任意整数，$b>0$，那么有唯一的整数q与r满足

$$a=qb+r,\quad 0\leqslant r<b.$$

反复应用带余除法，我们可以算出两个整数的最大公约数.为说明这一算法，设b_1与b_2为正整数，$b_1>b_2$.由带余除

法，存在整数q与b_3满足

$$b_1=qb_2+b_3,\quad 0\leqslant b_3<b_2 .$$

由这个等式，易知$\gcd((b_1,b_2)=\gcd(b_2,b_3)$。

如果$b_3=0$，那么$\gcd(b_1,b_2)=b_2$.如果$b_3>0$，我们可以重复上而的程序，用b_2与b_3代替b_1与b_2、产生整数b_4满足$\gcd(b_2,b_3)=\gcd(b_3,b_4)$，$b_3>b_4\geqslant 0$.

继续这样进行下去，将产生一个非负整数的递减数列

$$b_1>b_2>b_3>\cdots$$

满足$\gcd(b_1,b_2)=\gcd(b_2,b_3)=\cdots=\gcd(b_i,b_{i+1})$，$i=1,2,3,\cdots$.因为这样的数列不可能无限地递减下去，一定存在第一个n满足$b_{n+1}=0$.这时$\gcd(b_1,b_2)=\gcd(b_n,b_{n+1})=b_n$.

这个求$\gcd(b_1,b_2)$的程序称为Euclid算法。

在给出这一算法的一个例子之前，先叙述并证明本节的主要结论。

3.1.2. 对已给正整数a与b，存在整数s,t满足

$$sa+tb=\gcd(a,b).$$

解 我们对求a,b的最大公约数的欧几里得算法所需要的步数进行归纳（另一个证明的梗概可见3.19）。

设$a>b$.如果仅需要一步，那么有整数q满足$a=bq$.这时$\gcd(a,b)=b$.并且在这时$\gcd(a,b)=b=a+(1-q)b$.因此令$s=1$，$t=1-q$，命题成立。

设对所有的正整数对，在所需步数少于k时，命题成立，又设a,b为整数，需要k步，$k>1$.由带余除法，存在整数q、r满足

$$a=qb+r,\quad 0<r<b.$$

b与r的最大公约数可由Euclid算法经$k-1$步算出．因

此，由归纳假设，存在整数c与d满足

$$cb+dr=\gcd(b,r).$$

由最后的两个等式，得到

$$\begin{aligned}\gcd(a,b)&=\gcd(b,r)\\&=cb+dr\\&=cb+d(a-qb)\\&=da+(c-dq)b,\end{aligned}$$

令$s=d$，$t=c-dq$，于是命题成立。

这个证明的步骤可以用一个例题来说明。

3.1.3. 求整数x，y满足

$$754x+221y=\gcd(754,221)$$

解 首先用Euclid算法求出754与221的最大公约数．我们有

$$\begin{aligned}754&=3\times221\times91,\\221&=2\times91+39,\\91&=2\times39+13,\\39&=3\times13\end{aligned}$$

这表明$\gcd(754,221)=13$

为了求出所需的整数x与y．我们将Euclid算法反过来（这就是上面的归纳证明的实质）：

$$\begin{aligned}13&=91-2\times39\\&=91-2(221-2\times91)\\&=5\times91-2\times221\\&=5(754-3\times221)-2\times221\\&=5\times754-17\times221.\end{aligned}$$

因此，$x=5$与$y=-17$是一组解。

下面的结论是常用的。

3.1.4. a,b,c为整数，当且仅当gcd（a,b）整除c时，方程$ax+by=c$有整数解x,y。并且，如果(x_0,y_0)是一整数解，那么对每一个整数k，

$$x'=x_0+bk/d,\qquad d=\gcd(a,b).$$
$$y'=y_0-ak/d,$$

也是解；反过来，所有的整数解都是这种形式。

证 对前一部分，显然gcd（a，b）必须整除c，因为gcd(a, b)整除$ax+by$。因此，gcd(a, b)$|c$是有解存在的必要条件．另一方面，如果c是gcd(a, b）的倍数，设$c=\gcd(a,b)\times q$，可用下面的方法求出一组整数解.我们知道有整数s与t满足$sa+tb=\gcd(a,b)$。因此令$x=sq,y=tq$，

则$ax+by=asq+btq=(as+tb)q=\gcd(a,b)\times q=c$。

如果（x_0,y_0）是解，直接验算表明上面所给的（x'，y'）也是解。为了证明所有的整数解都具有这种形式，我们采用下面的几何论证（图3.1）。

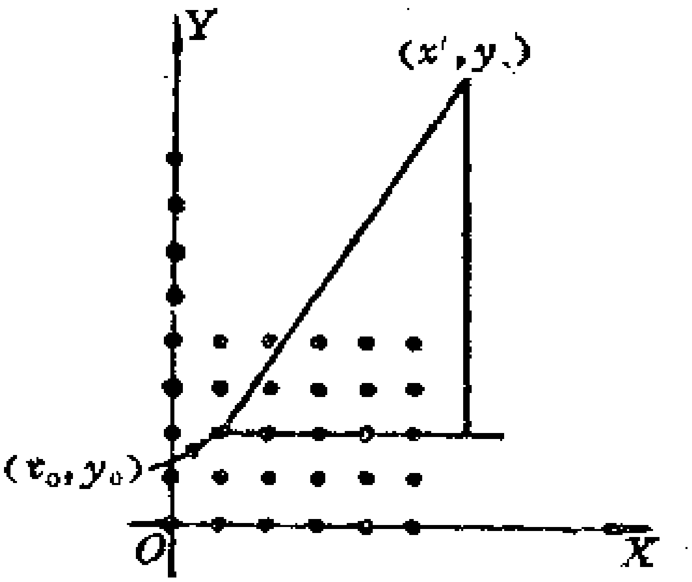


图3.1

注意求$ax+by=c$的整数解x、y等价于在直线$ax+by=c$上求整点。设(x_0,y_0)为直线$ax+by=c$上的整点，即设

$$ax_0+by_0=c.$$

在$b=0$时结论容易证明，因此设$b\neq 0$。如果(x',y')是平面上另一个整点，那么当且仅当

$$\frac{y'-y_0}{x'-x_0}=-\frac{a}{b}=-\frac{a/d}{b/d}\ (\text{这里 } d=\gcd(a,b))$$

时，(x',y')在直线$ax+by=c$上。由于a/d与b/d互素，当且仅当有整数k满足

$$y'-y_0=-(a/d)k$$

$$x'-x_0=-(b/d)k$$

时，上面的等式成立。因此方程$ax+by=c$的所有整数解由等式

$$x'=x_0+bk/d$$

$$y'=y_0-ak/d$$

给出，其中k为整数，$d=\gcd(a,b)$。

3.1.5. 证明对每个自然数n,分数$\frac{21n+4}{14n+3}$为既约。

证 我们要证明对所有的n，$14n+3$与$21n+4$互素。前面的讨论表明，只要证明有整数s,t存在满足

$$s(21n+4)+t(14n+3)=1$$

或等价地，

$$7n(3s+2t)+(4s+3t)=1.$$

如果能找到整数s与t满足

$$3s+2t=0$$

$$4s+3t=1$$

那么上面的方程对所有的n成立。容易看出$s=-2$，$t=3$满足这个方程组。证毕。

3.1.6. 一个角的度数为$\frac{180°}{n}$,其中n是不被3整除的正整数。证明这个角可以用尺规三等分。

解 我们不期望这个问题与数有任何关系，但是，条件n不被3整除的意义是什么呢？这意味着3与n互素，因此有整数s,t满足

$$ns+3t=1$$

我们希望作出一个$\frac{60°}{n}$的角。将上面的等式两边同乘$\frac{60°}{n}$，得到

$$60°\cdot s+\frac{180°}{n}\cdot t=\frac{60°}{n}$$

这一等式的左边表明如何作$\frac{60°}{n}$的角。这是因为已知角$\frac{180°}{n}$，又能作出一个60°的角，还能找到整数s与t，所以我们能够作出$60°\cdot s+\frac{180°}{n}\cdot t$。

问题

3.1.7. 如果$\gcd(a,b)=1$，证明

(a) $\gcd(a-b,a+b)\leqslant 2$,

(b) $\gcd(a-b,a+b,ab)=1$,

(c) $\gcd(a^2-ab+b^2,a+b)\leqslant 3$.

3.1.8. 任意多个分母两两互素的既约分数的代数和不能为整数。即，如果$\gcd(a_i,b_i)=1$，$i=1,2,\cdots n$，并且对$i\neq j$，$\gcd(b_i,b_j)=1$，证明

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{b_n}$$

不是整数。

3.1.9. 设S为整数的非空集满足

(i)如果x、y在S中，那么差$x-y$在S中。

(ii)如果x在S中，那么x的所有倍数在S中。

(a)证明在S中有一个整数d,使得S由d的所有倍数 组成（提示：考虑S中的最小的正整数）。

(b)证明(a)适用于集$\{ma+nb \mid m、n为正整数\}$并证明所得d为gcd>(a,b) 。

3.1.10.

(a) 证明任意两个相邻的Fibonacci数F_n,F_{n+1}, $n>2$是互素的 。

(b) 已知$T_1=2, T_{n+1}=T_n^2-T_n+1, n>0$.证明在$n\neq m$时$T_n$与$T_m$互素 。

3.1.11. 对于正整数$a_1, a_2\cdots, a_n$,证明存在整数$K_1, \cdots, K_n$满足$K_1a_1+\cdots+K_na_n=\gcd(a_1\cdots, a_n)$ 。

3.1.12. 证明在$ad-bc=1$时，$\frac{a+b}{c+d}$为既约。

3.1.13. 证明$\gcd(a_1, \cdots, a_n)\gcd(b_1, \cdots, b_m)=\gcd(a_1b_1, a_2b_2, \cdots, a_nb_m)$，其中右边的括号包括全部的$mn$个乘积$a_ib_j$，$i=1, \cdots, m$，$j=1, \cdots, n$。

3.1.14. 在Smith先生将一张x元y分的支票换为现钱，他收到y元x分，这是应得钱数的两倍还多两分，问这张支票上的钱数是多少？

3.1.15. 求最小的正整数a，使

$$1001x+770y=1000000+a$$

能够成立，并证明这时有100组正整数解x、y。

3.1.16. 大于1并且能被任一满足$2\leqslant k\leqslant 11$的整数k除之余1的数不止一个，这样的数中最小的两个的差是多少？

3.1.17. 设b为大于1的整数，证明对每个非负整数N，有一个唯一的非负整数n及唯一的一组整数a_i，$i=0, 1, \cdots, n$，$0\leqslant a_i<b$，满足$a_n\neq 0$及

$$N=a_nb^n+a_{n-1}b^{n-1}+\cdots+a_2b^2+a_1b+a_0.$$

（在$N<b$时结论是显然的，因此设$N\geqslant b$，采用归纳法）。

补充例题

3.2.4，3.2.21，3.3.11，3.3.19，3.3.28，4.1.9，4.2.1，4.2.2，4.2.4，4.4节Lagrange定理的系（iii），4.4.5，4.4.6，4.4.8。

3.2 模算术

一个整数的奇偶性告诉我们这个数与数2有怎样的关系。特别地，一个数是偶数还是奇数，根据它被2除时余数为0或1来确定。奇偶性的这种表述可以很自然地用下面的方式推广。

给定整数$n\geqslant 2$，将整数按照它被n除时的余数分为剩余类。即如果两个整数被n除时有相同的余数，那么就将它们归入同一个剩余类。例如，对$n=4$，整数被分为四个集合，这些集合被余数0，1，2，3所标志。对任意的$n\geqslant 2$，有n个剩余类，标以0，1，2，…，$n-1$。

如果两个整数x，y被n除时余数相同（或等价地，并且在实践中更为方便，如果$x-y$被n整除），那么称为关于模n同余，记为

$$x\equiv y(\mathrm{mod}\,n)$$

容易证明

(i) $x \equiv x(\bmod n)$

(ii) 由 $x \equiv y(\bmod n)$ 可推出 $y \equiv x(\bmod n)$

(iii) 由 $x \equiv y(\bmod n)$，$y \equiv z(\bmod n)$ 可推出 $x \equiv z(\bmod n)$

这些性质表明同余与等式具有同样的特性，我们常常把同余看成某种等式（事实上，我们有时把 $x \equiv y(\bmod n)$ 读成 x 等于 y 模 n）

3.2.1. 证明在集 $\{1, 2, 3, 4, \cdots, 100\}$ 中选55个数组成的任一子集中一定有两个数的差为 9。

证 模 9 有九个剩余类：0，1，2，3，4，5，6，7，8. 由（一般的）抽屉原则，所选的55个数中有 7 个数在同一个剩余类中（如果每个剩余类中只有 6 个或更少的数，那么合起来至多含55个数中的54个数），设 $a_1, \cdots, a_7$ 为这些数，并假定 $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_7$. 因为 $a_{i+1} \equiv a_i(\bmod 9)$, $a_{i+1} - a_i \in \{9, 18, \cdots\}$，我们断言对某个 i，$a_{i+1} - a_i = 9$. 不然的话，对每个 i, $a_{i+1} - a_i \geqslant 18$，这意谓着 $a_7 - a_1 \geqslant 6 \times 18 = 108$。但这是不可能的，因为 $a_7 - a_1 < 100$。所以，有两个数（在 $a^1, \cdots, a_7$ 中）的差为 9。

同余的实际作用是以下易证的性质的一个推论。

模算术，如果 $x \equiv y(\bmod n)$，$u \equiv v(\bmod n)$，那么

$$x + u \equiv y + v(\bmod n)$$

$$x \cdot u \equiv y \cdot v(\bmod n)$$

这一结论允许我们只对模 n 的余数施行算术运算。例如，由于

$$17 \equiv 5(\bmod 12) \text{ 与 } 40 \equiv 4(\bmod 12),$$

我们得到

$$17+40\equiv 5+4=9(\mathrm{mod}12)$$

与

$$17\times 40\equiv 5\times 4\equiv 8(\mathrm{mod}12).$$

设n为正整数，$n>1$，又设$Z_n=\{0,1,2,\cdots,n-1\}$，注意如果x与y为Z_n中的元素，那么Z_n中有唯一确定的元素r，s，t满足

$$x-y\equiv r(\mathrm{mod}n),$$
$$x+y\equiv s(\mathrm{mod}n),$$
$$x\cdot y\equiv t(\mathrm{mod}n).$$

集Z_n连同这些减法、加法、乘法运算称为模n的整数集，在这个集中，可以象通常一样进行计算，只是计算的结果要化简（模n）为集Z_n的数。

3.2.2. 设$N=22\times 31+11\times 17+13\times 19$，试确定$(a)$ N的奇偶性；(b) N的个位数字(c) N被7除时的余数。（当然，在确定这些数时，不要真的算出N）。

解 对(a)，因为22是偶数，22×31是偶数，11×17是奇数，13×19是奇数，所以和是偶数＋奇数＋奇数，因此是偶数，注意这一推理等价于模2计算：

$$22\times 31+11\times 17+13\times 19\equiv 0\times 1+1\times 1+1\times 1\equiv 1+1\equiv 0(\mathrm{mod}2).$$

对(b)，我们仅需要保留个位数字：22×31的个位数字为2，11×17的个位数字为7，13×19的个位数字为7。因此，N的个位数字为$2+7+7$的个位数字，即6，同样地，这里的分析等价于模10计算N：

$$22\times 31+11\times 17+13\times 19\equiv 2\times 1+1\times 7+3\times 9(\mathrm{mod}10)$$
$$\equiv 2+7+7\equiv 6(\mathrm{mod}10).$$

虽然(a)与(b)在不知道模的算术时也能够解决，如何解决(c)不是显而易见的。这个例题的要点是与前面两种情况相近，作为一种自然的推广，(c)能用模来解决。以7为模：

$$22\times 31+11\times 17+13\times 19\equiv 1\times 3+4\times 3+(-1)\times 5 \pmod 7$$

$$\equiv 3+5-5\equiv 3 \pmod 7$$

因此N比 7 的一个倍数多 3（可以验算：$N=1116=459\times 7+3$）。

3.2.3. 证明21的某个正的倍数以241为其末三位数字。

证 我们要证明有一个正整数n满足

$$21n\equiv 241 \pmod{1000}.$$

因为21与1000互素，有正整数s、t满足

$$21s+1000t=1.$$

将这等式两边同乘241，并改写成

$$21(241s)-241=-241\times 1000t$$

用同余的符号，最后一个方程即

$$21\times 241s\equiv 241 \quad \pmod{1000}.$$

如果s为正数，那么结论已证明，因为可令$n=241s$.如果s不是正数，令$n=241s+1000k$,其中k是足够大的整数使得n为正数（适当地选取k，甚至可以假定n在0与1000之间）。由此得出

$$21n\equiv 21(241s+1000k)\equiv 21\times 241s\equiv 241 \pmod{1000}.$$

3.2.5. 证明对任意的，n个整数的集，有一个子集，含它的元素的和被n整除。

证 设x_1，x_2，…，x_n为已给的整数，令

$$y_1=x_1,$$

$$y_2=x_1+x_2,$$
$$\vdots$$
$$y_n=x_1+x_2+\cdots+x_n.$$
如果对某个i，$y_i\equiv0(\bmod n)$，那么结论成立。假定不是，那么我们有n个数y_1，…，y_n及$n-1$个模n的剩余类（即1，2，…，$n-1$）.因此由抽屉原则，y_i中一定有两个模n同余。设$y_i\equiv y_j(\bmod n)$，$i<j$.则

$$x_{i+1}+\cdots+x_j\equiv y_j-y_i\equiv0(\bmod n)$$

证毕.

在上面的例题中,我们利用了这一事实：当且仅当$a\equiv0(\bmod n)$时，n整除a，利用这一对应,与整除有关的问题可以立即转化为模算术的语言。

3.2.6. 证明如果$2n+1$与$3n+1$都是完全平方数，那么n被40整除。

证 只需证明n能被5与8整除。这等价于证明$n\equiv0(\bmod 5)$与$n\equiv0(\bmod 8)$。

考虑模5，下面的表表明一个平方数模5后等于0，1或-1：

$x(\bmod 5)$	0	1	2	3	4
$x^2(\bmod 5)$	0	1	-1	-1	1

因此$2n+1$与$3n+1$模5后一定是0，1或-1。这里有9种情况：$2n+1$模6后可为0，1或-1，$3n+1$模5后可为0，1或-1。显然能减少为两种，下面将要说到.设$2n+1\equiv a(\bmod 5)$，$3n+1\equiv b(\bmod 5)$，a、$b\in\{0,1,-1\}$.

第一种情况：$a\neq b$。在这种情况中，我们把两个等式相加得

$$2\equiv a+b(\bmod 5)。$$

但这一等式对于我们选定的a与b不成立，所以这种情况不会出现。

第二种情况：$a=b$。在这种情况中，将第二个等式减去第一个等式得

$$n\equiv b-a(\bmod 5)$$

这时n被5整除（这是我们想要证明的一部分）；

现在考虑模8，在这种情况，下面的表表明一个平方数模8后等于0，1或4。

$x(\bmod 8)$	0	1	2	3	4	5	6	7
$x^2(\bmod 8)$	0	1	4	1	0	1	4	1

根据$2n+1$与$3n+1$模8后的值，这里又有九种情况。与模5的情况类似，这九种情况能化为两种情况，并且在每种情况中的论证也完全相同。我们得到结论8整除n。证毕。

在同余的算术中，加法、减法与乘法运算与通常的算术相同（只是一切都关于被考虑的模来进行）。对于除法运算呢？

如果有整数c满足$ac\equiv b(\bmod n)$，那么我们说a整除b模n，如果有整数c满足$ac\equiv 1(\bmod n)$，那么c称为a的（乘法）逆，有时记为a^{-1}，注意如果a有逆，那么只要将方程$ax\equiv b(\bmod n)$的两边同乘a^{-1}，就可以解出$x\equiv a^{-1}b(\bmod n)$。

一个重要的结论是当且仅当a与n互素时整数a关于模n

有乘法逆（见3.2.21）。

作为上一段结论的一个特殊情况，考虑模n为素数p的情况。这时，1，2，…，$p-1$中每一个数与p互素，因此它们有乘法逆。事实上，$Z_p=\{0, 1, 2, \cdots, p-1\}$中的数可以加、减、乘、除（除数非零），它们组成一个域（见4.4节）。

3.2.7. 证明表达式

$$2x+3y, \quad 9x+5y$$

对于同样的整数值x，y，被17整除。

证 只需证明

$2x+3y\equiv 0 \pmod{17}$当且仅当$9x+5y\equiv 0 \pmod{17}$。

我们的计划是将左边的同余式的两边同乘以适当的常数，使得它变为右边的同余式。因此我们要问：是否有常数c存在，使得$c(2x+3y)\equiv 9x+5y \pmod{17}$？要使这成立，必须$2c\equiv 9 \pmod{17}$。因为2与17互素，它有逆，于是$2^{-1}=9$，因此$c=9\times 9=81\equiv 13 \pmod{17}$，所以$2x+3y\equiv 0 \pmod{17}$推出

$$13(2x+3y)\equiv 0 \pmod{17},$$

$$26x+39y\equiv 0 \pmod{17},$$

$$9x+5y\equiv 0 \pmod{17}。$$

反之，将$9x+5y\equiv 0 \pmod{17}$的两边乘以4得到$2x+3y\equiv 0 \pmod{17}$。

下一个例题是一个理论性的结果，不仅从概念的观点来看是有趣的，而且在数学中有很多的应用。

3.2.8. （中国剩余定理）如果m、n是大于1的互素的整数，a、b是任意整数，那么存在整数x满足

$$x\equiv a \pmod{m}$$

$$x \equiv b \quad (\bmod n)。$$

更一般地，如果m_1，m_2，…，m_k是（两两）互素的大于1的整数；a_1，a_2，…，a_k是任意整数，那么存在整数x满足

$$x \equiv a_i (\bmod m_i),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ k。$$

解　考虑n个数a，$a+m$，$a+2m$，…，$a+(n-1)m$，每一个数与a模m同余。并且，没有两个数模n同余：如果$a+im \equiv a+jm(\bmod n)$，$0 \leqslant i < j < n$，那么$(i-j)m \equiv 0(\bmod n)$。但$m$与$n$互素，所以这最后一个同余式仅当$n$整除$i-j$时成立，然而，由于对$i$与$j$的限制，$i-j$不可能为$n$的倍数，因此$i=j$。由此得出数$a$，$a+m$，…，$a+(n-1)m$依某种顺序与0，1，2，…，$n-1$模$n$同余。所以，对某个$i$，$a+mi \equiv b(\bmod n)$。令$x=a+mi$，第一部分即已证明。

更一般的情形，对k进行归纳，可以用类似的方法来证明（令$c=m_1 \cdots m_{k-1}$，考虑$a, a+c, a+2c, \cdots, a+(m_k-1)c$，其中$a$根据归纳假设选定，满足$a \equiv a_i(\bmod m_i)$，$i=1$，2，…，$k-1$。于是$a+jc \equiv a_i(\bmod m_i)$，$i=1$，…，$k-1$，并且其中没有两个数模$m_k$同余，等等。）

3.2.9.　是否有1000000个连续的整数，每一个都含有重复的素因数？

解　设p_1，p_2，…，$p_{1000000}$表示1000000个不同的素数。于是在$i \neq j$时，p_i^2与p_j^2互素，根据中国剩余定理，存在整数x满足

$$x \equiv -k(\bmod p_k^2) \qquad k=1,\ 2,\ \cdots,\ 10^6。$$

由此得出$x+k$被p_k^2整除（即$x+k$有重复的素因数），问题的答案是肯定的：取连续的整数为$x+1$，$x+2$，$x+3$，…，$x+1000000$。

3.2.10. 整点$(x,y)\in Z^2$称为可见的，如果$\gcd(x,y)=1$. 证明或否定：给定一正整数n，存在一个整点(a,b)，它到每一个可见点的距离$\geqslant n$.

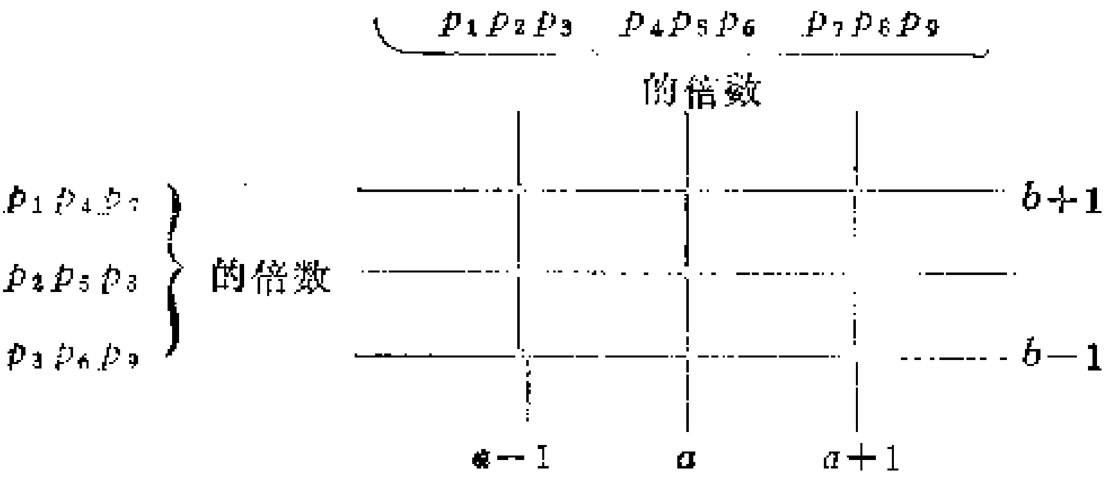
解 首先考虑一种很特殊的情况，但在后面可以明白一般的情况是它的简单的推广。取九个素数$p_1, p_2, \cdots, p_9$. 找一个整点(a,b)满足

$$
\begin{aligned}
a-1 &\equiv 0 \pmod{p_1p_2p_3} \\
a &\equiv 0 \pmod{p_4p_5p_6} \qquad (1) \\
a+1 &\equiv 0 \pmod{p_7p_8p_9}
\end{aligned}
$$

及

$$
\begin{aligned}
b+1 &\equiv 0 \pmod{p_1p_4p_7}, \\
b &\equiv 0 \pmod{p_2p_5p_8}, \qquad (2) \\
b-1 &\equiv 0 \pmod{p_3p_6p_9}.
\end{aligned}
$$

从几何上看，(a,b)是由下图所表征的点：



由于$p_1p_2p_3$，$p_4p_5p_6$，$p_7p_8p_9$互素，中国剩余定理指出有整数a存在满足方程(1)。类似地，由于$p_1p_4p_7$，$p_2p_5p_8$，$p_3p_6p_9$互素，存在整数b满足(2)。对这样选出的a与b，显然距(a,b)最近的八个整点是不可见的。例如，点$(a,b+1)$为$(k_1p_4p_5p_6, k_2p_1p_4p_7)$的形式，$k_1$，$k_2$是整数。由于$p_4$为

横坐标与纵坐标的公因子，这个点是不可见的。类似的论证适用于其它七个整点。

一般的情况可以用完全同样的方法解决，我们把它留作问题3.2.26.

问题

3.2.11. 证明从集$\{1, 2, 3, \cdots, 100\}$中取55个数所成的任一子集中一定含有差为10、12、13的数，但不一定含有一对差为11的数。

3.2.12. 一行列式的元素为任意整数，确定这行列式的值为奇数的概率（提示：以2为模）.

3.2.13.

(a) 确定下面的矩阵为满秩还是降秩：

$$\begin{pmatrix} 54401 & 57668 & 15982 & 103790 \\ 33223 & 26563 & 23165 & 71489 \\ 36799 & 37189 & 16596 & 46152 \\ 21689 & 55538 & 79922 & 51237 \end{pmatrix}$$

（提示：如果$\det A \neq 0$，那么矩阵A称为满秩的.考虑所给矩阵的行列式的奇偶性，即模2计算它的行列式）

(b) 确定下面的矩阵为满秩还是降秩：

$$\begin{pmatrix} 64809 & 91185 & 42391 & 44350 \\ 61372 & 26563 & 23165 & 71489 \\ 82561 & 39189 & 16596 & 46152 \\ 39177 & 55538 & 79922 & 51237 \end{pmatrix}$$

3.2.14.

(a) 证明$2^{2x+1}+1$被 3 整除。

(b) 证明或否定：如果$x\equiv y(\mathrm{mod}\, n)$，那么

$2^x\equiv 2^y(\mathrm{mod}\, n)$。

(c) 证明$4^{3x+1}+2^{3x+1}+1$被 7 整除。

(d) 如果$n>0$，证明12整除$n^4-4n^3+5n^2-2n$。

(e) 证明$(2903)^n-(803)^n-(464)^n+(261)^n$被1897整除。

3.2.15.

(a) 证明没有一个比 4 的倍数大 3 的素数是两个平方数的和（提示：模 4 ）。

(b) 证明序列（10进制）

11，111，1111，11111，…

中没有平方数。

(c) 证明任意两个奇数的平方差被 8 整除。

(d) 证明$2^{70}+3^{70}$被13整除。

(e) 证明两个奇数的平方和不是平方数。

(f) 确定$a^2+b^2+c^2=a^2b^2$的所有整数解(提示：以 4 为模进行分析）。

3.2.16.

(a) 如果$x^3+y^3=z^3$有整数解x，y，z，证明这三个数中一定有一个是 7 的倍数。

(b) 如果n是大于 1 的正整数使2^n+n^2为素数，证明$n\equiv 3(\mathrm{mod}\, 6)$。

(c) 设x为整数，比24的倍数少 1 ，证明如果a，b为正整数满足$ab=x$，那么$a+b$为24的倍数。

(d) 证明如果n^2+m与n^2-m是完全平方，那么m被 24

整除。

3.2.17. 设集S中元素为素数，满足条件：a、$b\in S$(a,b不要求互异)可推出$ab+4\in S$，证明S必为空集（提示：一种解法以7为模）。

3.2.18. 证明没有整数x，y满足

$$x^2+3xy-2y^2=122.$$

（提示：视为x的二次方程，考虑判别式模7，它能够为完全平方吗？）

3.2.19. 给定整数n，证明总能找到一个仅由数字0与1组成的（十进制）整数，它被n整除。

3.2.20. 证明如果n整除一个Fibonacci数，那么它整除无限多个Fibonacci数。

3.2.21. 设a与n为整数，$n>1$.证明当且仅当a与n互素时，方程$ax\equiv1(\mathrm{mod}\,n)$有解。

3.2.22. 设a，b，c，d为固定整数，d不被5整除.假定m为整数，使得

$$am^3+bm^2+cm+d$$

被5整除.证明存在整数n，使

$$dn^3+cn^2+bn+a$$

也被5整除。

3.2.23. 证明对于同一个正整数n，$\frac{21n-3}{4}$与$\frac{15n+2}{4}$不能同为整数。

3.2.24.

(a) 是否存在n个连续的整数，使得第j个整数，$1\leqslant j\leqslant n$，有一个因子不整除这个数列中的其它的数？

(b) 是否存在n个连续的整数，使得第j个整数，$1\leqslant j$

$\leqslant n$，至少有j个因子，每一个不整除这个数列中的其它的数？

3.2.25. 设$m_0, m_1, \cdots, m_r$为正整数，两两互素，证明存在$r+1$个连续整数$s, s+1, \cdots, s+r$使得m_i整除$s+i$，$i=0, 1, \cdots, r$.

3.2.26. 完成3.2.10的证明.

补充例题

3.3.17, 3.4.3, 3.4.9, 4.1.3, 4.2.4, 4.2.14, 4.3.4, 4.3.5, 4.4.6, 4.4.7, 4.4.8, 4.4.9, 4.4.19, 4.4.20, 4.4.21, 4.4.22, 4.4.23, 4.4.24, 4.4.29, 4.4.30, 4.4.31.

3.3 唯一分解

初等数论的核心中一个极有用、极普遍的结果是每一个大于1的自然数都可以唯一地（除了因子的顺序）分解为素因子的积。更确切地说，每个自然数n可以用一种而且只可以用一种方式表示成

$$n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$$

的形式，其中$p_1, p_2, \cdots, p_k$为不同的素数，$a_1, a_2, \cdots, a_k$为正整数。这里有一些容易证明极为有用的推论.

3.3.1. $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$的所有因数都是

$$m=p_1^{b_1}p_2^{b_2}\cdots p_k^{b_k},\ 0\leqslant b_i\leqslant a_i,\ i=1, 2, \cdots, k,$$

的形式，并且每一个这样的数是n的因数。由此得出n恰有$(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_k+1)$个不同的因数。

3.3.2. 当且仅当对每一个i，a_i为偶数时，整数$n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$是完全平方。当且仅当每个$a_i$是3的倍数时，$n$是完全立方。等等。

3.3.3. 设a，b，…，g为有限多个正整数，它们的唯一分解为

$$a=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k},\quad b=p_1^{b_1}p_2^{b_2}\cdots p_k^{b_k},\quad \cdots,$$

$$g=p_1^{g_1}p_2^{g_2}\cdots p_k^{g_k}.$$

其中a_1，…，a_k，b_1，…，b_k，…，g_1，…，g_k为非负整数（可以有一些为0）。那么

$$\gcd(a,\ b,\ \cdots g)=p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p^{m_k},$$

$$\mathrm{lcm}(a,\ b,\ \cdots,\ g)=p_1^{M_1}p_2^{M_2}\cdots p_k^{M_k},$$

其中$m_i=\min\{a_i,\ b_i,\ \cdots,\ g_i\}$，$M_i=\max\{a_i,\ b_i,\ \cdots,\ g_i\}$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$。

由此易得

$$\gcd(a,\ b,\ \cdots,\ g)\cdot\mathrm{lcm}(a,\ b,\ \cdots,\ g)=ab\cdots g$$

$\gcd(a,\ b)\mathrm{lcm}(a,\ b)=ab$

3.3.4. 用唯一分解证明$\sqrt{2}$为无理数。

证 设有整数r与s满足$\sqrt{2}=r/s$，那么$2s^2=r^2$。但这等式不能成立（根据唯一分解），因为等式左边，素数2的幂指数为奇数，而等式右边，2的幂指数为偶数（2在s^2与r^2中出现偶数次（可能是零次））。这个矛盾推出$\sqrt{2}$必为无理数。

3.3.5. 求出最小的正整数n，使得$\frac{n}{2}$为平方数，$\frac{n}{3}$为立方数，

〔译注〕：这一等式应改为$\mathrm{gcdb}(a,\ b)\mathrm{lcm}(a,\ b)=ab$

$\frac{n}{5}$为完全5次幂。

解 因为n被2、3、5整除，可设$n=2^a3^b5^c$。于是$\frac{n}{2}=2^{a-1}3^b5^c$，$\frac{n}{3}=2^a3^{b-1}5^c$，$\frac{n}{5}=2^a3^b5^{c-1}$，由所需满足的条件，$a-1$必为偶数，$a$必为3与5的倍数。$a$中最小的是$a=15$，类似地，$b$与$c$的最小值为$b=10$，$c=6$。因此$n=2^{15}3^{10}5^6$是满足要求的最小正整数。

3.3.6. 证明有且仅有一个自然数n使得$2^8+2^{11}+2^n$为完全平方。

证 设$m^2=2^8+2^{11}+2^n$，则

$$\begin{aligned}2^n&=m^2-2^8-2^{11}\\&=m^2-2^8(1+2^3)\\&=m^2-(3\times 2^4)^2\\&=(m-48)(m+48).\end{aligned}$$

由于唯一分解定理，存在非负整数s与t，使得

$$m-48=2^s,\quad m+48=2^t,\quad s+t=n.$$

于是$m=2^s+48$，$m=2^t-48$，所以

$$2^s+48=2^t-48$$

$$2^t-2^s=96$$

$$2^s(2^{t-s}-1)=2^5\times 3.$$

因为$2^{t-s}-1$是奇数，由唯一分解定理得$2^{t-s}-1=3$，从而$s=5$，$t=7$，$n=12$。

3.3.7. 设n为已知的正整数，方程

$$\frac{xy}{x+y}=n$$

有多少有序的正整数对(x,y)为它的解？

解 将方程写成

$$xy=n(x+y),$$

$$xy-nx-ny=0,$$

$$(x-n)(y-n)=n^2.$$

因为我们想得到正整数解，所以必须$x>n$，$y>n$($0<x<n$与$0<y<n$推出$(x-n)(y-n)<n^2$)。

设n的素因数分解为$p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$。

则$n^2=p_1^{2a_1}p_2^{2a_2}\cdots p_k^{2a_k}$。$n^2$的每一个因数确定一个解，所以解的个数为$(2a_1+1)(2a_2+1)\cdots(2a_k+1)$。

3.3.8. 设r与s为正整数.对于满足

$3^r\cdot7^s=\mathrm{lcm}(a, b, c)=\mathrm{lcm}(a, b, d)=\mathrm{lcm}(a,c,d)=\mathrm{lcm}(b, c, d)$

的有序的正整数的四元组(a, b, c, d)的个数导出一个公式。

解 由3.3.3的结论，显然a，b，c，d中的每一个都具有3^m7^n的形式，其中m属于$\{0,1,\cdots,r\}$，n属于$\{0,1,\cdots,s\}$。又，对于这四个数中的至少两个数，m为r。及这四个数中的至少两个数，n为s。对4个m有$\binom{4}{2}r^2$种容许的选择，使得其中恰有两个等于r，有$\binom{4}{3}r$种容许的选择，使得其中恰有三个等于r，有$\binom{4}{4}$种容许的选择，使得所有的都等于r。合并起来，有

$$\binom{4}{4}+\binom{4}{3}r+\binom{4}{2}r^2$$

种对四个m的允许的选择。类似地，有

$$\binom{4}{4}+\binom{4}{3}s+\binom{4}{2}s^2$$

种对四个n的允许的选择。因此所求的个数为$(1+4r+6r^2)(1+4s+6s^2)$。

3.3.9. 已知正整数x，y，z，证明

$(x, y)(x, z)(y, z)[x, y, z]^2=[x,y][x, z][y, z](x, y, z)^2$，其中$(a, \cdots, g)$与$[a, \cdots, g]$分别表示$\gcd(a, \cdots, g)$与$\operatorname{lcm}(a, \cdots, g)$。

证 由唯一分解定理，只需证明对每一个素数p，p在左边的素因数分解中的幂等于p在右边的幂。因此，设$x=p^a r$，$y=p^b s$，$z=p^c t$，r，s，t为与p互素的整数。我们可以假定（由于对称性，必要时重新编号）$a\leqslant b\leqslant c$。于是p在$[x, y, z]^2$的唯一分解式中的幂指数为$2c$，在(x, y)，(x, z)，与(y, z)中的幂指数分别为a，a与b。因此p在左边的幂指数为$2a+b+2c$。

同样，p在右边的幂指数为$b+c+c+2a=2a+b+2c$。于是，根据前面所说，证明已经完成。

3.3.10. 证明1000!以249个零为结尾。

证 记$1000!=2^a5^b r$，其中r与10互素。显然$a\geqslant b$，并且1000!的末尾的零的个数等于b。因此我们必须求出b。

在数列1，2，3，4，5，6，…，1000中每第5个数被5整除，因此在这数列中有$\left[\frac{1000}{5}\right]=200$个5的倍数。这数列中每第25个数被25整除，因此这些数多贡献一个因数5，有$\left[\frac{1000}{25}\right]=40$个这样的数。这数列每第125个数被125

整除，这些数多贡献一个因数5，有$\left[\frac{1000}{125}\right]=8$个这样的数.每第625个数多贡献一个因数5，有$\left[\frac{1000}{625}\right]=1$个这样的数。因此$b=\left[\frac{1000}{5}\right]+\left[\frac{1000}{25}\right]+\left[\frac{1000}{125}\right]+\left[\frac{1000}{625}\right]$
$=200+40+8+1=249$.

完全同样地，在$n!$中p的最高次幂的指数由（有限）和

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots$$

给出.

3.3.11. 证明有无限多个形如$6n-1$的素数.

证 首先注意如果p是大于3的素数，那么$p\equiv1(\bmod 6)$或$p\equiv-1(\bmod 6)$（如果$p\equiv2(\bmod 6)$，那么$p=6K+2$，K为整数，推出p为偶数，矛盾.类似的论证适用于$p\equiv3(\bmod 6)$或$p\equiv4(\bmod 6)$）.

假设只有有限多个$6n-1$形的素数.考虑数$N=p!-1$，其中p是$6n-1$形的素数中最大的.将N写成素因数的积，

$N=p!-1=p_1p_2\cdots p_m$.

注意每一个素数p_k大于p，因为如果$p_k\leqslant p$，那么等式(1)表明p_k整除1，这是不可能的.由于p是与-1模6同余的最大素数，所以对每一个K，$p_k\equiv1(\bmod 6)$.

考虑等式(1)模6，得

$p!-1\equiv1(\bmod 6)$

或等价地；

$p!\equiv2(\bmod 6)$.

但这是不可能的，因为$p!\equiv0(\bmod 6)$.所以有无穷多个形如

$6n-1$的素数。

问题

3.3.12． 某学院学生总人数少于5000，$\frac{1}{3}$的学生是一年级，$\frac{2}{7}$是二年级，$\frac{1}{5}$是三年级，其余的是四年级．历史系开了一门普及课，一年级有$\frac{1}{40}$的人参加，二年级有$\frac{1}{16}$，三年级有$\frac{1}{9}$，这个历史班的余下的$\frac{1}{3}$全是四年级的，问在这个历史班中有多少学生？

3.3.13． 求有28个因数的最小数。

3.3.14． 已知四个不同的整数a、b，c，d使

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)-4=0$$

有整数根r，证明$4r=a+b+c+d$。

3.3.15．

(a) 证明$\sqrt[3]{72}$为无理数。

(b) 证明除去0，0，0外，没有一组整数m，n，p使得$m+n\sqrt{2}+p\sqrt{3}=0$。

3.3.16． 已知正整数a，b，c，d满足$a^3=b^2$，$c^3=d^2$，$c-a=25$，试确定a，b，c与d。

3.3.17． 证明如果对于某一组正整数a，b，c，积ab，ac与bc是完全立方，那么a，b，c也必须是完全立方。

3.3.18． 一间房间有n个抽屉，标上号码1至n，全部锁上。n个人p_1，p_2，…，p_n排成一列，依次通过这个房间，每个人p_k将（并且仅将）那些标号被k整除的抽屉的状态改变，即如果抽屉是开的，p_k将它锁上，如果抽屉是锁的，p_k将它打开．在n个人全部通过这间房间后有哪些抽屉是打开的？如

果这n个人进行同样的操作，但依照某种不同的次序通过，结果又如何？

3.3.19. 从数直线的几何图形，清楚地看出任意的n个连续整数中，有一个为n整除。这个事实常常用到，例如在下列问题之中。

(a) 证明如果$n>2$，2^n-1与2^n+1中有一个为素数，那么另一个为合数。

(b) 求出最大的数N，使得对每个整数n，n^5-5n^3+4n被N整除。

(c) 证明每个正整数都有一个倍数，它的十进制表示中含有全部的十个数字。

3.3.20. 对每个正整数n，令$H_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$。证明对于$n>1$，$H_n$不是整数（提示：假设$H_n$是整数，在等式两边同乘lcm$(1, 2, \cdots, n)$，证明所得等式的左边为偶数，而右边为奇数。）

3.3.21. 如果$\gcd(a, b)=1$，证明

(i) $\gcd((a+b)^m, (a-b)^m)\leqslant 2^m$，

(ii) $\gcd(a^m+b^m, a^m-b^m)\leqslant 2$。

3.3.22. 对正整数$a, \cdots, g$，令$(a, \cdots, g)$与$[a, \cdots, g]$分别表示$\gcd(a, \cdots, g)$与lcm$(a, \cdots, g)$。证明

(a) $xyz=(xy, xz, yz)[x, y, z]$

(b) $(x, [y, z])=[(x, y), (x, z)]$，

(c) $[x, (y, z)]=([x, y], [x, z])$，

(d) $([x, y], [x, z], [y, z])=[(x, y), (x, z), (y, z)]$，

(e) $[x, y, z](x, y)(x, z)(y, z)=xyz(x, y, z)$，

(f) $(x, y)=(x+y, [x, y])$.

3.3.23. 设m被1，2，…，n整除．证明$1+m(1+i)$，$i=0$，1，2，…，n，两两互素．

3.3.24. 如果$r+1$个正整数($r\geqslant 1$)的素因数分解中总共只含有r个素数，证明这些数有一个子集，它们的积为完全平方．

3.3.25.

(a) 确定$x^y=y^x$的所有正有理数解．

(b) 确定$x^{x+y}=(x+y)^y$的所有正有理数解．

3.3.26. 设$a^2+b^2=c^2$，a，b，c为整数．设$\gcd(a, b)=\gcd(a, c)=\gcd(b, c)=1$．证明存在整数$u$与$v$使得$c-b=2u^2$，$c+b=2v^2$，$\gcd(u, v)=1$．从而得到$a=2uv$，$b=v^2-u^2$，$c=v^2+u^2$．(提示：考察模4，$a$与$b$不能都是奇数；也不可能都是偶数．因此不失一般性，$a$为偶数，$b$为奇数．)

反过来，证明如果给定u与v，那么由上面的公式给出的三个数a，b，c满足$a^2+b^2=c^2$．

3.3.27. 求出所有的组成算术级数的三个完全平方数(提示：设$a<b<c$与$b^2-a^2=c^2-b^2$或等价地，$a^2+c^2=2b^2$．设$s=\frac{c+a}{2}$，$t=\frac{c-a}{2}$．证明$s^2+t^2=b^2$．应用3.3.26的结果)．

3.3.28.

(a) 假定只有有限多个素数的形式为$6n-1$，设它们为p_1，…，p_k．考虑$N=(p_1\cdots p_k)^2-1$，导出矛盾．

(b) 证明有无限多个形如$4n-1$的素数．

补充例题

1.10.9，1.10.10，2.6.1，3.1.4，3.4.8，4.1.3，4.2.3，4.2.16b，4.4.9，5.2.1，5.2.4，5.2.6，5.2.9，5.2.14，5.2.15，5.2.16，5.2.17．

3.4 记 数 法

假定大家熟悉表示实数的记数法，即，如果b是大于1的整数（称为底），每一个实数x可以（唯一地）记为

$$x=A_nA_{n-1}\cdots A_1A_0.a_1a_2a_3\cdots$$

其中A_0，…，A_n，a_1，a_2，…（称为数字）是整数，$0\leqslant A_i<b$，$0\leqslant a_i<b$，并且没有整数m使得对所有$K>m$，$a_k=b-1$.这一记数（b进制）表示的是数列的和

$$A_n\cdot b^n+A_{n-1}\cdot b^{n-1}+\cdots+A_1\cdot b+A_0+a_1b^{-1}+a_2b^{-2}+\cdots.$$

3.4.1. 设C为一类正整数，在3进制表示时，记数没用到数字2.证明C中没有三个整数成算术级数.

证 设d表示三个正整数所成的任一算术级数的公差.又设d在3进制表示时，记数自右边数起，第一个不为0的数字在第k位出现。令a为任一正整数，将它写成三进制。下面的表，根据a与d的第k位数字，给出了整数a，$a+d$与$a+2d$的k位数字：

以下各数的k位数字	d的k位数字为1 a的k位数字为 0	1	2	d的k位数字为2 a的k位数字为 0	1	2
a	0	1	2	0	1	2
$a+d$	1	2	0	2	0	1
$a+2d$	2	0	1	1	2	0

在每一种情况中，a，$a+d$，$a+2d$中有一个的k位数字为2，即相应的数不在C中。

3.4.2. $[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]=12345$有解吗？

解 设x为解．易知$195<x<196$（因为$63\times 195=12285<12345<12348=63\times 196$）．将$x$的分数部分用2进制表示为（$a$，$b$，$c$，…为0或1）：

$$x=195+.abcdef\cdots$$

于是

$$2x=2\times 195+a.bcdef\cdots$$
$$4x=4\times 195+ab.cdef\cdots$$
$$8x=8\times 195+abc.def\cdots$$
$$16x=16\times 195+abcd.ef\cdots$$
$$32x=32\times 195+abcde.f\cdots$$

这样我们得到

$$[x]=195,$$
$$[2x]=2\times 195+a$$
$$[4x]=4\times 195+2a+b$$
$$[8x]=8\times 195+4a+2b+c$$
$$[16x]=16\times 195+8a+4b+2c+d$$
$$[32x]=32\times 195+16a+8b+4c+2d+e$$

相加得$[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]=63\times 195+31a+15b+7c+3d+e$.问题化为求$a$，$b$，$c$，$d$，$e$，每一个为0或1，满足$31a+15b+7c+3d+e=60$.但这个等式在对$a$，$b$,$c$,$d$，$e$的限制下不可能成立，因为$31a+15b+7c+3d+e\leqslant 31+15+7+3+1=57<60$.因此没有$x$能满足方

程。

在一个整数写成十进制（底为10）时，很容易确定它是否被 2 或 5 整除。此外还有一些便于应用的整除判别法。例如：当且仅当整数N的末两位数字所成的数被 4 整除，N 被 4 整除.为了证实这点，将N写成十进制：

$$N=(a_n\cdot 10^n+\cdots+a_2\cdot 10^2)+(a_1\cdot 10+a_0)$$

注意$a_n\cdot 10^n+\cdots+a_2\cdot 10^2$永远被 4 整除，因此当且仅当$4|(a_1\cdot 10+a_0)$时，$4|N$。

最惊人的、最有用的一种整除判别法是当且且当一个整数的数字和（在十进制中）被 9 整除时，这个数被 9 整除．为了说明为什么是这样，注意$10\equiv 1(\bmod 9)$，因此由模算术的性质，$10^2\equiv 1(\bmod 9)$，$10^3\equiv 1(\bmod 9)$等等.从而

$$N=a_n\cdot 10^n+\cdots+a_1\cdot 10+a_0\equiv a_n+\cdots+a_1+a_0(\bmod 9)$$

类似的证明表明当且仅当一个整数的数字和被 3 整除时，这个数被 3 整除．作为这个判别法的一个应用，我们问：对什么数字 x，$4324x98765223$被 3 整除？我们只需将数字模 3 相加，选取 x 使得数字和模 3 同余于 0．在这一例中，数字和模 3 为 $1+x$．因此当且仅当 $x=2$，5 或 8 时，这个数为 3 整除。

3.4.3. 在4444^{4444}写成十进制时，它的数字和为A，A的数字和为B.求B的数字和（A与B都写成十进制）.

解　设$N=4444^{4444}$，则$N<(10^5)^{4444}=10^{22220}$，这意味着在$N$写成十进制时，它的数字不多于22220个.由于$N$的每个数字小于或等于9.我们知道$A<22200\times 9=199980$.

同样地，A至多有 6 个数字，所以A的数字和一定小于$54(=6\times 9)$，即$B<54$。

在小于54的正整数中，数字和最大的数是49，它的数字和等于13．设C为B的数字和，我们证明了$C\leqslant 13$．

根据这个问题之前的推理，我们知道

$$N\equiv A\equiv B\equiv C\ (\mathrm{mod}\ 9)$$

因此要算出C的同余类，可计算N的同余类．首先，$4444=9\times 493+7$，因此$4444\equiv 7\ (\mathrm{mod}\ 9)$．又$7^3\equiv 1(\mathrm{mod}\ 9)$．由于$4444=3\times 1481+1$，我们得到

$$\begin{aligned}4444^{4444}&\equiv 7^{4444}(\mathrm{mod}\ 9)\\&\equiv 7^{3\times 1481}\times 7(\mathrm{mod}\ 9)\\&\equiv 7(\mathrm{mod}\ 9).\end{aligned}$$

因此，$C\equiv 7(\mathrm{mod}\ 9)$并且$C\leqslant 13$．满足这两个要求的唯一的数是$C=7$，于是此问题解决．

3.4.4．一个正无理数的（有序的）三元数组(x_1,x_2,x_3)，其中$x_1+x_2+x_3=1$．如果每个$x_i<\frac{1}{2}$，那么称它为均衡的．如果一个三元数组不是均衡的，比如说$x_j>\frac{1}{2}$．我们施行下面的“均衡作用”：

$$B(x_1,\ x_2,\ x_3)=(x'_1,\ x'_2,\ x'_3),$$

其中$x'_i=2x_i$，如果$i\neq j$；而$x'_j=2x_j-1$．如果新的三元数组是不均衡的，再对它施行均衡作用．这样继续下去．是否经过有限多步的均衡作用，总能得到一个均衡的三元数组？

解　将x_1，x_2，x_3写成二进制，如本节开始所描绘的那样：

$$x_1=.a_1a_2a_3\cdots,$$

$$x_2=.b_1b_2b_3\cdots,$$

$x_3 = .c_1c_2c_3\cdots$,

其中a_i，b_i，c_i均为0或1。

每个$x_i<\frac{1}{2}$就是a_1，b_1，c_1都为0.注意均衡作用与将小数点向右移一位然后去掉整数部分是一致的。于是，如果x_1，x_2，x_3不是均衡的，那么x_1'，x_2'，x_3'的二进制表示为

$$x_1' = .a_2a_3a_4\cdots$$
$$x_2' = .b_2b_3b_4\cdots$$
$$x_3' = .c_2c_3c_4\cdots.$$

可以给出很多例子表明这一过程不一定最终导出一个均衡的三元数组.例如，定义x_1，x_2，x_3（采用前面的记号）为

$$a_i=\begin{cases}1 & 若i为完全平方,\\ 0 & 其它,\end{cases}$$

$$b_i=\begin{cases}1 & 若i比一个完全平方大1,\\ 0 & 其它,\end{cases}$$

$$c_i=\begin{cases}1 & 若a_i+b_i=0,\\ 0 & 其它,\end{cases}$$

即
$$x_1 = .1001000010000000100\cdots$$
$$x_2 = .0100100001000000010\cdots$$
$$x_3 = .0010011100111111001\cdots$$

x_1、x_2、x_3都是无理数（有理数是循环小数），并且它们的和为1（因为$x_1+x_2+x_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1$）.反复应用均衡作用决不会把$x_1$，$x_2$，$x_3$变为均衡的三元数组（因

为，在每一种情况中，a_i，b_i，c_i中总有一数等于1）。

3.4.5. （2.5.10的继续）．设f为正整数上的函数，满足

$$f(f(1)=1k)=2f(k)-1,$$
$$f(2k+1)=2f(k)+1.$$

设a为任意正整数，它的二进制表示为

$$a=a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0(=a_n\cdot 2^n+a_{n-1}\cdot 2^{n-1}+\cdots+a_1\cdot 2+a_0).$$

证明

$$f(a)=b_n\cdot 2^n+b_{n-1}\cdot 2^{n-1}+\cdots+b_1\cdot 2+b_0$$

其中

$$b_i=\begin{cases}1 & 若a_i=1,\\ -1 & 若a_i=0,\end{cases}$$

这思想是将a的二进制表示中的每个0改成-1．例如，对于$n=10$，$f(1010_2)=1\bar{1}1\bar{1}_2$（$\bar{1}$表示$-1$）$=8-4+2-1=5$。

证 我们对a的二进制表示的数字的个数进行归纳。

在$a=1$时结论成立．假定在a的数字个数少于$k+1$时结论成立．考虑有$k+1$个数字（以2为底）的整数a，即

$$a=a_ka_{k-1}\cdots a_2a_1a_0.$$

如果$a_0=0$，那么$a=2(a_ka_{k-1}\cdots a_1)$，$f(a)=2f(a_k\cdots a_1)-1=2(b_k\cdot 2^{k-1}+\cdots+b_2\cdot 2+b_1)-1=b_k\cdot 2^k+\cdots+b_2\cdot 2^2+b_1\cdot 2+b_0$，结论成立．如果$a_0=1$，那么$a=2(a_ka_{k-1}\cdots a_1)+1$，$f(a)=2f(a_k\cdots a_1)+1=2(b_k2^{k-1}+\cdots+b_1)+1=b_k2^k+\cdots+b_12+b_0$，结论仍然成立。

这是数的表示的一个很好的应用．注意在计算时多么简单：$f(25)=f(11001_2)=11\bar{1}\bar{1}1_2=16+8-4-2+1=19$。

在下一个例题中，一种特别的数的表示帮助我们研究和

理解一个在高等分析中极重要的实数集合。

3.4.6. 设K为[0, 1]的子集，它由所有具有三进制表示

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} ,$$

其中$a_n=0$或2，的数组成.K称为Cantor集.证明K是总长度为1的互不相交的开区间I_n，$n=1, 2, 3, \cdots$，的并的余集。

证 首先注意K中没有区间$I_1=\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$中的数. 这是因为这个区间中的数的三进制表示为

$$(.1a_2a_3a_4\cdots)_3$$

的形式。

类似地.K中不含区间$I_2=\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$中的数。这是因为这些数的三进制表示为

$$(.01a_3a_4a_5\cdots)_3$$

的形式。

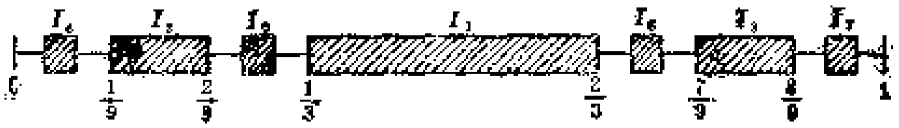


图3.2

又，区间$I_3=\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$的三进制表示为

$$(.21a_3a_4a_5\cdots)_3$$

的形式，所以它们也不在K中.同样地，区间$I_4=\left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right)$，$I_5=\left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right)$，$I_6=\left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right)$都不含$K$中的元素。

显然这一过程可以按部就班地进行下去，图3.2与表3.1

有助于把这想法精确化。

为对任意正整数n找出I_n（即找出X_n与Y_n），将n写成二进制：

$$n=(a_k a_{k-1}\cdots a_2 a_1)_2$$

（即$n=a_1+2a_2+\cdots+2^{k-1}a_k$，$a_i=0$或1），令$b_i=2a_i$，$i=1, 2, \cdots, k$，并令$I_n=(X_n, Y_n)$，其中

表3.1. $I_n=(X_n, Y_n)$

n（十进制）	n（二进制）	Xn（三进制）	Yn（三进制）	In（分数形式）
1	1	0.1	0.2	$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$
2	10	0.01	0.02	$(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$
3	11	0.21	0.22	$(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$
4	100	0.001	0.002	$(\frac{1}{27}, \frac{2}{27})$
5	101	0.201	0.202	$(\frac{19}{27}, \frac{20}{27})$
6	110	0.021	0.022	$(\frac{7}{27}, \frac{8}{27})$
7	111	0.221	0.222	$(\frac{25}{27}, \frac{26}{27})$
8	1000	0.0001	0.0002	$(\frac{1}{81}, \frac{2}{81})$
9	1001	0.2001	0.2002	$(\frac{55}{81}, \frac{56}{81})$

$$X_n=\frac{b_1}{3}+\frac{b_2}{3^2}+\cdots+\frac{b_{k-1}}{3^{k-1}}+\frac{1}{3^k}=(.b_1b_2\cdots b_{k-1}1)_3.$$

$$Y_n=\frac{b_1}{3}+\frac{b_2}{3^2}+\cdots+\frac{b_{k-1}}{3^{k-1}}+\frac{2}{3^k}=(.b_1b_2\cdots b_{k-1}2)_3.$$

易知对每个n,X_n与Y_n为k中元素（注意$X_n=\frac{b_1}{3}+\frac{b_2}{3^2}+\cdots+\frac{b_{k-1}}{3^{k-1}}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2}{3^{k+i}}$）并且$I_n$中没有元素在$k$中（$I_n=(X_n,Y_n)$中每个元素的第$K$个数字是1）．由此可知$I_n$互不相交．

又I_n的长为$\frac{1}{3^k}$，这里$K=[\log_2 n]$，因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}I_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{[\log_2 n]+1}}=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1}\left(\frac{1}{3^{[\log_2 n]+1}}\right)\right)$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}2^m\cdot\frac{1}{3^{m+1}}=\frac{1}{3}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^m=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=1.$$

从我们对I_n的作法，可以清楚地看出当区间I_n全从$(0,1)$中移去后，剩下的是K，于是结论成立．

问题

3.4.7. 证明不存在这样的整数，当它的首位数字移至末尾时，扩大两倍．

3.4.8. 求具有下列性质的最小的自然数

(i) 它的十进制表示以6为末位数字．

并且

(ii) 如果擦去末位数字6而将它写在其它数字的前面，那么所得的数是原数n的4倍．

3.4.9.

(a) 求方程$(360+3x)^2=492y04$的正整数解x、y．

(b) 导出一个数被11整除的判别法．（提示$10\equiv$

$-1 \pmod{11}$.)

(c) 如果62ab427是99的倍数，求a与b.

(d) 将数字0，1，2，…，9依随机的顺序放入5_383_8_2_936_5_8_203_9_3_76_的空位中，求所得的数被396整除的概率.

3.4.10. 已给一个有两个盘子的天平及一组重为1，3，3^2，3^3，3^4，…磅的砝码.证明可以称出任一整数磅的重量(重量可放在任一个盘内).（提示：证明每一个正整数可以表示成3的幂的和或差）.

3.4.11.

(a) 逐步地写下所有的整数，得到数0.1234567891011121314…，它表示有理数吗？

(b) 数0.011010100010100…表示有理数吗？其中$a_n=1$，如果n为素数，否则$a_n=0$.

3.4.12. 设$S=a_0a_1a_2\cdots$，其中$a_n=0$，如果在n的二进制表示中有偶数个1；$a_n=1$，如果有奇数个1.于是，$S=01101001100\cdots$.定义$T=b_1b_2b_3\cdots$，其中b_i是在S的第i个0与第$i+1$个0之间的1的个数.于是$T=2102012\cdots$.证明T仅含三个数字0，1，2.

3.4.13. 证明在闭区间[0，1]的点与开区间(0，1)之间的点之间存在着一一对应.给出一个这种对应的显表达式.

补充例题

1.1.1（解法5），4.4.8，5.2.5，6.1.1，6.1.4，6.1.8，6.2.13，7.6.6.

3.5 复数的算术

回忆一下，一个复数z可以写成几种不同的形式：

直角坐标式：$z=a+bi$，

极坐标式：$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，

指数式：$z=re^{i\theta}$，

其中a，b，r、θ如图3.3所示，$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$。角$\theta$是$z$的幅角（除相差$2\pi$的一个倍数外是确定的），$r$是$z$的模（绝对值），分别记为$\arg z$与$|z|$。数$a$与$b$分别称为$z$的实部与虚部，并记为$R_e(z)$与$T_m(z)$。

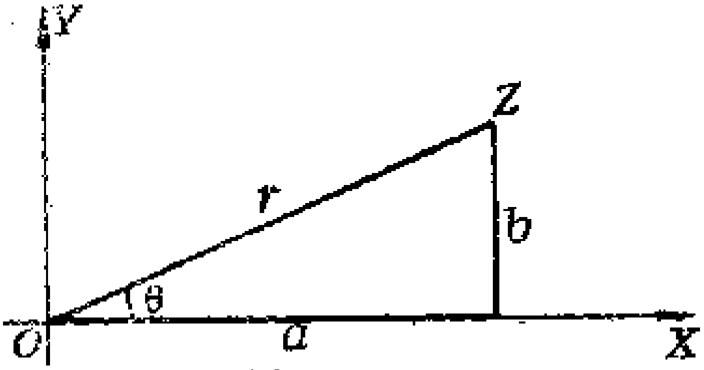


图3.3

如果$z=a+bi$，$w=c+di$，那么$z+w=(a+c)+i(b+d)$，在几何上对应于以z与w为邻边的平行四边形的对角线（见图3.4）。

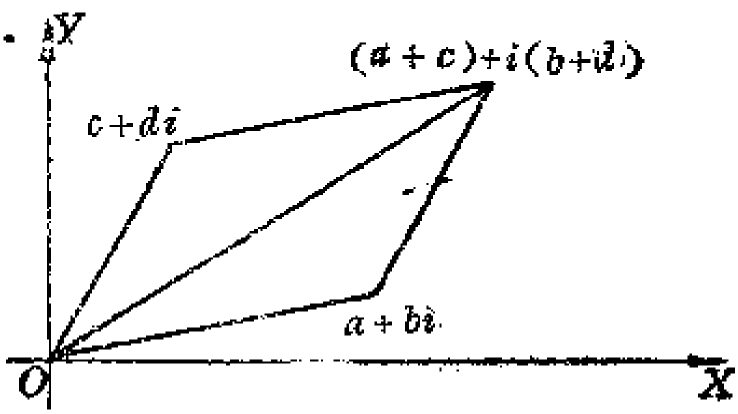


图3.4

如果$z=re^{i\theta}$，$w=se^{i\varphi}$，那么$zw=rse^{i(\theta+\varphi)}$。注意$|zw|=rs=|z|\cdot|w|$及$\arg zw=\theta+\varphi=\arg z+\arg w$；即在相乘时，绝对值相乘，幅角相加。

3.5.1. 如果a、b与n为正整数，证明有正整数x，y使得

$$(a^2+b^2)^n=x^2+y^2.$$

证 令$z=a+bi$，于是$(a^2+b^2)^n=(|z|^2)^n=|z|^{2n}=(|z|^n)^2$，但$z^n=x+iy$，其中$x$，$y$为整数（因为$a$，$b$为整数），所以$(|z^n|)^2=|x+iy|^2=x^2+y^2$，证毕。

3.5.2. 设n为$\geqslant 3$的整数，α、β、γ为复数满足$\alpha^n=\beta^n=\gamma^n=1$，$\alpha+\beta+\gamma=0$。证明$n$为3的倍数。

证 不失一般性可设$\alpha=1$（不然的话，在$\alpha+\beta+\gamma=0$的两边同除以α得$1+\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\gamma}{\alpha}=0$，令$\alpha_1=1$，$\beta_1=\dfrac{\beta}{\alpha}$，$\gamma_1=\dfrac{\gamma}{\alpha}$）。设$0\leqslant\arg\beta<\arg\gamma\leqslant 2\pi$。

β、γ的模为1（因为$\beta^n=\gamma^n=1$），所以它们在单位圆上（圆心（0，0），半径1）。由方程$\beta+\gamma=-1$，我们可令虚部相等得$I_m(\beta+\gamma)=I_m(\beta)+I_m(\gamma)=0$，或等价地，$I_m(\beta)=-I_m(\gamma)$（图3.5）。令实部相等得$R_e(\beta)+R_e(\gamma)=$

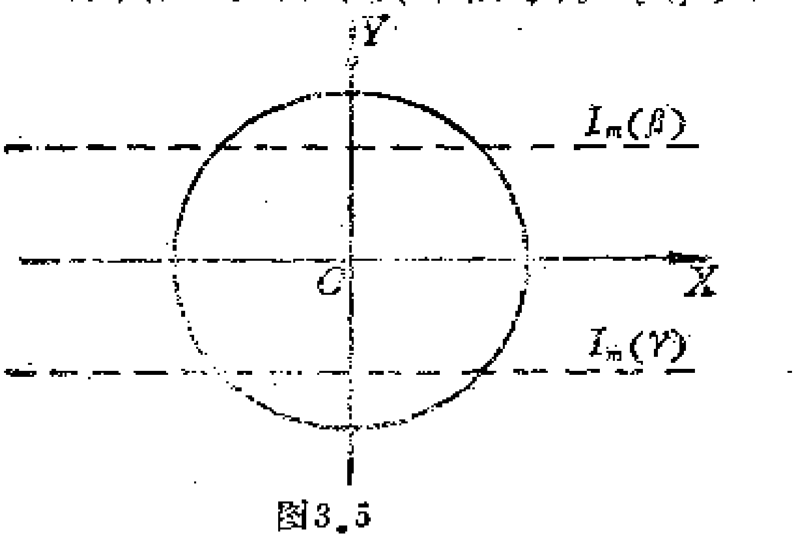


图3.5

-1.由于我们已经知道$|\beta|=|\gamma|=1$，所以必须有$R_e(\beta)=R_e(\gamma)=-\frac{1}{2}$. 从而 $\beta=e^{\frac{2\pi i}{3}}$， $\gamma=e^{\frac{4\pi i}{3}}$.由$\beta^n=1$推出 $e^{\frac{2\pi i n}{3}}=1$，这仅在n为3的倍数时出现.

下面的结论是很有用的，它可以用归纳法证明.

De Moivre 定理.对每个整数n，

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

(用指数记号：$(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}$)

3.5.3. 用$\cos\theta$来表示$\cos5\theta$.

解 一个有效的方法是注意到$\cos5\theta$是$e^{5i\theta}$的实部. 于是可以应用De Moivre定理：

$$\begin{aligned}\cos5\theta+i\sin5\theta&=(\cos\theta+i\sin\theta)^5\\&=\cos^5\theta+5\cos^4\theta(i\sin\theta)+10\cos^3\theta(i^2\cdot\\&\quad\sin^2\theta)+10\cos^2\theta(i^3\sin^3\theta)+5\cos\theta\cdot\\&\quad(i^4\sin^4\theta)+i^5\sin^5\theta\\&=(\cos^5\theta-10\cos^3\theta\sin^2\theta+5\cos\theta\sin^4\theta)\\&\quad+i(\sin^5\theta-10\sin^3\theta\cos^2\theta+5\sin\theta\cdot\\&\quad\cos^4\theta).\end{aligned}$$

比较实部与虚部得

$$\cos5\theta=\cos^5\theta-10\cos^3\theta\sin^2\theta+5\cos\theta\sin^4\theta,$$

$$\sin5\theta=\sin^5\theta-10\sin^3\theta\cos^2\theta+5\sin\theta\cos^4\theta.$$

对于$\cos5\theta$有

$$\begin{aligned}\cos5\theta&=\cos^5\theta-10\cos^3\theta(1-\cos^2\theta)^2\\&\quad+5\cos\theta(1-\cos^2\theta)\\&=16\cos^5\theta-20\cos\theta^3+5\cos\theta\end{aligned}$$

3.5.4. 求常数a_0，a_1，…，a_6使得

$$\cos^6\theta = a_6\cos6\theta + a_5\cos5\theta + \cdots + a_1\cos\theta + a_0$$

解　和上一个问题一样，通过考察三角函数（特别是正弦与余弦）与复变数之间的关系，可以很好地解决这个问题。在这里，将$\cos\theta$写成

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

的形式，并应用二项式定理得到

$$\begin{aligned}\cos^6\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^6\\ &= \frac{1}{2^6}\big((e^{i\theta})^6+6(e^{i\theta})^5(e^{-i\theta})+15(e^{i\theta})^4(e^{-i\theta})^2+\\ &\quad 20(e^{i\theta})^3(e^{-i\theta})^3+15(e^{i\theta})^2(e^{-i\theta})^4+6(e^{i\theta})\cdot\\ &\quad (e^{-i\theta})^5+(e^{-i\theta})^6\big)\\ &= \frac{1}{2^6}\big((e^{6i\theta}+e^{-6i\theta})+6(e^{4i\theta}+e^{-4i\theta})+15(e^{2i\theta}+\\ &\quad +e^{-2i\theta})+20\big)\\ &= \frac{1}{2^6}(2\cos6\theta+2\times6\cos4\theta+2\times15\cos2\theta+20)\\ &= \frac{1}{32}(\cos6\theta+6\cos4\theta+15\cos2\theta+10).\end{aligned}$$

3.5.5.　设$G_n = x^n\sin nA + y^n\sin nB + z^n\sin nC$，其中$x$，$y$，$z$，$A$，$B$，$C$为实数并且$A+B+C$是$\pi$的整数倍，证明如果$G_1 = G_2 = 0$，那么对所有正整数$n$，$G_n = 0$。

证　将G_n看作表达式

$$H_n = x^n e^{inA} + y^n e^{inB} + z^n e^{inC}$$

的虚部，这是标准的技巧（类似于3.5.3）。设对于$n=0$，1，…，K，H_n为实数。考虑H_{K+1}。我们有

$$H_1 H_K = H_{K+1} + H,$$

其中

$$H = xe^{iA}y^K e^{iKB} + xe^{iA}z^K e^{iKC} + ye^{iB}x^K e^{iKA}$$

$$+ye^{iB}z^Ke^{iKC}+ze^{iC}x^Ke^{iKA}+ze^{iC}y^Ke^{iKB}$$
$$=xye^{i(A+B)}(y^{K-1}e^{i(K-1)B}+x^{K-1}e^{i(K-1)A})$$
$$+xze^{i(A+C)}(z^{K-1}e^{i(K-1)C}+x^{K-1}e^{i(K-1)C})$$
$$+yze^{i(B+C)}(y^{K-1}e^{i(K-1)B}+z^{K-1}e^{i(K-1)C})$$
$$=xye^{i(A+B)}(H_{K-1}-z^{K-1}e^{i(K-1)C})$$
$$+xze^{i(A+C)}(H_{K-1}-y^{K-1}e^{i(K-1)B})$$
$$+yze^{i(B+C)}(H_{K-1}-x^{K-1}e^{i(K-1)A})$$
$$=H_{K-1}(xye^{i(A+B)}+xze^{i(A+C)}+yze^{i(B+C)})$$
$$-xyze^{i(A+B+C)}H_{K-2}$$
$$=H_{K-1}P-xyze^{i(A+B+C)}H_{K-2}.$$

而$P^*=xye^{i(A+B)}+xze^{i(A+C)}+yze^{i(B+C)}$

注意$H_2=H_1{}^2+2P$，根据题设条件，H_1与H_2为实数，所以P一定是实数。又由归纳假设，H_{K-1}与H_{K-2}为实数。因为$A+B+C$是π的倍数，$e^{i(A+B+C)}$为实数。综合起来，上面的式子表明H为实数。根据归纳假设，H_K是实数，而$H_{K+1}=H\cdot H_K-H$，所以H_{K+1}为实数。于是由数学归纳法即得本题的结论。

问题

3.5.6.

(a) 已知$13=2^2+3^2$，$74=5^2+7^2$。试将$13\times74=962$表为两个平方数的和。（提示：令$z=2+3i$，$w=5+7i$，并利用$|z|^2\cdot|w|^2=|zw|^2$）。

(b) 证明$4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{239}=\frac{1}{4}\pi$（提示：考虑

---

* 编者注 为避免混淆，原文改为P。

$(5-i)^4(1+i))$。

3.5.7. 设A为复数，n为正整数并且$A^n=1$，$(A+1)^n=1$。证明n被6整除并且$A^3=1$。

3.5.8. 证明

$$\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\binom{n}{7}+\cdots=2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$$

与

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\binom{n}{6}+\cdots\cdots=2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}$$

（提示：考虑$(1+i)^n$）

3.5.9. 从考虑可能的模与幅角着手

(a) 求$\sqrt[3]{-i}$的所有的值。

(b) 求$(3-4i)^{-\frac{8}{3}}$的与虚轴最近的值。

3.5.10.

(a) 证明如果$x-x^{-1}=2i\sin\theta$，那么$x^n-x^{-n}=2i\sin n\theta$。

(b) 利用(a)，将$\sin^{2n}\theta$表示成θ的倍角的正弦的和。

3.5.11. 证明

$$\operatorname{tg}n\theta=\frac{\binom{n}{1}\operatorname{tg}\theta-\binom{n}{3}\operatorname{tg}^3\theta+\cdots}{\binom{n}{0}-\binom{n}{2}\operatorname{tg}^2\theta+\cdots}$$

3.5.12.

(a) 证明

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\frac{\cos k\theta}{\cos^k\theta}$$

$$=\begin{cases}0 & \text{若}n\text{为奇数，}\\(-1)^{1+\frac{n}{2}}\mathrm{tg}^n\theta & \text{若}n\text{为偶数}\ 。\end{cases}$$

（提示：考虑$i\mathrm{tg}\theta=-1+\dfrac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta}$）

(b) 证明

$$\sum_{K=0}^{n}(-1)^{K-1}\binom{n}{k}\cos^K\theta\cos k\theta$$

$$=\begin{cases}(-1)^{\frac{n+1}{2}}\sin^n\theta\sin n\theta, & \text{若}n\text{为奇数，}\\(-1)^{1+\frac{n}{2}}\sin^n\theta\cos n\theta, & \text{若}n\text{为偶数}\ 。\end{cases}$$

（提示：考虑$-1+\cos\theta(\cos\theta+i\sin\theta)=i\sin\theta(\cos\theta+i\sin\theta)$）

3.5.13. 证明

$$\frac{\cos n\theta}{\cos^n\theta}=1-\binom{n}{2}\mathrm{tg}^2\theta+\binom{n}{4}\mathrm{tg}^4\theta-\cdots$$

3.5.14. 证明如果$e^{i\theta}$满足方程$z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=0$，其中$a_i$为实数，那么$a_{n-1}\sin\theta+a_{n-2}\sin 2\theta+\cdots+a_1\sin(n-1)\theta+a_0\sin n\theta=0$。

补充例题

1.3.2，4.2.10，4.2.11，4.2.13，4.2.15，4.2.17，4.2.20，4.2.22，4.3.18，5.2.2，5.2.3，5.2.11，5.3.4，5.3.10，5.3.11，5.4.28，5.4.29，又，参看8.4节（几何中的复数）。

第四章 代 数

代数既是最古老的数学分支之一，又一直是数学研究最活跃的一个领域。这门学科仍然有很多新思想，并在继续发展。

在中学代数里学会了把等式或公式化为更容易理解和解释的等价形式。本书的的大部分问题证实这个基本课题是很有用的。代数式的因式分解是一种最重要的代数运算之一。在第一节，我们关注的问题是，它们的解答需要利用一些初等的因式分解公式。

中间两节讨论古典代数中的问题，即多项式。其中很多理论曾经属于方程论的代数分支。这个课题的初步知识现在分散在中学一直到大学的课本中。在这两节中，我们将这一课题的思想提取出来放在一起，它们是解题中所需的基本知识。

在最后一节，介绍职业数学家们在谈到代数时所指的那些问题。这里加强了形式体系与形式思维的讨论。这个课题包括了一大批新概念，它推广了古典思想与方法。我们介绍组成这一学科的最基本的结构：群，环与域。

4.1 代数恒等式

在这一节我们注意某些最基本因式分解公式的应用，这些公

式如下：

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),$$
$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,$$
$$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2,$$
$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}),$$

如果n为正奇数，最后一个公式中的b可换成$-b$并得到两个n次幂的和的因式分解

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1}),$$

n奇数。

4.1.1. 证明在n为整数时，n^4-20n^2+4为合数

证 想法是将所述表达式分解。如果我们这样做：$n^4-20n^2+4=(n^4-20n^2+100)-96=(n^2-10)^2-96$，就会遇到障碍，因为96不是平方数。但可以这样论证：$n^4-20n^2+4=(n^4-4n^2+4)-16n^2=(n^2-2)^2-16n^2=(n^2-2-4n)(n^2-2+4n)$。如果能证明这些因数都不等于$\pm 1$，那么结论成立。

假设$n^2-2-4n=1$；或等价地，$n^2-4n-3=0$。由求根公式，$n=2\pm\sqrt{7}$，这不是整数，于是，如果n是整数，n^2-2-4n不等于1。类似的论证适用于其它三种情况。

4.1.2. 确定方程组

$$x+y+z=w$$
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{w}$$

的全部实数解x，y，z，w。

解 一些初步的试探使我们猜测解只能是x，y，z中有一个等于w,而另两个互为相反数(例如$x=w$，$y=-z$)。这些当然是解，但怎么证明没有其它的解呢？

由第二个方程，

$$\frac{yz+xz+xy}{xyz}=\frac{1}{w},$$

这与第一个方程导出

$$(x+y+z)(yz+xz+xy)=xyz.$$

展开成

$$x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y+2xyz=0$$

再分解为

$$(x+y)(y+z)(z+x)=0$$

于是最初的猜测成立(即$x+y$，$y+z$，$z+x$中有一个为0，例如$y=-z$，于是$x=x+y+z=w$)。

4.1.3.

(a) 求出所有的满足$|3^m-2^n|=1$的正整数对(m, n)。

(b) 求出所有的满足$|p^m-q^n|=1$的大于1的整数对(m, n)，其中p，q为素数.

解 (a) 在$m=1$或2时，很快可求出解为

$$(m, n)=(1, 1), (1, 2), (2, 3).$$

我们要证明没有其它的解。

设(m, n)为$|3^m-2^n|=1$的解，这里$m>2$(于是$n>3$),则$3^m-2^n=1$或$3^m-2^n=-1$。

情况1. 设$3^m-3^n=-1$，$n>3$，则$3^m\equiv-1 \pmod 8$。但这同余式不可能成立，因为根据m为偶数或奇数$3^m\equiv 1$或

$3 \pmod 8$.($3 \equiv 3 \pmod 8$, $3^2 \equiv 1 \pmod 8$, $3^3 \equiv 3 \pmod 8$, $3^4 \equiv 1 \pmod 8$, …).

情况2. 设$3^m - 2^n = 1$，$n > 3$．则$3^m \equiv 1 \pmod 8$．因此m是偶数，设$m = 2k$，$k > 1$，于是$2^n = 3^{2k} - 1 = (3^k - 1)(3^k + 1)$．由唯一分解性，对某个$r$，$r > 3$，$3^k + 1 = 2^r$．但由情况1，我们知道这是不可能的。这就完成了(a)的证明．

(b) 易知p、q不可能都是奇数，否则将推出$p^m - q^n$为偶数．因此设$q = 2$．我们将证明，只利用本节的代数恒等式，仅有的解就是(a)中已求出的解，即$|3^2 - 2^3| = 1$．

设m与n大于1，并且$|p^m - 2^n| = 1$．m与n不可能都是偶数，因为如果$m = 2r$，$n = 2s$，那么

$$1 = |p^m - 2^n| = |p^{2r} - 2^{2s}| = |p^r - 2^s| \cdot |p^r + 2^s|,$$

这是不可能的（因为$p^r + 2^s > 1$）．

设m为奇数，则

$$2^n = p^m \pm 1 = (p \pm 1)(p^{m-1} \mp p^{m-2} + \cdots \mp p + 1),$$

这是不可能的，因为等式右边的后一个因数是大于1的奇数．

因此，只能出现m为偶数而n为奇数的情况．

设$m = 2^r k$，k为奇数，设$k > 1$，则

$$2^n = p^m \pm 1 = (p^{2^r})^k \pm 1 = (p^{2^r} \pm 1)((p^{2^r})^{k-1} \pm \cdots - (p^{2^r}) + 1),$$

又因右边因数为奇数而导出矛盾．

因此，$m = 2^r$，r是正整数，n是奇数．方程的形状成为$|p^{2^r} - 2^n| = 1$．$p^{2^r} - 2^n = 1$或$p^{2^r} - 2^n = -1$．

情况1. 如果$p^{2^r} - 2^n = -1$，那么

$$p^{2^r}=2^n-1=(2-1)(2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2+1)\equiv 3(\bmod 4),$$

但这是不可能的，因为对于奇数 x，$x^2\equiv 1(\bmod 4)$。

情况2. 如果 $p^{2^r}-2^n=1$，那么 $2^n=p^{2^r}-1=(p^{2^{r-1}}-1)(p^{2^{r-1}}+1)$。只有在 $p^{2^{r-1}}=2$ 并且 $p^{2^{r-1}}+1=4$ 时 $p^{2^{r-1}}$ 与 $p^{2^{r-1}}+1$ 都是 2 的幂。这两式相加得 $p^{2^{r-1}}=3$，这推出 $p=3$，$r=1$，$m=2$，$n=3$。

4.1.4. 证明在整数的无穷数列

10001, 100010001, 1000100010001, …

中没有素数。

证 这数列的项可写成

$$1+10^4,\ 1+10^4+10^8,\ \cdots,\ 1+10^4+\cdots+10^{4n},\ \cdots$$

更一般，对任一整数 x，$x>1$，考虑数列

$$1+x^4,\ 1+x^4+x^8,\ \cdots,\ 1+x^4+\cdots x^{4n},\ \cdots.$$

如果 n 是奇数，设 $n=2m+1$，

$$\begin{aligned}&1+x^4+x^8+\cdots+x^{4(2m+1)}\\&=(1+x^4)+x^8(1+x^4)+\cdots+x^{8m}(1+x^4)\\&=(1+x^4)(1+x^8+\cdots+x^{8m}).\end{aligned}$$

于是，如果 $m>0$，那么这数为合数。对于 $m=0$ 而 $x=10$，我们也得到合数，因为

$10001=73\times 137$.

设 n 为偶数，$n=2m$，那么

$$1+x^4+\cdots+x^{4(2m)}=\frac{1-(x^4)^{2m+1}}{1-x^4}$$

$$=\left(\frac{1-(x^{2m+1})^2}{1-x^2}\right)\left(\frac{1+(x^{2m+1})^2}{1+x^2}\right)$$

$$=(1+x^2+\cdots+(x^2)^{2m})(1-x^2+\cdots+(x^2)^{2m}).$$

这一分解表明这数为合数．

问题

4.1.5.

(a)如果a与b为连续整数，证明$a^2+b^2+(ab)^2$是完全平方．

(b)如果$2a$是b与c的调和中项（即$2a=\frac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$），证明三个数$a$、$b$、$c$的平方和是一个有理数的平方．

(c)如果N在两个连续的平方数之间，与它们的差分别为x、y，证明$N-xy$是平方数．

4.1.6. 证明有无穷多个自然数a具有下面的性质：对任意自然数n数n^4+a不是素数．

4.1.7. 设整数n是两个三角数的和

$$n=\frac{a^2+a}{2}+\frac{b^2+b}{2},$$

将$4n+1$表成两个平方数的和，$4n+1=x^2+y^2$，并表明怎样用a与b来表示x与y．

反过来，证明如果$4n+1=x^2+y^2$，那么n是两个三角数的和．

4.1.8. 设数N的十进制表示由91个1组成：

$$N=\underbrace{1\cdots\cdots1}_{91个}$$

证明N为合数．

4.1.9．证明下面的数列

$$2+1,\ 2^2+1,\ 2^4+1,\ 2^8+1,\cdots,2^{2^n}+1,\ \cdots$$

中任意两个数互素。说明这一结论证明了有无穷多个素数存在．

4.1.10．确定所有满足方程

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3$$

的三元整数组（x，y，z）．

补充例题

1.8.4，1.12.7，3.3.6，4.2.5，5.2.15，5.3.7，7.1.11，又参见5.2节（几何级数）．

4.2 多项式的唯一分解

一个变数x的n次多项式（n为非负整数）是指形为

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

的表达式，其中$a_0,a_1,\cdots,a_n$为常数（称为系数），并且$a_n\neq 0$．一个系数全为0的多项式称为零多项式，零多项式没有次数，a_n称为首项系数．如果$a_n=1$，我们称多项式为首一多项式。两个多项式称为（恒等地）相等，如果它们的系数逐项相等，即变数的同次幂的系数相等．

如果多项式$P_{(x)}$的系数是整数，称$P_{(x)}$为整数上的多项式，类似地，如果系数为有理数，称这个多项式为有理数上的，等等．

在许多方面多项式与整数相近，可以加、减、乘，但和整数一样，在一个多项式除另一个多项式时，结果是一个商

多项式加一个余多项式（下面详细叙述）．称多项式F（恰好）整除多项式Q，如果有多项式Q使$G=QF$（即G是F的倍式）。多项式H是多项式F与G的最高公因式，当且仅当（1）H整除F与G，并且（2）如果K为另一个整除F与G的多项式，那么K整除H．可以证明除去一个常数因数外，H是唯一确定的．

和整数相同，多项式也有带余除法．

多项式的带余除法．如果$F(x)$与$G(x)$是域K上的多项式（例如K可为有理数，实数，复数，整数模素数P的剩余类），那么存在唯一的域K上的多项式$Q(x)$与$R(x)$满足

$$F(x)=Q(x)G(x)+R(x),$$

其中$R(x)\equiv 0$或者$\deg R(x)<\deg G(x)$（deg表示次数）.

更进一步，如果K为整数域（例如整数），那么在$G(x)$为首一多项式时，同样的结论成立．

作为多项式带余除法的一个例子，令$F(x)=3x^5+2x^2-5$，$G(x)=2x^3+6x+1$，于是

$$
\begin{array}{r|llllll}
 & & & \frac{3}{2}x^2 & & -\frac{9}{2} \\ \hline
2x^3+6x+1 & 3x^5 & & +2x^2 & & -5 \\
 & 3x^5 & +9x^3 & +\frac{3}{2}x^2 & & \\ \hline
 & & -9x^3 & +\frac{1}{2}x^2 & & -5 \\
 & & -9x^3 & & -27x & -\frac{9}{2} \\ \hline
 & & & \frac{1}{2}x^2 & +27x & -\frac{1}{2}
\end{array}
$$

这里$Q(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{2}$，$R_{(x)}=\frac{1}{2}x^2+27x-\frac{1}{2}$（这个

例子说明在一般情况，仅当系数取自一个域中时，带余除法才能施行。但同时也说明了在除式是首一多项式时，系数取自一个整区（*domain*）也就足够了。）

和整数的情况相同，带余除法可用来求两个多项式的最高公因式。更进一步，和整数一样，如果F与G是(域K上的)多项式，那么存在（K上的）多项式S与T，满足

$$\gcd(F,G)=SF+TG,$$

其中$\gcd(F,G)$表示F与G的最高公因式。

4.2.1. 求多项式$P(x)$，使得$P(x)$被x^2+1整除，$P(x)+1$被x^3+x^2+1整除。

解 根据问题的条件，有多项式$S(x)$与$T(x)$使得

$$P(x)=(x^2+1)S(x),$$

$$P(x)+1=(x^3+x^2+1)T(x).$$

由此得$(x^2+1)S(x)=(x^3+x^2+1)T(x)-1$，或等价地，

$$(x^3+x^2+1)T(x)-(x^2+1)S(x)=1.$$

根据在这例题前面的解说x^3+x^2+1与x^2+1“互素”，并且可以用多项式的Eunclid算法求出$S(x)$与$T(x)$。于是，我们有

$$x^3+x^2+1=(x+1)(x^2+1)+(-x),$$

$$x^2+1=-x(-x)+1,$$

再向前反推得

$$\begin{aligned}1&=(x^2+1)+x(-x)\\&=(x^2+1)+x((x^3+x^2+1)-(x+1)\\&\quad(x^2+1))\\&=(x^2+1)(1-x(x+1))+x(x^3+x^2+1)\\&=(x^3+x^2+1)x-(x^2+1)(x^2+x-1).\end{aligned}$$

这样我们看出可取$S_{(x)}=x^2+x-1$与$T_{(x)}=x$，从而

$$P_{(x)}=(x^2+1)(x^2+x-1).$$

4.2.2. 证明对每个自然数n，分数$\dfrac{n^3-2n}{n^4+3n^2+1}$是既约的．

证 我们有

$$n^4+3n^2+1=n(n^3+2n)+(n^2+1),$$

$$n^3+2n=n(n^2+1)+n,$$

$$n^2+1=n\cdot(n)+1,$$

$$n=n\cdot(1)．$$

从而$\gcd(n^4+3n^2+1,\ n^3+2n)=1$，证毕．

设$F(x)$是整区D上的多项式，考虑方程$F(x)=0$，如果D中元素a满足$F(a)=0$，称a为$F(x)=0$的根，或a是$F(x)$的零点．下面一个极有用的定理是带余除法的简单应用．

因式定理．如果$F(x)$是整区D上的多项式，D中元素a为$F(x)=0$的根，当且仅当$x-a$是$F(x)$的一个因式．

反复应用因式定理，可以证明有一个唯一的非负整数m与一个唯一的D上的多项式$G(x)$使得

$$F(x)=(x-a)^m G(x),$$

其中$G_{(a)}\neq 0$，这时，称a为m重零点．

下面的两个例题说明因式定理的用处．

4.2.3. 已知多项式$F(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，系数$a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$为整数，又已知有四个不同的整数$a,b,c,d$，满足$F(a)=F(b)=F(c)=F(d)=5$，证明不存在整数$k$满足$F(k)=8$，

证 令$G(x)=F(x)-5$．由因子定理，$x-a$，$x-b$，

$x-c$与$x-d$是$G(x)$的因式，可记

$$G(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)H(x),$$

其中$H_{(x)}$是整系数多项式，如果k是使$F_{(k)}=8$的整数，那么$G(k)=F(k)-5=8-5=3$，或等价地，

$$(k-a)(k-b)(k-c)(k-d)H_{(k)}=3 .$$

左边表示5个整数的积，而整数$k-a$，$k-b$，$k-c$，$k-d$互不相同，因为a,b，c，d不同。但这是不可能的，因为数$k-a$，$k-b$，$k-c$，$k-d$中至多有一个能等于± 3，所以其余的三个必定为± 1，于是这样的k不存在。

4.2.4. 证明如果$F_{(x)}$是整系数多项式并且有整数k使得整数$F_{(1)}$，$F_{(2)},\cdots,F_{(k)}$都不被k整除，那么$F_{(x)}$没有整数零点．

证 问题等价于证明如果$F(x)$有一个整数零点r，那么对任一正整数k，$F(1)$，$F(2)$，…，$F(k)$中至少有一个被k整除．因此，设$F(r)=0$．根据因式定理，

$$F(x)=(x-r)G(x),$$

其中$G_{(x)}$是整系数多项式，由整数的带余除法，存在整数q与s满足$r=qk+s$，$0<s\leqslant k$（注意s适合的不等式）．将$s=r-qk$代入上面的等式得

$$F(s)=(s-r)G(s)=-qkG(s) .$$

这等式表明$F_{(s)}$被k整除（$G_{(s)}$是整数），证毕．

这个问题的更简单的解法是利用模算术，注意如果$a\equiv b\ (\bmod k)$，那么$F(a)\equiv F(b)(\bmod k)$．对任一整数a，$F(a)$与$F(1),\cdots,F(k)$中的某一个关于模k同余，根据题设，这些都不被k整除，由此即得结论．

整数的唯一分解定理指出每一个整数能唯一地写成素数

的乘积，对多项式也有类似的定理：每一个域上的多项式能唯一地写成不可约多项式(即素因式)的乘积．在复数的情况，不可约因式是一次(线性)多项式．在实数的情况，不可约多项式是线性多项式与判别式为负的二次多项式（即形如ax^2+bx+c的多项式，其中$b^2-4ac<0$）．

与整数的情况一样，唯一分解常常表示多项式的有用的方法．下面的两个例题阐明这一思想．

4.2.5．证明复域上的每一个多项式有一个非零多项式为它的倍式，这个多项式的所有项的幂次都被1000000整除．

证 设已知多项式的唯一分解式为

$$P(x)=A(x-s_1)^{m_1}(x-s_2)^{m_2}\cdots(x-s)^{m_k}$$

其中A为常数，s_1，…，s_k分别是$P(x)$的$m_1,\cdots,m_k$重根．对每个正整数a（例如$a=1000000$），$\dfrac{x^a-s_i^a}{x-s_i}$是复数域上的多项式（见4.1），令

$$Q(x)=x^a\left(\frac{x^a-s_1^a}{x-s_1}\right)^{m_1}\cdots\left(\frac{x^a-s_k^a}{x-s_k}\right)^{m_k}$$

则$Q_{(x)}$是复域上的多项式，并且

$$P(x)Q(x)=A(x-s_1)^{m_1}\cdots(x-s_k)^{m_k}\left(x^a\frac{(x^a-s_1^a)^{m_1}}{(x-s_1)^{m_1}}\right)\cdots\left(\frac{(x^a-s_k^a)^{m_k}}{(x-s_k)^{m_k}}\right)$$

$$=Ax^a(x^a-s_1^a)^{m_1}\cdots(x^a-s_k^a)^{m_k}.$$

是一个多项式，它每一项的幂指数都被a整除．

4.2.6．设f为实系数的多项式．证明当且仅当f^2不能写成平方和

$$f^2=g^2+h^2$$

其中g与h为实系数多项式并且$\deg g\neq\deg h$的形式时，f的所有零点为实数．

解 设$f^2=g^2+h^2$，其中g与h为实系数多项式，$\deg g\neq\deg h$，又设f的所有零点为实数。将f写成因式的积：

$$f_{(x)}=A(x-a_1)^{m_1}\cdots(x-a_k)^{m_k},$$

其中A为非零实数．

由方程

$$A^2(x-a_1)^{2m_1}\cdots(x-a_k)^{2m_k}=\Big(g(x)\Big)^2+(h(x))^2$$

推出对每一个$i=1,2,\cdots,k$,

$$0=(g(a_i))^2+(h(a_i))^2.$$

由于$g(a_i)$与$h(a_i)$都是实数，必须$g(a_i)=0$，$h(a_i)=0$ 事实上，可推出这些零点的重数至少为m_i，于是，因式定理推出存在实系数多项式$g_{1(x)}$与$h_{1(x)}$，使得$g(x)=f(x)g_1(x)$与$h(x)=f(x)h_1(x)$

$$1=(g_{1(x)})^2+(h_{1(x)})^2.$$

但这个等式是不可能的，因为$\deg g_1\neq\deg h_1$（即g_1与h_1不可能都是常数）．这矛盾导出f一定有零点且不是实数．

现在假设f的零点不全为实数，将f表成因式的积

$$f(x)=A(x-a_1)^{m_1}\cdots(x-a_r)^{m_r}(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}\cdots(x^2+b_sx+c_s)^{n_s},$$

其中A为实数，$m_1,\cdots,m_r$为非负整数，s正整数，$n_1,\cdots,n_s$正整数，a_i,b_j,c_j实数并且$b_j^2-4c_j\leqslant 0$，$j=1,\cdots,s$。我们有

$$x^2+b_jx+c_j=(x^2+b_jx+\frac{1}{4}b_j^2)+(c_j-\frac{1}{4}b_j^2)$$

$$=(x+\frac{1}{2}b_i)^2+(\frac{1}{2}\sqrt{4c_i-b_i^2})^2,$$

这表明f的每个二次因式是平方的和。将f^2的唯一分解式中的每个二次因式换成表示它的平方和，得出等式

$$f^2(x)=A^2(x-a_1)^{2m_1}\cdots(x-a_r)^{2m_r}(g_1^2(x)+h_1^2(x))^{2n_1}\cdots(g_s^2(x)+h_s^2(x))^{2n_s}$$

其中$g_1,\cdots,g_s,h_1,\cdots,h_s$是多项式，$\deg g_i=1,\deg h_i=0$。

反复应用这样的事实：两个平方和与另两个平方和的乘积仍然可表示成两个平方和，即

$$(f_1^2+g_1^2)(h_1^2+k_1^2)=(f_1h_1-g_1k_1)^2+(f_1k_1+g_1h_1)^2.$$

又注意在这恒等式中，如果$\deg f_1>\deg g_1$并且$\deg h_1>\deg k_1$，那么$\deg(f_1h_1-g_1k_1)>\deg(f_1k_1+g_1h_1)$。我们可以看出存在实系数多项式$g(x)$与$h(x)$，$\deg g(x)\neq\deg h(x)$，使得$f^2=g^2+h^2$。

问题

4.2.7. 求多项式$F(x)$与$G(x)$使得

$$(x^8-1)F(x)+(x^5-1)G(x)=x-1.$$

4.2.8. x^m-1与x^{n-1}的最高公因式是什么？

4.2.9. 设多项式$f(x)$除以$x-a$余A，除以$x-b$余B，$a\neq b$。求$f(x)$除以$(x-a)(x-b)$的余式。

4.2.10. 证明$x^{4a}+x^{4b+1}+x^{4c+2}+x^{4d+3}$，$a,b,c,d$正整数，被$x^3+x^2+x+1$整除。（提示：$x^3+x^2+x+1=(x^2+1)(x+1)$）

4.2.11. 证明多项式$(\cos\theta+x\sin\theta)^n-\cos n\theta-x\sin n\theta$被$x^2+1$整除。

4.2.12. 对什么n，多项式$1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n-2}$被多项式$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}$整除？

4.2.13. 如果一个实数是一个整系数多项式的零点，称它为代数的。

(a)证明$\sqrt{2}+\sqrt{3}$是代数的．

(b)证明对每个正整数n，$\cos\frac{\pi}{2n}$是代数的

(提示：用 DeMoivre定理将$\cos nx$表示成$\cos x$的多项式．

4.2.14. 如果$P(x)$是整系数的首一多项式，k为整数。是否一定存在整数m使得$P_{(m)}$至少有k个不同的素因数？（提示：首先用归纳法证明有k个不同的素数$q_1,\cdots,q_k$与k个整数$n_1,\cdots,n_k$使得q_i整除$P(n_i)$，$i=1,\cdots,k$，然后证明当且仅当对所有整数s素数，g整除$P_{(n+sq)}$时，q整除$P_{(n)}$。由这些结论及中国剩余定理可以导出肯定的答案）．

4.2.15.

(a) 将x^8+x^4+1分解为不可约因式的积(i)在有理数域上(ii)在实数域上(iii)在复数域上

(b) 在复数域上分解x^8-1．

(c)在复数域上分解$x^4-2x^3+6x^2+22x+13$，已知$2+3i$是一个零点．

4.2.16. 这里的两个结论在将整系数多项式分解为不可约因式的乘积时是有用的．

有理根定理、如果$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$是整系数多项式，有理数$\frac{r}{s}$（$r$与$s$为互素整数）是$P(x)=0$的根，那么$r$整除$a_0$，$s$整除$a_n$．

Gauss引理．设$P(x)$是整系数多项式。如果$P(x)$能分解

为两个有理系数的多项式的积.那么$P(x)$能分解为两个整系数的多项式的积 .

(a) 设$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$为整系数的$n$次多项式.如果$a_0$, a_n与$f(1)$为奇数,证明$f(x)=0$没有有理根 .

(b) 对什么整数a, x^2-x+a整除$x^{13}+x+90$?

4.2.17.

(a) 设$f(x)$是实数域上的多项式,$g(x)$是$f(x)$与$f'(x)$的因式,证明$(g(x))^2$整除$f(x)$. (这个事实可以用来判断$f(x)$有无重根) .

(b) 利用(a)中思想分解$x^6+x^4+3x^2+2x+2$为复数域上的不可约多项式的乘积 .

4.2.18. 求出所有的正整数对(m,n)使得$1+x^n+x^{2n}+\cdots+x^{mn}$被$1+x+x^2+\cdots+x^m$整除 .

4.2.19.

(a) 设$F(x)$为实数域上的多项式. 证明当且仅当$F(a)=F'(a)=\cdots=F^{(m-1)}(a)=0$而$F^{(m)}(a)\neq 0$时, a为m重零点 .

(b) $x=1$ 满足方程$f(x)=x^n-nx+n-1=0, n>1$,这根的重数是多少?

4.2.20. 如果$n>1$. 证明$(x+1)^n-x^n-1=0$有重根当且仅当$n-1$被6整除 .

4.2.21. 设$P(x)$为实系数多项式.又设对所有x, $P(x)\geqslant 0$. 证明$P(x)$能表成$(Q_1(x))^2+(Q_2(x))^2+\cdots+(Q_n(x))^2$的形式,其中$Q_1(x)$, $Q_2(x)$, $\cdots$, $Q_n(x)$为实系数多项式.

4.2.22.

(a) 令$\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$. 证明

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=(x-\omega)(x-\omega^2)\cdots(x-\omega^{n-1}).$$

(b) 令$x=1$，在上式两边取绝对值，证明

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

补充例题

1.12.2，1.12.5，6.5.13，6.9.3

4.3 恒等定理

设P为整区D上的n次非零多项式，根据因式定理，如果a为$P(x)=0$的根，那么有一个次数为$n-1$的多项式Q使得$P(x)=(x-a)Q(x)$. 利用这一事实，经过简单的归纳可知P至多有n个零点．

上面的考虑有一个很重要的推论。假定F与G是D上多项式，次数都小于或等于n并假定F与G在$n+1$个不同的值处相等，那么$F-G$是次数小于$n+1$的多项式而有$n+1$个零点，如果$F-G$不是零多项式，这与上一段的推理矛盾，因此$F-G$是零多项式，从而F等于G(各项系数对应相等)(6.5.10有另一个证明)．

恒等定理：设在整区上有两个x的多项式，次数均为n，如果它们对多于n个的不同的x取相等值，那么这两个多项式恒等．

4.3.1. 确定所有的多项式$P(x)$，使得$P(x^2+1)=(P(x))^2+1$，$P(0)=0$．

解 试验某几种情况：

$P(1)=P(0^2+1)=(P(0))^2+1=1$

$P(2)=P(1^2+1)=(P(1))^2+1=1+1=2,$

$P(5)=P(2^2+1)=(P(2))^2+1=4+1=5,$

$P(26)=P(5^2+1)=(P((5))^2+1=5^2+1=26$.

一般地，定义$x_0=0$，又对$n>0$，定义$x_n=x_{n-1}^2+1$，那么由归纳法易知$P(x_n)=x_n$，于是对于无穷多个整数值，多项式$P(x)$与多项式x的值相等，因此根据恒等定理$P(x)\equiv x$ 。这就是说，仅有一个多项式具有所述的性质，即$P(x)=x$ 。

4.3.2。 证明如果m，n为正整数，$1\leqslant k\leqslant n$，那么

$$\sum_{r=0}^{k}\binom{m}{k-r}\binom{n}{r}=\binom{m+n}{k}.$$

证 在第1章(见1.3.4)，用计数的方法证明了这个恒等式。这里是根据恒等定理的另一个证明。所用的方法是标准的：即多项式$(1+x)^m(1+x)^n$与$(1+x)^{m+n}$对一切x值相等。于是，根据恒等定理，它们的系数相等；即对每个k，$(1+x)^m(1+x)^n$中x^k的系数与$(1+x)^{m+n}$中x^k的系数相等，由此得到

$$\sum_{r=0}^{k}\binom{m}{k-r}\binom{n}{r}=\binom{m+n}{k}.$$

4.3.3. 对每个正整数n，证明由恒等式

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k},\quad x,\ y\text{正整数}$$

可推出恒等式

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k},\quad x,\ y\text{实数}$$

证 设y_0为任一固定的正整数，

$$P(x)=(x+y_0)^n,\quad Q(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y_0^{n-k}$$

$P(x)$与$Q(x)$都是x的多项式，并且在x取正整数时相等。因此，根据恒等定理，$P(x)$与$Q(x)$对所有的实数x相等。

设x_0为一固定实数，

$$S(y)=(x_0+y)^n,\quad T(y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x_0^k y^{n-k},$$

$S(y)$与$T(y)$是y的多项式，由于它们在y为正整数时相等，所以对所有实数y，$S(y)=T(y)$. 证毕。

（附带说一下，恒等式

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k},\quad x,\ y\text{正整数，可以}$$

简洁地证明如下，设$S=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$；A为有x个元素的集，B为有y个元素的与A不相交的集。用两种不同的方法来计算从S到$A\cup B$的函数个数。这与上面的解合在一起构成了二项式定理的另一个证明）

4.3.4. x^5-x^2+1在有理数上不可约吗？

解 根据有理根定理（见4.2.16），可能的有理根仅有±1，而它们都不是零点。因此如果这个多项式是可约的，它一定是一个二次多项式与一个三次多项式的积。故设

$$x^5-x^2+1=(x^2+ax+b)(x^3+cx^2+dx+e).$$

由Gauss定理（见4.2.16），可设a，b，c，d，e为整数。因为两边的多项式对所有的x相等，它们的系数相等，比较系数得

$$a+c=0$$

$$b+ac+d=0$$

$$bc+ad+e=-1$$

$$bd+ae=0$$

$$be=1$$

不难证明这些等式不能同时成立。例如最后一个等式说明b与e均为奇数，于是第4个等式说明a与d奇偶性相同。类似地，第一个等式说明a与c的奇偶性相同，于是a，c,d有相同的奇偶性。但若$ac+d$为偶数，第2个方程不可能成立（b是奇数）。于是x^5-x^2+1在整数或有理数上不可约。

处理这个问题的另一种方法是根据下面的观察。如果f、g与h是整数上的多项式，$f=gh$。那么$\overline{f}\equiv\overline{g}\,\overline{h}\pmod n$，这里$\overline{f}$、$\overline{g}$与$\overline{h}$是分别由多项式$f$、$g$与$h$的系数模$n$而得到的多项式。如果$f$在整数上可约，那么$\overline{f}$在整数模$n$上可约。对多项式$x^5-x^2+1$变为$x^5+x^2+1 \pmod 2$，而在$Z_2=\{0,1\}$上的不可约的二次多项式仅有$x^2+x+1$（其它的二次多项式及它们模2的分解式为$x^2=x\cdot x$，$x^2+1=(x+1)^2$，$x^2+x=x(x+1)$）。但在$Z_2$上$x^2+x+1$不整除$x^5+x^2+1$（$x^5+x^2+1=(x^3+x^2)(x^2+x+1)+1 \pmod 2$因此$x^5+x^2+1 \pmod 2$），因此$x^5+x^2+1$在$Z_2$上不可约。由此$x^5+x^2+1$在$Z_2$上不可约。由此$x^5-x^2+1$在整数与有理数上不可约。

在上面的讨论中，我们利用了这样的事实：Z_n上的多项式可以按照通常方式加、减、乘，只是这些对系数的算术运算是在Z_n（即模n）中进行的。如果n为素数p，那么Z_p是域，于是所有对域上多项式成立的结论（如因式定理，恒等定理）仍然成立。在n不是素数时并非如此。例如$2x^3-2x$作为Z_4上的多项式，在Z_4上有4个不同的零点，即0、1、2、3，但如果是域上的多项式，它至多有3个零点。

设p为素数，考虑二项式定理模p

$$(1+x)^p \equiv \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^k \pmod p$$

这里每一边都看作是Z_p上的多项式，对$1\leqslant k\leqslant p-1$，我们有$\binom{p}{k}\equiv 0 \pmod p$，因为$k!(p-k)!$中没有因数整除$p!$中的因数$p$。于是，作为$Z_p$上的多项式，

$$(1+x)^p \equiv 1+x^p \pmod p.$$

更一般地，对每个正整数n，

$$(1+x)^{p^n} \equiv 1+x^{p^n} \pmod p.$$

证明采用归纳法。$n=1$时命题成立，假定命题对k成立，我们有

$$(1+x)^{p^{k+1}} \equiv \underbrace{(1+x)^{p^k}(1+x)^{p^k}\cdots(1+x)^{p^k}}_{p\text{次}} \pmod p$$

$$\equiv \underbrace{(1+x^{p^k})(1+x^{p^k})\cdots(1+x^{p^k})}_{p\text{次}} \pmod p$$

$$\equiv (1+x^{p^k})^p \pmod p$$

$$\equiv 1+(x^{p^k})^p \pmod p$$

$$\equiv (1+x^{p^{k+1}}) \pmod p.$$

比较两边x^i的系数，得

$$\binom{p^n}{i}\equiv 0 \pmod p,\quad 1\leqslant i<p^n$$

4.3.5. 证明在任一个有限的二项展开式中，奇的二项系数

的个数是2的幂．

证　根据对n个特殊情况的考察，猜测$(1+x)^n$中奇系数的个数为2^k，其中k是把n写成二进制时非零数字的个数．

用一个例子足以说明在一般情况证明是如何进行的。考虑$n=13$，在二进制中，$13=1101_2=8+4+1$。因此，用上面建立的结论，

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{13}&=(1+x)^{8+4+1}\\
&=(1+x)^8(1+x)^4(1+x)\\
&\equiv(1+x^8)(1+x^4)(1+x)\quad(\mathrm{mod}\,2).
\end{aligned}
$$

由此我们看出在$(1+x)^{13}$中有8个奇的二项系数。这是因为将上面的等式右边展开，$(1+x^4)(1+x)$有4项，$(1+x^8)(1+x^4+x+x^5)$有8项（一般地，如果$1+x^n$乘以一个次数小于n的多项式$P(x)$，所得结果是一个多项式，它的非零系数的个数是$P(x)$的非零系数的个数的两倍），证毕。

考虑多项式方程$x^2+ax+b=0$，设它的根为r_1与r_2。于是

$$
\begin{aligned}
x^2+ax+b&=(x-r_1)(x-r_2)\\
&=x^2-(r_1+r_2)x+r_1r_2 .
\end{aligned}
$$

由此，利用恒等定理，可得

$$
r_1+r_2=-a
$$
$$
r_1r_2=b
$$

类似地，如果$x^3+ax^2+bx+c=0$有根r_1，r_2，r_3，我们有

$$
\begin{aligned}
x^3+ax^2+bx+c&=(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\\
&=x^3-(r_1+r_2+r_3)x^2+(r_1r_2+r_1r_3\\
&\quad+r_2r_3)x-r_1r_2r_3
\end{aligned}
$$

这时

$$r_1+r_2+r_3=-a$$
$$r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3=b$$
$$r_1r_2r_3=-c\ .$$

以上两种情况中，我们将多项式方程的系数用它的根来表示(用很规范的方法)。采用归纳法可以证明一般性结论成立，即

如果$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$有根$r_1,r_2\cdots,r_n$，那么

$$S_1=r_1+r_2+\cdots+r_n=-a_{n-1},$$
$$S_2=r_1r_2+\cdots+r_1r_n+r_2r_3+\cdots+r_2r_n+\cdots+r_{n-1}r_n$$
$$=a_{n-2},$$
$$S_3=r_1r_2r_3+r_1r_2r_4+\cdots+r_2r_3r_4+\cdots+r_{n-2}r_{n-1}r_n$$
$$=-a_{n-3},$$
$$\vdots$$
$$S_n=r_1r_2\cdots r_n=(-1)^na_0\ .$$

其中S_i是从根中每次取i个的乘积的和。

4.3.6. 考虑所有的与图象

$$y=2x^4+7x^3+3x-5$$

有四个不同交点$(x_i,\ y_i)$，$i=1,\ 2,\ 3,\ 4$的直线.证明

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$$

与直线的选择无关，试求它的值。

证 设$y=mx+b$与上述曲线交于$(x_i,\ y_i)$，$i=1,\ 2,\ 3,\ 4$，那么x_1，x_2，x_3，x_4是方程

$$mx+b=2x^4+7x^3+3x-5$$

的根，或等价地，是方程

$$x^4+\frac{7}{2}x^3+\left(\frac{3-m}{2}\right)x+\left(\frac{-5-b}{2}\right)=0$$

的根。由上面的证明，$\dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}=\dfrac{-\dfrac{7}{2}}{4}=-\dfrac{7}{8}$，

这与m、b无关。

4.3.7. 设P为图象$f(x)=ax^3+bx$上一点，在P点的切线又与曲线$y=f(x)$相交于Q。设P点的x坐标为x_0。证明Q的x坐标为$2x_0$.

证 直接的证法是写出曲线$y=f(x)$在P点处的切线方程，设为$y=T(x)$，解方程组$y=T(x)$与$y=f(x)$求得Q.

另一种证法如下，解方程组$y=T(x)$与$y=f(x)$也就是求$f(x)-T(x)=0$的根。x_0是这个方程的重根（即重数为2），因为$T(x)$与$y=f(x)$在x_0相切。我们所求的是第三个根，记为x_1，这些根的和$2x_0+x_1$等于x^2的系数，但x^2的系数为0，所以$x_1=-2x_0$.

4.3.8. 设x_1与x_2为方程

$$x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0$$

的根，证明x_1^3与x_2^3是

$$y^2-(a^3+d^3+3abc+3bcd)y+(ad-bc)^3=0$$

的根 .

证 我们知道

$$x_1+x_2=a+d$$
$$x_1x_2=ad-bc$$

因为$(x_1+x_2)^3=x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+x_2^3$，有

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1^2x_2-3x_1x_2^2$$

$$=(a+d)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$$
$$=(a+d)^3-3(ad-bc)(a+d)$$
$$=(a+d)(a^2+2ad+d^2-3ad+3bc)$$
$$=(a+d)(a^2-ad+d^2+3bc)$$
$$=a^3+d^3+3abc+3bcd\text{.}$$

又有

$$x_1^3x_2^3=(ad-bc)^3\text{.}$$

证毕.

4.3.9. 设a、b、c为实数满足$a+b+c=0$，证明

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\right)\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)\text{.}$$

证 由这节的思想，这里介绍一个很巧妙的证法。设$A=ab+bc+ca$，$B=abc$，那么a，b，c是方程

$$x^3+Ax-B=0$$

的根，对正整数n，令$T_n=a^n+b^n+c^n$，那么

$$T_0=3,$$
$$T_1=0,$$
$$T_2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=-2A\text{.}$$

对$n\geqslant 0$，$T_{n+3}=-AT_{n+1}+BT_n$（将a，b，c代入$x^{n+3}=-Ax^{n+1}+Bx^n$中然后相加），这给出

$$T_3=-AT_1+BT_0=3B,$$
$$T_4=-AT_2+BT_1=2A^2,$$
$$T_5=-AT_3+BT_2=-5AB\text{。}$$

于是

$$\frac{T_5}{5}=-AB=\frac{T_3}{3}\cdot\frac{T_2}{2}\text{.}$$

4.3.10. 证明实系数的多项式方程

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_3x^3+x^2+x+1=0$$

不可能全是实根．

证 设r_1，r_2，…，r_n为$P(x)=0$的根。r_1，…，r_n都不是0。在$P(x)=0$的两边同除以x^n，并令$y=\frac{1}{x}$得

$$Q(y)\equiv y^n+y^{n-1}+y^{n-2}+a_3y^{n-3}+\cdots+a_{n-1}y+a_n=0．$$

注意当且仅当$\frac{1}{r}$是$Q(y)=0$的根时，r是$P(x)=0$的根。因此，$Q(y)=0$的根是s_1，s_2，…，s_n，这里$s_i=\frac{1}{r_i}$，$i=1$，…，n，所以

$$\sum_{i=1}^{n}s_i=-1$$

$$\sum_{i<j}s_is_j=1$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n}s_i^2=\left(\sum_{i=1}^{n}s_i\right)^2-2\sum_{i<j}s_is_j=1-2=-1．$$

这个等式说明不是全体s_i都是实数，也就是说不是全体r_i都是实数．

问题

4.3.11. 设k为正整数，求所有满足方程

$$P(P(x))=(P(x))^k$$

的多项式$P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$，其中$a_i$为实数。

4.3.12.

(a) 证明$\log x$不能表成$\frac{f(x)}{g(x)}$的形式，这里$f(x)$与$g(x)$都是实系数多项式．

(b) 证明e^x不能表成$\frac{f(x)}{g(x)}$的形式，这里$f(x)$与$g(x)$

都是实系数多项式．

4.3.13． 证明

$$(1+x)^n-x(1+x)^n+x^2(1+x)^n-+\cdots\pm x^k(1+x)^n$$
$$=(1+x)^{n-1}(1-(-x)^{k+1})．$$

并用这个恒等式证明

$$\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}-\binom{n}{k-1}+\cdots\pm\binom{n}{0}.$$

4.3.14．

（a）在恒等式

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

两边求导数，比较所得恒等式两边x^{k-1}的系数，证明

$$n\binom{n-1}{k-1}=k\binom{n}{k}$$

（b）利用(a)的结论证明

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}\frac{1}{i+1}=\frac{1}{n}．$$

4.3.15． 对正整数n，设$x^{(n)}=x(x-1)\cdots(x-n+1)$，并设$x^{(0)}=1$．证明对所有实数$x$与$y$，

$$(x+y)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{(k)}y^{(n-k)}$$

（提示：可用归纳法证明。但也可考虑一个类似于4.3.3的证明，首先对正整数x，y建立起结论．为此，用两种不同的方法计算从集合$\{1, 2, \cdots, n\}$到$A\cup B$中的一一对应的函数个数，这里A是有x个元的集，B是有y个元的与A不相交的集。再利用恒等定理证明对所有的实数的恒等式）．

4.3.16． $x^4+3x^3+3x^2-5$在整数上可约吗？

4.3.17. 设p为素数，证明

(a) $\binom{p-1}{k}\equiv(-1)^k(\bmod p)$，$0\leqslant k\leqslant p-1$，

(b) $\binom{p+1}{k}\equiv 0 \pmod p$，$2\leqslant k\leqslant p-1$，

(c) $\binom{pa}{pb}\equiv\binom{a}{b} \pmod p$，$a\geqslant b\geqslant 0$，

(d) $\binom{2p}{p}\equiv 2 \pmod p$.

4.3.18. 设 $\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$.

(a) 证明1，ω，ω^2，…，ω^{n-1}是$x^n-1=0$的n个根。

(b) 证明$(1-\omega)(1-\omega^2)\cdots(1-\omega^{n-1})=n$.

(c) 证明$\omega+\cdots+\omega^{n-1}=-1$.

4.3.19.

(a) 解方程$x^3-3x^2+4=0$，已知它有两个根相等。

(b) 解方程$x^3-9x^2+23x-15=0$，已知它的根成算术级数。

4.3.20. 已知r、s、t是$x^3+ax^2+bx+c=0$的根。

(a) 假定$c\neq 0$，求$\frac{1}{r^2}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{t^2}$的值。

(b) 求以r^2，s^2，t^2为根的多项式方程。

4.3.21. 已知实数x，y，z满足

$$x+y+z=3,$$
$$x^2+y^2+z^2=5,$$

$$x^3+y^3+z^3=7,$$

求$x^4+y^4+z^4$（提示：采用类似于4.3.9.所用的论证）

最后用三个问题来结束这一节。这些问题促使我们增加一些关于多项式的结论，这些结论在某些问题中是很有用的。

4.3.22.（定理）如果x_1，x_2，…，x_n是不同的数，y_1，…，y_n是任意数，不全为0，那么有一个唯一的次数不超过$n-1$的多项式$f(x)$具有性质$f(x_1)=y_1$，$f(x_2)=y_2$，…，$f(x_n)=y_n$。

证明的梗概

(a) 设$g(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$。证明

$$\frac{g(x)}{(x-x_1)g'(x_1)}\left(=\frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}\right)$$

是一个$n-1$次多项式，以x_2，…，x_n为零点，在$x=x_1$处等于1。

(b) Lagrange插值公式。证明

$$f(x)=\frac{g(x)}{(x-x_1)g'(x_1)}y_1+\frac{g(x)}{(x-x_2)g'(x_2)}y_2+\cdots+\frac{g(x)}{(x-x_n)g'(x_n)}y_n$$

分别在点x_1，…，x_n处取值y_1，y_2，…，y_n。

(c) 应用设$P(x)$为多项式被$x-1$，$x-2$，$x-3$除时，余数分别为3，5，2。试确定$P(x)$除以$(x-1)(x-2)(x-3)$时的余式 （提示：记$P(x)=Q(x)(x-1)(x-2)(x-3)+R(x)$，这里$R(x)$的次数小于3，因为$R(1)=3$，$R(2)=5$，$R(3)=2$，用Lagrange公式可以定出$R(x)$）

.3.23. （部分分式）

（a）证明如果$f(x)$是次数小于n的多项式，那么分式

$$\frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)},$$

其中x_1，x_2，…，x_n为n个不同的数，可以表示成n个部分分式的和

$$\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\cdots+\frac{A_n}{x-x_n},$$

其中A_1，…，A_n是常数（与x无关）。 （提示：用Lagrange插值公式：在两边同时除以$g(x)$，等等）。

（b）应用设$f(x)$为n次首一多项式，具有不同的零点x_1，x_2，…，x_n。令$g(x)$为任一$n-1$次首一多项式。证明

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{g(x_i)}{f'(x_i)}=1$$

（提示：将$\frac{g(x)}{f(x)}$写成部分分式的和。）

4.3.24. 数列u_0，u_1，u_2，…称为K阶数列，如果有一个K次多项式

$$P(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

满足$u_i=P(i)$，$i=0$，1，2，…。

数列u_0，u_1，u_2，…的一阶差分数列是由

$$u_n^{(1)}=u_{n+1}-u_n,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

所定义的数列$u_0^{(1)}$，$u_1^{(1)}$，$u_2^{(1)}$，…

（a）证明如果u_0，u_1，u_2，…是k阶数列，那么它的一阶差分数列是$k-1$阶数列。定义u_0，u_1，u_2，…的二阶差分数列为一阶差分数列的一阶差分，即数列$u_0^{(2)}$，$u_1^{(2)}$，$u_2^{(2)}$，…由

$$u_n^{(2)}=u_{n+1}^{(1)}-u_n^{(1)}$$
$$=u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

定义，由(a)可知$u_0^{(2)}$，$u_1^{(2)}$，$u_2^{(2)}$，…是$k-2$阶数列。类似地，定义三阶差分数列，四阶差分数列等等。反复应用(a)表明如果u_0，u_1，u_2，…是k阶数列，那么它的$k+1$阶差分数列恒等于0，我们要建立起它的逆命题：如果对任一数列u_0，u_1，u_2，…，求它的各阶差分数列，最后恒等于0，那么原数列的各项是一个多项式在连续整数上的值，即有一个多项式$P(x)$，使得$u_n=P(x)$，$n=0$，1，2，…

(b) 利用归纳法证明

$$u_n=\binom{n}{0}u_0+\binom{n}{1}u_0^{(1)}+\binom{n}{2}u_0^{(2)}+\cdots+\binom{n}{n}u_0^{(n)}.$$

(c) 设原数列由函数$F(x)$表出，即设$F(n)=u_n$，$n=0$，，2，…，对$k=0$，1，2，3，…，令$\Delta^kF(0)=u_0^{(k)}$，对实数x与正整数i，令$x^{(i)}=x(x-1)(x-2)\cdots(x-i+1)$。证明$(b)$中结果可写成

$$F(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Delta^kF(0)}{k!}n^{(k)}$$

注意这与$F(x)$的Taylor展开式

$$F(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

相类似。

(d) 证明如果$k+1$阶差分数列恒等于0，那么原数列为

$$F(n)=\sum_{i=0}^{k}\frac{\Delta^kF(0)}{i!}n^{(i)}$$

(e) 用(d)中结论求出级数$1^4+2^4+\cdots+n^4$的和的公式（提示：注意一阶差分数列是由一个4次多项式给出的，因

此和为 5 次多项式）

补充例题

4.4.30，4.4.31，7.2.10，8.2.2，8.2.3，8.2.10，8.4.11。

4.4 抽象代数

群是一个集G与一个G上的二元运算$*$具有：

(i) 结合律，对G中所有元素a，b，c

$$(a*b)*c=a*(b*c).$$

(ii) 恒等元，G中有一个唯一的元素e（称为G的恒等元），对G每一个元素a，有

$$a*e=a=e*a$$

(iii) 逆元　对G中每一个元a，G中有一个唯一的元a^{-1}（称为a的逆元），满足

$$a^{-1}*a=e=a*a^{-1}.$$

在讨论群时，我们有时把运算$*$看成为"乘法"，这时常常把积中的$*$号省去，于是$a*b$简记为ab，$a*(b*c)$简记为$a(bc)$或abc，等等，更进一步，在我们把$*$号考虑为乘法时，常常把恒等元记为1。并且，我们采用指数记号来简化表达式，例如$a^4=aaaa$，等等。不难证明通常的指数定律在群中成立，即

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m},\ (a^n)^m=a^{nm},\ n,\ m\text{整数}$$

群的运算不一定是可交换的，即不一定对G中所有元a，b有$ab=ba$。这样的群可用实数域上的$n\times n$的满秩矩阵作为例子。

在任一群中有

$$(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1},\ a,\ b\in G.$$

这恒等式是基本的，可证明如下，注意

$(ab)(b^{-1}a^{-1})=a(b(b^{-1}a^{-1}))=a((bb^{-1})a^{-1})=a(ea^{-1})$
$=aa^{-1}=e$及$(b^{-1}a^{-1})(ab)=b^{-1}(a^{-1}(ab))$
$=b^{-1}\cdot((a^{-1}a)b)=b^{-1}(eb)=b^{-1}b=e$，因此$b^{-1}a^{-1}$是$ab$的一个逆元，但$ab$只有一个唯一的逆元，记为$(ab)^{-1}$，所以$(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$。

如果群是可交换的（即对所有a、$b\in G$，$ab=ba$），易知

$$(ab)^n=a^nb^n,\ a,\ b\in G,\ n\text{整数}.$$

4.4.1. 设G为一集，$*$是G上二元运算，具有

(i) 结合律 对G中所有a、b、c，$a*(b*c)=(a*b)*c$；

(ii) 右恒等元. G中有一个元素e，对G中所有元a，$a*e=e$，

(iii) 右逆元. 对G中每个元a，G中有一个元a^{-1}，满足$a*a^{-1}=e$。

证明G是群。

证 我们证明右恒等元e也是左恒等元，右逆元a^{-1}也是a的左逆元，然后再证明e与a^{-1}是唯一的。

a^{-1}是G的元，所以由(ii)，G中有一元$(a^{-1})^{-1}$使得$(a^{-1})*(a^{-1})^{-1}=e$.计算

$$\begin{aligned}a^{-1}a&=(a^{-1}a)e=(a^{-1}a)(a^{-1}(a^{-1})^{-1})\\&=a^{-1}(a(a^{-1}(a^{-1})^{-1}))\\&=a^{-1}((aa^{-1})(a^{-1})^{-1})\\&=a^{-1}(e(a^{-1})^{-1})=(a^{-1}e)(a^{-1})^{-1}\end{aligned}$$

$$=a^{-1}(a^{-1})^{-1}=e$$

这表明a^{-1}是逆元（左逆元同时是右逆元）

又$ea=(aa^{-1})a=a(a^{-1}a)=ae=a$，因此$e$是$G$的恒等元（即对每一$a$，$ea=a=ae$）。

设e'也是G的一个恒等元，那么$e=e*e'$（因为e'是恒等元）$=e'$（因为e是恒等元）。这表明G的恒等元是唯一的。

设$(a^{-1})'$也是a的一个逆元，那么$(a^{-1})'=(a^{-1})'e=(a^{-1})'(aa^{-1})=((a^{-1})'a)a^{-1}=ea^{-1}=a^{-1}$。这表明$a$的逆元是唯一的。

因此G是一个群。

4.4.2. 设G是群.

(a) 消去律，对G中所有a，b，c，证明

由$ab=ac$可推出$b=c$

由$ba=ca$可推出$b=c$.

(b) 设b为G中元，考虑序列

$$1, a, a^2, a^3, \cdots$$

证明或者这序列中元素全不相同或者有一个最小的整数n满足$a^n=1$并且$1, a, \cdots, a^{n-1}$是不相同的。在后一种情况，n称为a的阶，记为$\mathrm{ord}(a)$。在前一种情况，我们称a为无穷阶.

证 (a)将等式两边同时左乘（或右乘）a^{-1},立即得出结论.

(b) 设序列中不是所有元素都不相同，令n为使a^n在序列中重复出现的最小整数，那么$a^n=1$，因为如果$a^n=a^i$，$0<i<n$，由消去律$a^{n-i}=1$，这与n的选择矛盾.

4.4.3. 设a，b为一个群的元素满足$aba=ba^2b$，$a^3=e$并

且对某个正整数n，$b^{2^n-1}=e$。证明$b=e$。

证 注意如果$ab=ba$，那么$aba=ba^2b$就是$a^2b=a^2b^2$，由消去律推出$b=e$。虽然这个群可能不是交换群，我们要证明从a，b的已知等式，可推出$ab=ba$。

注意$ab=ba$就是$ab^{2^n}=b^{2^n}a$，因为由已知$b^{2^n}=b$。要证明$ab^{2^n}=b^{2^n}a$，只要证明$ab^2=b^2a$成立，因为$ab^{2^n}=a(b^2)^n=(b^2)^na$（反复利用$ab^2=b^2a$）$=b^{2^n}a$。

于是只需注意$ab^2=(aba)(a^{-1}b)=(ba^2b)(a^{-1}b)=(ba^2)(ba^{-1}b)=(ba^2)(ba^2b)=(ba^2)(aba)=ba^3ba=b^2a$（因为$a^3=e$），证毕。

设G为群，如果H是G的子集，并且H本身成一个群（在G的运算下），那么H称为G的子群，H的阶定义为H元素的个数，记为$\mathrm{ord}(H)$。

一类重要的子群如下。设$a\in G$，并令

$$\langle a\rangle=\{a^n: n\text{为整数}\}$$

易验证$\langle a\rangle$是G的子群，这称为由a生成的循环子群，注意$\mathrm{ord}(a)=\mathrm{ord}(\langle a\rangle)$。

下面的定理是有限群理论中最重要的一个定理。

Lagrange定理。如果H为有限群G的子群，那么H的阶整除G的阶。

这里有三个重要的推论：

(i) 如果G是n阶群，$a\in G$，那么$a^n=1$。

(ii) 如果G是p阶群，p为素数，那么G为循环群（即$G=\langle a\rangle$，a为G中某个元素）。

(iii) 如果G是群并且$a^n=1$，那么a的阶整除n。

我们把Lagrange定理的证明留作一个习题（见4.4.18）；

但是看看这些推论的证明是有益的。

(i)的证明。设$a\in G$并令$m=\mathrm{ord}(a)$。由Lagrange定理，m整除n，因此设$n=mq$，q为整数。$a^n=a^{mq}=(a^m)^q=1^q=1$。

(ii)的证明。设a为G的元素不同于恒等元，那么$\langle a\rangle$是G的子群，元素多于1个（含有1与a）、由Lagrange定理，$\langle a\rangle$的阶整除p，但p为素数，所以$\langle a\rangle$的阶为p，即$\langle a\rangle=G$。

(iii)的证明。设$m=\mathrm{ord}(a)$，由带余除法，存在整数q与r，满足$n=qm+r, 0\leqslant r<m$。于是$1=a^n=a^{qm+r}=(a^m)^q a^r=a^r$。因为$1, a, \cdots, a^{m-1}$不同，所以必有$r=0$。从而$m$整除$n$（这是整数的带余除法的典型的应用）。

4.4.4. 如果在群G中对某两个$a,b\in G$有$a^5=1, aba^{-1}=b^2$，求$\mathrm{ord}(b)$。

解 因为$a^5=1$，a的阶为1或5，如果$\mathrm{ord}(a)=1$，那么$a=1$，从而$b=b^2$或$b=1$，所以$\mathrm{ord}(b)=1$。

设$\mathrm{ord}(a)=5$。我们有$(aba^{-1})(aba^{-1})=(b^2)^2$，或等价地，$ab^2a^{-1}=b^4$，将这等式左边的$b^2$用$aba^{-1}$代入得$a^2ba^{-2}=b^4$，平方得$(a^2ba^{-2})(a^2ba^{-2})=(b^4)^2$，即$a^2b^2a^{-2}=b^8$。再用$aba^{-1}$代替左边的$b^2$得$a^3ba^{-3}=b^8$，平方得$a^3b^2a^{-3}=b^{16}$，再代入得$a^4ba^{-4}=b^{16}$。再这样做一次得$a^4b^2a^{-4}=b^{32}$或等价地，$a^5ba^{-5}=b^{32}$。但$a^5=a^{-5}=1$，所以$b=b^{32}$，消去得$b^{31}=1$，因为31是素数，$b$的阶为1（如果$b$是恒等元）或31。

4.4.5. 如果G是有限群，m是与G的阶互素的正整数，那么对G中每一个a，G中有一个唯一的b，使得$b^m=a$。

解 令$T: G\to G$，由$T(x)=x^m$定义。我们的目的是证明T是一一对应的函数。设对G中元素x, y，$T(x)=T(y)$，那么$x^m=y^m$。令$n=\mathrm{ord}(G)$。因为n与m互素，存在整数s与t使

得$sn+tm=1$。于是$x=x^{sn+tm}=(x^n)^s(x^m)^t=(x^m)^t$（因为$x^n=1$）$=(y^m)^t$（因为$x^m=y^m$）$=(y^n)^s(y^m)^t$（因为$y^n=1$）$=y^{sn+tm}=y$。

因此T是一一对应的函数，由于G是有限集，T是映到G上的。于是对$a\in G$，存在一个唯一的$b\in G$，使得$T(b)=a$（等价地，$b^m=a$）。

Lagrange定理的第一个推论指出对有限群G中每一个元素a有$a^{\text{ord}(G)}=1$。在应用到特殊的群时，有许多有趣而重要的结论。例如，设V_n为小于n并与n互素的正整数集。V_n的元素在模n的乘法下构成一个群，设$\varphi(n)=\text{ord}(V_n)$（函数$\varphi$称为Euler$\varphi$函数），则Lagrange定理推出下面的

Euler定理。如果a为与n互素的任一整数，那么

$$a^{\varphi(n)}\equiv 1 \pmod n$$

在n为素数p时，我们有$\varphi(p)=p-1$，因此在a不是p的倍数时，$a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$。如果两边同乘a得$a^p\equiv a \pmod p$。这个同余式甚至在a为p的倍数时也成立。于是得到下面的结果。

Fermat小定理 如果a是整数，p是素数，那么

$$a^p\equiv a \pmod p.$$

4.4.6. 证明在p为素数时，2^p-1的每个素因数大于p（素数个数无限是它的推论）

证 在$p=2$时结论成立，因此下面假定p为奇数，设q为素数整除2^p-1，则q为奇数并且$2^p\equiv 1 \pmod q$。由Fermat小定理，$2^{q-1}\equiv 1 \pmod q$，如果$q=p$，我们有$2=2\times 1\equiv 2\times 2^{q-1}\equiv 2^q=2^p\equiv 1 \pmod q$，矛盾。如果$q<p$，那么$q-1$与$p$互素，所以存在整数$s$与$t$满足$sp+t(q-1)=1$，由此得

$2=2^{sp+t(q-1)}\equiv(2^p)^s(2^{q-1})^t\equiv1(\bmod q)$，矛盾．因此$q$必定大于$p$．

4.4.7． 证明如果n为大于1的整数，那么n不能整除2^n-1．

证 设n整除2^n-1，即$2^n\equiv1(\bmod n)$．显然n是奇数，因为2^n-1为奇数。设p为n的素因数，那么$2^n\equiv1(\bmod p)$．把2作为群V_p中的元素，我们知道$2^{p-1}\equiv1(\bmod p)$(Fermat 小定理，因为$\gcd(2, n)=1$)，根据Lagrange定理的第三个推论，$p-1$整除n．到现在为止还没有矛盾。但是，假定我们选择p为整除n的最小素数，那么同样的结论成立，然而这时$\mathrm{ord}(2)$整除n与$\mathrm{ord}(2)$整除$p-1$，此时与p的选择矛盾．因此n不能整除2^n-1．

4.4.8． 证明对任一正整数n，存在2的幂，它有一串连续的、个数超过n的0（在十进制中）。

证 对任一正整数s，存在正整数t使得$2^t\equiv1(\bmod 5^s)$（例如取$t=\varphi(5^s)$）．设$s=2n$。存在正整数q与r使得$2^r-1=q\times5^{2n}$．将两边乘以2^{2n}，改写为

$$2^{r+2n}=2^{2n}+q\times10^{2n},$$

注意由于$2^{2n}<10^n$，在2^{r+2n}的十进表示中至少有n个连续的零．

4.4.9． 已知正整数a与b，证明存在正整数c，使得有无限多个形如$an+b$（n正整数）的数它们的素因数全部$\leqslant c$．

证 在$a=1$时结论显然，因此设$a>1$，首先考虑$\gcd(a, b)=1$的情况，我们要证明在数列$(a+b)^k$，$k=1,2,3,\cdots$中有算术数列$an+b$的无限多项。

因b与a互素，由Euler定理，$b^{\varphi(a)}\equiv1(\bmod a)$．

从而对每一正整数s，

$$(a+b)^{s\varphi(a)+1}\equiv b^{s\varphi(a)+1}\equiv(b^{\varphi(a)})^s b\equiv b(\mathrm{mod}\,a).$$

这意味着对每个正整数s，有一个整数q_s使得

$$(a+b)^{s\varphi(a)+1}=q_s a+b.$$

由此可知每一个$q_s a+b$，$s=1, 2, 3, \cdots$只有那些在$a+b$中出现的素因数。

现在考虑$\gcd(a, b)=d>1$的情况．这时$\gcd\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)=1$，所以由上面的论证，存在$c$，使得数列$\frac{a}{d}n+\frac{b}{d}$有无限多个项，这些项的素因数全部$\leqslant c$．由此可得有无限多个形如$an+b$的数，它们的素因数全部$\leqslant cd$．证毕．

环是一个集合R具有两种运算＋与·满足

(i) R对于运算＋是一个交换群；

(ii) 对R中所有a，b，c，$a(bc)=(ab)c$（"·"号省略了）；

(iii) 对R中所有a，b，c．

$$a(b+c)=ab+ac$$

$$(b+c)a=ba+ca.$$

R不一定具有乘法恒等元；如果有，称R为有恒等元的环．R中的乘法不一定是交换的；如果是，称R为交换环．

4.4.10．设a，b为一个有限环的元素满足$ab^2=b$，证明$bab=b$．

证　显然，如果环是交换的，立即得出结论，但我们必须证明即使环是不交换的，结论也成立．此外，我们不能假定这个环有乘法恒等元．

如果$b=b^2$，那么$bab=bab^2=b^2=b$，结论成立．如果

$b=b^m$对某个整数$m>2$成立，那么$bab=bab^m=b(ab^2)b^{m-2}=b^2b^{m-2}=b^m=b$，结论成立.因此，我们只需证明对某个整数$m\geqslant 2$有$b=b^m$.

设这个环有n个元素.由抽屉原则，在序列b，b^2，…，b^n，b^{n+1}中至少有两个元素相等.令i为最小的整数，使得b^i等于上述序列中它后面的b的幂.

即$b^i=b^{i+j}$，$1\leqslant i<i+j\leqslant n+1$.如果$i>1$，那么在$ab^2=b$的两边右乘b^{i+j-2}得到$ab^{i+j}=b^{i+j-1}$.但因为$b^i=b^{i+j}$，我们有$ab^i=b^{i+j-1}$.这时有两种情况需要考虑 .

如果$i=2$，那么$b=ab^2=b^{j+1}$（根据最后一个方程），但这与我们对i的选择矛盾 .因此，设$i>2$.那么$b^{i-1}=b\cdot b^{i-2}=(ab^2)\times b^{i-2}=ab^i=ab^{i+j-1}$，仍与我们对$i$的选择矛盾 .因此$i=1$，即$b=b^j$对某个$j$成立 .根据第一段的论证，证明完成 .

整区D是一个有单位元的交换环，并且对于D中的元素a，b，由$ab=0$可推出$a=0$或$b=0$.消去律在整域中成立 .因为，设$ab=ac$，$a\neq 0$，那么$a(b-c)=0$，因此$b-c=0$或等价地，$b=c$.类似地，$ba=ca$，$a\neq 0$推出$b=c$.

域是一个有恒等元的交换环，其中每个非零元素有一个乘法逆元 .

4.4.11. 证明一个有限整区（仅有有限多个元素的整区）是域 .

证 我们必须证明这个整区的每个非零元素有乘法逆元 .设$D^*=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$为这整区域的非零元素 .考虑$D^*$中任一元$a$.定义$T: D^*\to D^*$为$T(a_i)=aa_i$，如果$T(a_i)=T(a_j)$，那么$aa_i=aa_j$，于是根据消去律，$a_i=a_j$.

因此T是一一对应的函数．因为D^*是有限的，映射T是映到D^*上的．但D^*的一个元素为乘法恒等元，记为1．于是对于某个$a_k \in D^*$，$T(a_k)=1$，即$aa_k=1$．这表明a有乘法逆元．

问题

4.4.12. 设G为一集，$*$为G中二元运算，满足结合律，并且对G中所有元a，b，有$a^2b=b=ba^2$（省去$*$）．证明G是交换群．

4.4.13. A是有限群G的子集，A含有G中多于一半的元素，证明G中每个元素是A中两个元素之积．

4.4.14. 设G为一群，H是G的含有h个元素的子群．G含有一个元素a，对于H中所有x满足$(xa)^3=1$（恒等元）．在G中，令P为所有积$x_1ax_2a\cdots x_na$的集，n为正整数，$x_i \in H$．证明P的元素个数不超过$3h^2$．

4.4.15. 如果对一群中元素a，b，$a^{-1}ba=b^{-1}$，$b^{-1}ab=a^{-1}$，证明$a^4=b^4=1$．

4.4.16. 设a与b为有限群G的元素．

(a) 证明$\mathrm{ord}(a^1)=\mathrm{ord}(a^{-1})$．

(b) 证明$\mathrm{ord}(ab)=\mathrm{ord}(ba)$．

(c) 如果$ba=a^4b^3$，证明$\mathrm{ord}(a^4b)=\mathrm{ord}(a^2b^3)$．

4.4.17. 设a与b为一个群的元素．如果$b^{-1}ab=a^k$，证明对所有正整数r与s有$b^{-r}a^sb^r=a^{sk^r}$．

4.4.18. （Lagrange定理证明的梗概）．设G为有限群，H为子群有m个元素：$H=\{1, h_2, h_3, \cdots, h_m\}$．对每个$a \in G$，令$Ha=\{a, h_2a, h_3a, \cdots, h_ma\}$．

(a) 证明Ha含m个不同元素．

(b) 证明$Hh_i=H$.

(c) 如果$b\overline{\in}Ha$证明Ha与Hb不相交 .

(d) 证明G中有元素a_1，a_2，…，a_k使得$G=Ha_1\cup Ha_2\cup\cdots\cup Ha_k$并且$Ha_i\cap Ha_j=\varnothing$，如果$i\neq j$.

(e) 用上面的结果给出Lagrange定理的证明 .

4.4.19. 求最小正数n使得2^n-1被47整除 .

4.4.20. 证明如果p为素数，$p>3$，那么ab^p-ba^p被$6p$整除（a、b为整数）.

4.4.21. 设a、b为互素整数 .证明存在整数m、n使得$a^m+b^n\equiv1\ (\mathrm{mod}\,ab)$.

4.4.22. 如果a，b，c，d为正整数，证明30整除$a^{4b+d}-a^{4c+d}$.

4.4.23. 设对所有正整数n，$T_n=2^n+1$，φ为EuLer函数，K为任何正整数，$m=n+K\varphi(T_n)$.证明T_m被T_n整除 .

4.4.24. 证明存在正整数K使得对每个正整数n，$K\cdot2^n+1$为合数（提示：考虑n模24的剩余类并应用中国剩余定理）.

4.4.25. Boole环是一个环，对环中每个元a有$a^2=a$.环中元a称为幂零的，如果对某个正整数n，$a^n=0$.证明环R为Boole环当且仅当R可换，不含非零的幂零元并且对R中所有a，b，$ab(a+b)=0$（提示：证明$a^4-a^5=0$并考虑$(x^2-x^3)^2$）.

4.4.26. 令R为有恒等元的环，$a\in R$.假设有一个唯一的元素a'满足$aa'=1$，证明$a'a=1$.

4.4.27. 设R为有恒等元的环，a为R的幂零元(见4.4.25)。证明$1-a$可逆（即证明R中有一个元b满足$b(1-a)=1=(1-a)b$）.

4.4.28. 设R为环，$C=\{x\in R$：对所有$y\in R$，$xy=yx\}$. 证明如果对所有$x\in R$，$x^2-x\in C$，那么R是交换的（提示：考虑$x+y$，证明$xy+yx\in C$，然后证明$x^2\in C$）.

4.4.29. 设p为素数，J为全体2×2矩阵$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，这矩阵的元素取自$\{0, 1, 2, \cdots, p-1\}$并且满足$a+d\equiv 1$，$ad-bc\equiv 0 \pmod p$.确定$J$中有多少元素.

4.4.30. 设p为素数，$Z_p=\{0, 1, 2, \cdots, p-1\}$.在模$p$的加法与乘法运算下$Z_p$是域.

(a) 证明$0, 1, \cdots, p-1$是x^p-x（看成Z_p上的多项式)的零点.推出$x^p-x\equiv x(x-1)(x-2)\cdots(x-(p-1)) \pmod p$.

(b) Wilson定理.由(a)证明

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod p.$$

(c) 考虑100阶行列式$|a_{ij}|$，其中$a_{ij}=i\cdot j$.证明这行列式的展开式中的100!项的每一项的绝对值模101与1同余。

4.4.31. 设F为有限域，有m个元，这里m为一奇数.$p(x)$为F上形如x^2+bx+c的不可约多项式，$b, c\in F$.F中有多少个元k使$p(x)+k$在F上不可约?

补充例题

1.1.5, 1.1.12.

第五章　级数求和

在这一章中，我们将着重介绍一些最为基本的求和公式。虽然所介绍的公式数目不算多（只包括二项式定理，算术级数和几何级数求和公式，初等幂级数公式等），但我们将会使读者认识到，几种常用的变换技巧（诸如迭套化，微分，积分）足可以使它们成为强有力的而且用途广泛的工具。

5.1　二项式系数

先来引入一些基本符号。我们总是假定n和k代表整数，$n\geqslant k\geqslant 0$。

阶乘表达式：

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}. \tag{1}$$

对称公式：

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}. \tag{2}$$

进出公式：

$$\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1},\quad k\neq 0. \tag{3}$$

加法公式：

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1},\quad k\neq 0. \tag{4}$$

下列公式可以通过累次运用加法公式得到：

求和公式：

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\cdots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}. \quad (5)$$

乘积之和（参阅问题4.3.2与1.3.4）：

$$\binom{r}{0}\binom{s}{n}+\binom{r}{1}\binom{s}{n-1}+\cdots+\binom{r}{n}\binom{s}{0}=\binom{r+s}{n}. \quad (6)$$

二项式定理（参阅问题2.1.1，2.1.11与4.3.3）：

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k}\cdot y^{n-k}=(x+y)^{n}. \quad (7)$$

5.1.1. 用求和公式证明：

(a) $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$；

(b) $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

证 (a) 我们有

$$1+2+3+\cdots+n=\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\binom{3}{1}+\cdots+\binom{n}{1}$$

$$=\binom{1}{0}+\binom{2}{1}+\binom{3}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1}$$

$$=\binom{n+1}{n-1}=\binom{n+1}{2}=\frac{1}{2}n(n+1).$$

(b) 我们先来定出常数a和b，以使等式

$$k^2=a\binom{k}{2}+b\binom{k}{1}=a\frac{k(k-1)}{2}+bk$$

可对一切$k=1, 2, \cdots, n$都成立。将上式两端看成k的二次多项式，于是等式当且仅当两端k的各相应次幂的系数都相等

时成立，由此得到

$$1=\frac{1}{2}a\ ,$$

$$0=-\frac{1}{2}a+b,$$

解得$a=2$，$b=1$。于是就有

$$\begin{aligned}
&1^2+2^2+\cdots+n^2\\
&=\left[2\binom{1}{2}+\binom{1}{1}\right]+\left[2\binom{2}{2}+\binom{2}{1}\right]+\cdots+\left[2\binom{n}{2}+\binom{n}{1}\right]\\
&=2\left[\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\cdots+\binom{n}{2}\right]+\left[\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\cdots+\binom{n}{1}\right]\\
&=2\left[\binom{2}{0}+\binom{3}{1}+\cdots+\binom{n}{n-2}\right]+\left[\binom{1}{0}+\binom{2}{1}+\cdots+\binom{n}{n-1}\right]\\
&=2\binom{n+1}{n-2}+\binom{n+1}{n-1}=2\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}\\
&=2\cdot\frac{(n+1)n(n-1)}{6}+\frac{(n+1)n}{2}=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)
\end{aligned}$$

（(b)的另一种解法见问题5.3.11）.

上面的两个求和公式是经常要用到的，最好能记住它们。记忆其中第一个公式的一种办法见图5.1（以$n=5$为例）。

这一图形也揭示了一般情形下的普遍规律。以S记前n个正整数的和，则

$$S=1+2+\cdots+n,$$

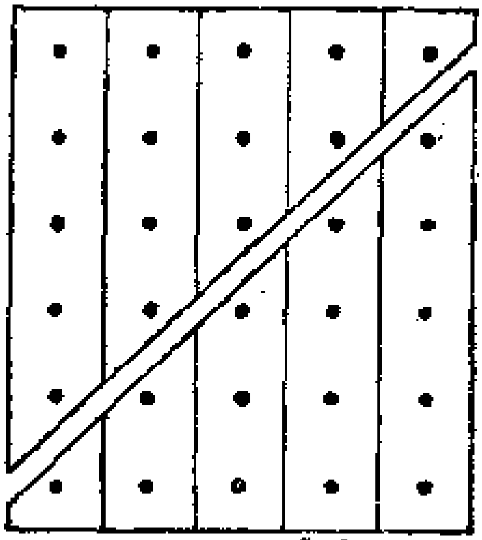
$$S=n+(n-1)+\cdots+1$$

将上述二式相加，得到

$$2S=(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)=n(n+1),$$

所以就有

$$S=\frac{1}{2}n(n+1)$$



$1+2+3+4+5=\frac{5\cdot 6}{2}$

图5.1

重新整理加项是计算和式时的一种常用办法。特别是在加项排列成双重和式时，调换求和顺序往往是有益的。下面介绍一个例子：

5.1.2. 求和

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{j}.$$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	…
0	*					
1	*	*				
2	*	*	*			
3	*	*	*	*		
4	*	*	*	*	*	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

解　和式中的每一项都对应了一个有序数对(i, j)，这些(i, j)在如图所示的三角形区域中的整点上变化。在所给出的和式中，是先对列求和的，我们来调换一下求和顺序，使其先对行求和，于是和式变为

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{n}{i}\binom{i}{j},$$

或者等价地写成

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}.$$

现用下述方法求出此和：由二项式定理知

$$(1+x)^i=\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}x^j,$$

在其中令 $x=1$，就得到了

$$\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}=2^i.$$

于是所要计算的和式即为

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}2^i,$$

再一次运用二项式定理即知该和值是$(1+2)^n=3^n$.

5.1.3. 求下列各式的和：

(a) $\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+n\binom{n}{n}$；

(b) $1+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$.

解 对于第一个和式

$$\sum_{i=1}^{n}i\binom{n}{i}$$

以及诸如此类的求和问题，我们的方针是设法利用进出公式以将求和指标嵌入二项式系数。由于

$$\binom{n}{i}=\frac{n}{i}\binom{n-1}{i-1},$$

所以

$$i\binom{n}{i}=n\binom{n-1}{i-1},$$

于是知有

$$\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}=\sum_{i=1}^{n} n\binom{n-1}{i-1}$$

$$=n\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}=n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}=n\cdot 2^{n-1}\ .$$

对于第二个和式

$$\sum_{i=0}^{n}\ \frac{1}{i+1}\binom{n}{i}$$

可作类似处理。由于

$$\binom{n+1}{i+1}=\frac{n+1}{i+1}\binom{n}{i},$$

所以就有

$$\sum_{i=0}^{n}\ \frac{1}{i+1}\binom{n}{i}=\sum_{i=0}^{n}\ \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{i+1}$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n+1}{i}$$

$$=\frac{1}{n+1}\left[\left(\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\right)-\binom{n+1}{0}\right]$$

$$=\frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right).$$

对于这一类问题，还有一种有效的求和方法，它建立在同时微分或积分下面等式的基础之上：

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{i}=(1+x)^{n}\ .$$

例如，为了求出(a)式的和，先微分上式两端，得到

$$\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}x^{i-1}=n(1+x)^{n-1},$$

然后再在其中令 $x=1$，即可得到

$$\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}=n\cdot 2^{n-1}\ .$$

为了求出(b)式的和，我们积分该式两端，得到

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{1}{i+1}x^{i+1}=\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}+C,$$

由于在$x=0$时该方程左端等于0，所以知$C=-\frac{1}{n+1}$，再在其中令 $x=1$，我们（又如同前面一样）得到

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{1}{i+1}=\frac{1}{n+1}\left[2^{n+1}-1\right].$$

5.1.4. 证明

$$\binom{n}{1}-\frac{1}{2}\binom{n}{2}+\frac{1}{3}\binom{n}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\binom{n}{n}$$
$$=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\ .$$

证 由于等式左端看上去很象某个二项级数的定积分，这提醒我们按如下的思路考虑问题：

$$(1-x)^n=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2-\cdots,$$

$$1-(1-x)^n=\binom{n}{1}x-\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3-\cdots,$$

$$\frac{1-(1-x)^n}{x}=\binom{n}{1}-\binom{n}{2}x+\binom{n}{3}x^2-\cdots,$$

如果再对上式两端自0至1积分，就可得到

$$\int_0^1\frac{1-(1-x)^n}{x}dx=\binom{n}{1}-\frac{1}{2}\binom{n}{2}+\frac{1}{3}\binom{n}{3}-\cdots.$$

所以为证本问题，只须再证明上式左端的积分等于 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 就行了。令 $y=1-x$，即得

$$\int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x}dx=\int_0^1 \frac{1-y^n}{1-y}dy$$

$$=\int_0^1 (1+y+y^2+\cdots+y^{n-1})dy$$

$$=\left[y+\frac{1}{2}y+\cdots+\frac{1}{n}y^n\right]\Big|_0^1$$

$$=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

本题也可不用微积分知识解决，而只要运用本节所介绍的恒等式就行了，不过在技术上要困难一些。但是这种方法颇具启发性，所以我们还是将它的思路简要地介绍如下。

首先通过反复运用加法公式和进出公式，可以知道，对 $n\geqslant i\geqslant 1$，有

$$\frac{1}{i}\binom{n}{i}=\frac{1}{i}\left[\binom{n-1}{i}+\binom{n-1}{i-1}\right]=\frac{1}{i}\binom{n-1}{i}+\frac{1}{n}\binom{n}{i}$$

$$=\frac{1}{i}\left[\binom{n-2}{i}+\binom{n-2}{i-1}\right]+\frac{1}{n}\binom{n}{i}$$

$$=\frac{1}{i}\binom{n-2}{i}+\frac{1}{n-1}\binom{n-1}{i}+\frac{1}{n}\binom{n}{i},$$

按此方法继续推导下去，即得

$$\frac{1}{i}\binom{n}{i}=\frac{1}{n}\binom{n}{i}+\frac{1}{n-1}\binom{n-1}{i}+\cdots+\frac{1}{i}\binom{i}{i}.$$

所以就有

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{1}{i}\binom{n}{i}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\left[\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n-j}{i}\frac{1}{n-j}\right],$$

调换上式右端的求和顺序，得到

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-j}(-1)^{i+1}\binom{n-j}{i}\frac{1}{n-j}\right],$$

再在其中令$k=n-j$，即知等式的右端就是

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\binom{k}{i}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left[\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\binom{k}{i}\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\text{ .（参阅问题5.1.9(a)）}$$

5.1.5. 求和

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n+1}\binom{n+1}{j}\binom{n}{i}.$$

解 本题当然可以运用本节所介绍的恒等式解决；但我们宁愿采用另一种求和技巧.这种技巧看起来有些故弄玄虚，但它在实际上并不古怪，它的基本想法是用概率术语来解释和式，具体做法如下：

用$\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$去乘和式，并将结果写成

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left[\binom{n}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\sum_{j=i+1}^{n+1}\binom{n+1}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right].$$

我们来考虑一场有两个人参加的竞赛．要求A抛掷$n+1$枚硬币，并且最多只算他掷出了n个正面，要求B抛掷n枚硬币，以正面多者取胜．但若二人正面数目相等，则判B胜．

于是，上面的和式恰好代表了A取胜的概率．现在我们再从另一途径考虑这个概率．

显然，上面的竞赛方式等价于下面的方式：先命A和B各抛掷n枚硬币，以正面多者为胜．如果两人的正面数目相等，但不全是正面，则令A抛掷第$n+1$个硬币，如果为正面，

则A获胜，如果为背面，则A败北．至此A和B拥有同样的取胜机会。

现在还剩有一种可能，就是一开始A和B掷出的全都是正面。在这种情况下，不论A最后一枚掷出什么结果，都是B胜，所以B恰好比A多2次获胜机会。这说明在总共2^{2n+1}种抛掷场合中，B除可以赢得这两种场合外，还可以赢得其余场合的半数（即$\frac{1}{2}(2^{2n+1}-2)$），所以A取胜的概率是

$$1-P(B\text{取胜})=1-\frac{2+\frac{1}{2}(2^{2n+1}-2)}{2^{2n+1}}$$

$$=\frac{2^{2n+1}-2-2^{2n}+1}{2^{2n+1}}=\frac{2^{2n}-1}{2^{2n+1}}.$$

由此可知原来所求的和值是$2^{2n}-1$．

问题

5.1.6.

（a）求在0和1000之间为7或11倍数的所有数字之和。

（b）求在0和1000之间为7、11或13倍数的所有数字之和。

5.1.7.

（a）设n为正整数，k为大于1的正整数，证明n^k是几个连续奇数的和。

（b）设n为正整数，m为与n同奇偶的任意正整数，证明乘积mn等于n个连续奇数的和。

5.1.8.　运用求和公式(5)求和(a) $\sum_{k=1}^{n} k^3$；（b）$\sum_{k=1}^{n} k^4$.

5.1.9.　求出下列各和：

（a）$1-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}$；

(b) $1\cdot 2\binom{n}{2}+2\cdot 3\binom{n}{3}+\cdots+(n-1)\cdot n\binom{n}{n}$;

(c) $\binom{n}{1}+2^2\binom{n}{2}+3^2\binom{n}{3}+\cdots+n^2\binom{n}{n}$;

(d) $\binom{n}{1}-2^2\binom{n}{2}+3^2\binom{n}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}n^2\binom{n}{n}$;

(e) $\binom{n}{0}-\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$;

(f) $\sum\limits_{j>1}\left[(-1)^j\binom{n}{j-1}\Big/\sum\limits_{1\le k\le j}k\right]$.

5.1.10.

(a) 随机地抛掷n枚均匀的骰子，出现奇数个6点的概率为多少？（为求和可考虑$\frac{1}{2}((x+y)^n-(x-y)^n)$）.

(b) 如果n是6的倍数，证明

$$\binom{n}{1}-3\binom{n}{3}+3^2\binom{n}{5}-\cdots=0;$$

$$\binom{n}{1}-\frac{1}{3}\binom{n}{3}+\frac{1}{3^2}\binom{n}{5}-\cdots=0.$$

5.1.11. 证明下列恒等式

(a) $$\frac{\binom{n}{1}}{1\times 2}-\frac{\binom{n}{2}}{2\times 3}+\frac{\binom{n}{3}}{3\times 4}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{\binom{n}{n}}{n(n+1)}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1};$$

(b) $$\frac{\binom{n}{0}}{1^2}-\frac{\binom{n}{1}}{2^2}+\frac{\binom{n}{2}}{3^2}-\cdots+(-1)^n\frac{\binom{n}{n}}{(n+1)^2}$$

$$=\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right).$$

5.1.12． 证明

(a) $$\binom{r}{0}\binom{s}{n}+\binom{r}{1}\binom{s}{n+1}+\binom{r}{2}\binom{s}{n+2}+\cdots+\binom{r}{n}\binom{s}{n+n}$$
$$=\binom{r+s}{s-n};$$

(b) $$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}.$$

5.1.13． 利用本节所介绍的恒等式证明
$$\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{n-2k}{n}\binom{n}{k}\right]^2=\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

5.1.14． 求和
$$\sum_{i=n}^{2n-1}\binom{i-1}{n-1}2^{1-i}.$$

（提示：对$i=n$，$n+1$，…，$2n-1$，考虑概率$P(E_i)$，这里$P(E_i)$表示抛掷i次均匀硬币，在前$i-1$次中恰好掷得$n-1$次正面或$n-1$次背面的概率。）

5.1.15． 一个学生在结束了一场头绪纷繁的计算后，凝视着潦草地写在草稿纸上的一个“x_1y_2”。又经过一番乱写乱画之后，他在纸上写下了

x_1y_2

(1) $x_1y_2y_3x_4$

(2) $x_1y_2y_3x_4y_5x_6x_7y_8$

(3) $x_1y_2y_3x_4y_5x_6x_7y_8y_9x_{10}x_{11}y_{12}x_{13}y_{14}y_{15}x_{16}$

在每一行中，总是先照抄上一行，接着再重复一遍，不过重复时将x改成y，将y改成x，然后再按递增的自然顺序为

每个字母标上脚标.这个学生发现在行(1)中x的脚标之和与y的脚标之和刚好相等.在行(2)中也是如此.而且行(2)中x的脚标的平方和与y的脚标的平方和也刚好相等，即$1^2+4^2+6^2+7^2=2^2+3^2+5^2+8^2$.于是这个学生猜想在行($n$)中，对每个$k=1, 2, \cdots, n$，$x$的脚标的$k$次方的和与$y$的脚标的$k$次方的和都应该相等.试对一切$n>0$证明这一结论.

补充例题

1.3.4, 1.3.15, 1.11.4, 2.1.1, 2.1.2, 4.3.5, 4.3.13, 4.3.14, 4.3.15, 4.3.24, 5.4.8, 6.8.3, 7.2.9, 7.3.8, 二项式定理的应用1.1.1（解法4），1.1.2, 1.3.8, 1.6.6 (b), 1.12.4, 3.5.8, 3.5.10, 3.5.11, 3.5.12, 3.5.13, 4.2.13, 4.3.5, 4.4.9, 5.1.2, 5.1.15, 5.2.13, 6.8.3, 7.1.5, 7.1.15 .

5.2 几何级数

许多问题天然地与几何级数有关，所以很有必要研究这类级数的求和问题.我们有

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \quad x \neq 1;$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} x^i = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x},$$

$$|x|<1.$$

5.2.1. 以$\sigma(n)$表示正整数n的所有正因数的和，试求$\sigma(n)$的表达式.

解 显然$\sigma(1)=1$.而当p为素数，则p的正因数只有1和p，所以$\sigma(p)=p+1$.

当n是某个素数的方幂时，譬如说$n=p^m$，则它的所有正因数是1，p，p^2，…，p^m，所以

$$\sigma(p^m)=1+p+\cdots+p^m=\frac{1-p^{m+1}}{1-p}.$$

设$n=ab$，其中a和b是互素的且都大于1的整数。假设a的因数为a_1，a_2，…，a_s，b的因数为b_1，b_2，…，b_t，则n的因数就是a_ib_j，$i=1$，2，…，s，$j=1$，2，…，t。这些因数的和是

$$(a_1b_1+\cdots+a_1b_t)+(a_2b_1+\cdots+a_2b_t)+\cdots+(a_sb_1+\cdots+a_sb_t),$$

也就是

$$(a_1+a_2+\cdots+a_s)(b_1+b_2+\cdots+b_t),$$

所以知有$\sigma(n)=\sigma(a)\sigma(b)$。

现在设n是任意一个正整数，它的标准分解式是

$$n=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_k^{e_k},$$

则由上述讨论知

$$\sigma(n)=\left(\frac{1-p_1^{e_1+1}}{1-p_1}\right)\left(\frac{1-p_2^{e_2+1}}{1-p_2}\right)\cdots\left(\frac{1-p_k^{e_k+1}}{1-p_k}\right).$$

5.2.2. 设$n=2m$，其中m是大于1的奇数，又设$\theta=\exp\left\{\frac{2\pi i}{n}\right\}$，试将$(1-\theta)^{-1}$表示成关于$\theta$的具有整系数$a_i$的多项式

$$a_k\theta^k+a_{k-1}\theta^{k-1}+\cdots+a_1\theta+a_0.$$

解 由于θ是一个n次单位根，而且$\theta^m=\left(\exp\left\{\frac{2\pi i}{2m}\right\}\right)^m=$

$$=\exp\left\{m\cdot\frac{2\pi i}{2m}\right\}=e^{\pi i}=-1,$$ 所以

$$1+\theta+\theta^2+\cdots+\theta^{m-1}=\frac{1-\theta^m}{1-\theta}=\frac{2}{1-\theta}. \qquad (1)$$

又因为m是奇数，所以

$$1-\theta+\theta^2-\cdots+\theta^{m-1}=\frac{1-(-\theta)^m}{1-(-\theta)}=0. \qquad (2)$$

将(1)(2)二式相加，得到

$$2+2\theta^2+\cdots+2\theta^{m-1}=\frac{2}{1-\theta},$$

也就是

$$\frac{1}{1-\theta}=1+\theta^2+\theta^4+\cdots+\theta^{m-1}.$$

5.2.3. 求有穷级数$\cos\theta+\cos2\theta+\cdots+\cos n\theta$的和。

解 由于原级数是如下的几何级数的实部：

$$e^{i\theta}+e^{2i\theta}+e^{3i\theta}+\cdots+e^{in\theta}.$$

而该几何级数的和是

$$\frac{e^{i(n+1)\theta}-1}{e^{i\theta}-1}-1=\frac{e^{i(n+1)\theta}-1-(e^{i\theta}-1)}{e^{i\theta}-1}$$

$$=\frac{e^{i(n+1)\theta}-e^{i\theta}}{e^{i\theta}-1}=\frac{e^{i(n+\frac{1}{2})\theta}-e^{i(\frac{1}{2}\theta)}}{e^{i(\frac{1}{2}\theta)}-e^{-i(\frac{1}{2}\theta)}}$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\frac{e^{i(n+\frac{1}{2})\theta}-e^{i(\frac{1}{2}\theta)}}{\sin\frac{1}{2}\theta}\right]$$

$$=\frac{1}{2i\cdot\sin\frac{1}{2}\theta}\left[\left(\cos(n+\frac{1}{2})\theta-\cos\frac{1}{2}\theta\right)\right.$$

$$\left.+i\left(\sin(n+\frac{1}{2})\theta-\sin\frac{1}{2}\theta\right)\right],$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\theta}\left[\left(\sin(n+\frac{1}{2})\theta-\sin\frac{1}{2}\theta\right)\right.$$

$$+i\left(\cos\frac{1}{2}\theta-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)\Big].$$

所以由和的实部即知

$$\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\theta}\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\sin\frac{1}{2}\theta\right]$$

$$=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}-\frac{1}{2}.$$

5.2.4. 证明分数

$$\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2n}$$

的既约形式是$\frac{a}{2^w}$，其中a是奇数，$w<2n$。

证 由于该分数可以写成

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}n!n!}=\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n},$$

其中的$\binom{2n}{n}$是一个整数，所以剩下的问题是要证明$w<2n$. 我们知道$(2n)!$中2的最高方幂是

$$\left[\frac{2n}{2}\right]+\left[\frac{2n}{4}\right]+\left[\frac{2n}{8}\right]+\cdots+\left[\frac{2n}{2^k}\right]+\cdots$$

（参阅问题3.3.10），$n!$中2的最高方幂是

$$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n}{8}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{2^k}\right]+\cdots$$

所以知有

$$w=2n+2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{2^k}\right]-\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2n}{2^k}\right].$$

但由于

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2n}{2^k}\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{2^{k-1}}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n}{2^k}\right]$$

$$=n+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{2^k}\right]，所以知$$

$$w=2n+2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{2^k}\right]-n-\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{2^k}\right]$$

$$=n+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{2^k}\right]$$

$$<n+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n}{2^k}=2n.$$

5.2.5. 对 $x\geqslant 0$，求下式的和：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{[2^n x]}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

解 可将 x 表示成

$$x=[x]+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

其中 a_n 为0或1。当 x 形为 $m(\frac{1}{2})^n$ 时（m 是一个奇数），我们约定对一切充分大的 k，都取 $a_k=0$。由于对于自然数 n，使 $[2^n x]$ 为偶数的充分必要条件是 $a_n=0$，所以对一切自然数 n 都有 $(-1)^{[2^n x]}=1-2a_n$，于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{[2^n x]}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(1-2a_n)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=1-2(x-[x]).$$

5.2.6. 计算下式的和值：

$$\sum_{(p,q)=1}(x^{p+q}-1)^{-1},\ |x|>1,$$

其中的求和对象遍及一切互素的正整数 p 和 q。

解 $\sum_{(p,q)=1}(x^{p+q}-1)^{-1}=\sum_{(p,q)=1}x^{-(p+q)}$

$\cdot(1-x^{-(p+q)})$

$$=\sum_{(p,q)=1}x^{-(p+q)}\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{-n(p+q)}\right)$$

$$=\sum_{(p,q)=1}\sum_{n=1}^{\infty}x^{-n(p+q)}.$$

当p，q和n取遍求和号所指示的范围时，x^{-1}的方幂随之取遍一切有序正整数对(i, j)的和值。又由于这个级数绝对收敛($|x|^{-1}<1$)，所以经过重排级数的各项即可得到

$$\sum_{(p,q)=1}\sum_{n=1}^{\infty}x^{-n(p+q)}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}x^{-(i+j)}$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}x^{-i}\left(\sum_{j=1}^{\infty}x^{-j}\right)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}x^{-i}\right)^2$$

$$=\left((1-x^{-1})^{-1}-1\right)^2=\left(\frac{x}{x-1}-1\right)^2$$

$$=(x-1)^{-2}.$$

问题

5.2.7. 设$n=2^{p-1}(2^p-1)$，其中2^p-1是素数。证明n的除自身外的所有（正）因数的和恰等于n(具有这一性质的数称为完全数)。

5.2.8. 求$1+22+333+\cdots+n\underbrace{(111\cdots1)}_{n}$的和。

5.2.9. 以$E(n)$表示可使5^k是乘积$1^12^23^3\cdots n^n$的因数的最大整数k.求出$E(5^m)$，其中m是正整数，并讨论$m\to\infty$时的情况。

5.2.10. 一个数列由$a_1=2$与$a_n=3a_{n-1}+1$所定义，求出和数$a_1+a_2+\cdots+a_n$。

5.2.11. 验证下列公式：

(a) $\sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)\theta=\frac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta}$，

(b) $\sum_{k=1}^{n}\sin^2(2k-1)\theta=-\frac{1}{2}n-\frac{\sin 4n\theta}{4\sin 2\theta}$.

5.2.12.

(a) 某人连续抛掷一枚均匀的硬币直到出现正面为止，求该人在抛掷偶数次后结束的概率。

(b) 掷骰子比赛的规则如下：一个参加者掷出一对骰子。如果点数之和为2，3或12，他即输；如果点数之和为7或11，他即赢；如果这次抛掷掷出了任何其他点数，则该数目成为他的“点”，他必须一直抛掷下去，直到或者他“掷出自己的点”（即再次掷得他第一次的点数），这时他赢，或者他掷得7点，这时他输。试求该参加者赢的概率。

5.2.13. 设a，b和c是方程$x^3-x^2-x-1=0$的根，

(a) 证明a，b，c互不相同；

(b) 证明

$$\frac{a^{1000}-b^{1000}}{a-b}+\frac{b^{1000}-c^{1000}}{b-c}+\frac{c^{1000}-a^{1000}}{c-a}$$

是一个整数。

5.2.14.

(a) 证明$\sqrt[n]{n!}\leqslant\prod_{p\mid n}p^{\frac{1}{p-1}}$，其中右端的求积对象遍及所有可整除$n$的正素数$p$.（提示：首先证明$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots\leqslant\frac{n}{p-1}$.）

(b) 运用(a)证明素数有无穷多个。（提示：首先证明$(n!)^2\geqslant n^n$）。

5.2.15. 证明 $\prod\limits_{n=0}^{\infty}(1+x^{2^n})=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$，$|x|<1$。

5.2.16. 求和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}$，$|x|<1$。

5.2.17.

(a) 设p_1，p_2，…，p_n为小于m的所有素数，我们定义

$$\lambda(m)=\prod_{i=1}^{n}(1-p_i^{-1})^{-1}.$$

证明$\lambda(m)=\sum(p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_n^{a_n})^{-1}$，其中的求和范围遍及一切$n$元非负整数组($a_1$，$a_2$，$\cdots a_n$)。(提示：$(1-p_i^{-1})^{-1}=1+p_i^{-1}+p_i^{-2}+\cdots$。)

(b) 证明 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}<\lambda(m)$，并进而证明素数有无穷多个。

补充例题

1.12.1，4.1.4，4.1.8，4.1.9，4.2.5，4.2.8，4.2.12，4.2.18，4.3.13，4.3.18(c)，5.1.4，5.1.11，5.4.1，5.4.7，5.4.9，7.6.6。

5.3 迭套级数

有时可通过“迭套化*)”来计算无穷级数和无穷乘积的值，其作用是不解自明的。

5.3.1. 求无穷级数的和

---

*) 译者注：“迭套化”或译作“望远镜化”是当前西方广为流行的一个数学术语，其大概含义是将无穷级数或无穷乘积设法化为正负相间或其它便于相约的形式，以约去其中绝大部分的加项或因子，从而有利于计算。

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}.$$

解 我们的手法是设法把加项拆成部分分式，以便消去和中的大部分项.为此，先定出A和B，以使得

$$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{A}{3k-2}+\frac{B}{3k+1},$$

也就是使得

$$1=A(3k+1)+B(3k-2).$$

令等式两端相应项的系数相等，我们得到

$$3A+3B=0,$$

$$A-2B=1.$$

从中解得$A=\frac{1}{3}$，$B=-\frac{1}{3}$.所以

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3k+1}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)\right.$$

$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right],$$

这是一个具有“迭套性质”的和式：每个括号内的第二项都可与下一个括号内的第一项抵消，故

$$S_n=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right),$$

所以无穷级数的和是$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}$.

5.3.2. 求无穷级数的和

$$\frac{3}{1\times2\times3}+\frac{5}{2\times3\times4}+\frac{7}{3\times4\times5}$$

$$+\frac{9}{4\times5\times6}+\cdots.$$

解 仍然运用部分分式手段，为此先定出实数 A，B，C，以使得

$$\frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2},$$

该式即为

$$2n+1=A(n+1)(n+2)+Bn(n+2)+Cn(n+1).$$

在其中令$n=0$，得$A=\frac{1}{2}$；令$n=-1$，得$B=1$；令$n=-2$，得$C=-\frac{3}{2}$。于是得到原级数的第n个部分和为

$$S_n=\left[\frac{\frac{1}{2}}{1}+\frac{1}{2}-\frac{\frac{3}{2}}{3}\right]+\left[\frac{\frac{1}{2}}{2}+\frac{1}{3}-\frac{\frac{3}{2}}{4}\right]$$

$$+\left[\frac{\frac{1}{2}}{3}+\frac{1}{4}-\frac{\frac{3}{2}}{5}\right]+\cdots+\left[\frac{\frac{1}{2}}{n-2}+\frac{1}{n-1}-\frac{\frac{3}{2}}{n}\right]$$

$$+\left[\frac{\frac{1}{2}}{n-1}+\frac{1}{n}-\frac{\frac{3}{2}}{n+1}\right]+\left[\frac{\frac{1}{2}}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{\frac{3}{2}}{n+2}\right],$$

该式中的“迭套现象”表现在三个括号之间：每个括号内的三项中的最后一项可与其后括号内的中间项以及再后面一个括号内的第一项的和相抵消，也就是

$$-\frac{\frac{3}{2}}{K}+\frac{1}{K}+\frac{\frac{1}{2}}{K}=0.$$

抵消后的结果为

$$S_n=\left(\frac{\frac{1}{2}}{1}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{\frac{1}{2}}{2}\right)+\left(\frac{-\frac{3}{2}}{n+1}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{\frac{3}{2}}{n+2}\right)$$

$$=\frac{5}{4}-\frac{\frac{1}{2}}{n+1}-\frac{\frac{3}{2}}{n+2},$$

所以无穷级数的和为$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{5}{4}$。

5.3.3. 试将

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2n+mn^2+2mn}$$

表示为一个有理数。

解 将所示和式的和记作S.略去分解部分分式的详细过程，我们得到

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mn(m+n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(m+n+2)}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\frac{1}{n+2}}{m}-\frac{\frac{1}{n+2}}{m+n+2}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}\left[\left(1-\frac{1}{n+3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+5}\right)+\cdots\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\frac{1}{2}}{n}-\frac{\frac{1}{2}}{n+2}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\right.$$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\cdots\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\frac{11}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{12}+\left(\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\cdots\right)$$

$$+\left(\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{4\times6}+\frac{1}{5\times7}+\cdots\right)\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\frac{11}{6}+\frac{25}{24}+\left(\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\right)\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\frac{11}{6}+\frac{25}{24}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{44+25+8+7}{24}=\frac{84}{48}=\frac{7}{4}.$$

5.3.4. 求级数之和

$$\sum_{n=1}^{\infty}3^{n-1}\sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right).$$

解 由de Moivre定理知

$$\sin3\theta=I_m(e^{i3\theta})=I_m((e^{i\theta})^3)$$

$$=I_m(\cos\theta+i\sin\theta)^3$$

$$=I_m(\cos^3\theta+3\cos^2\theta i\sin\theta+3\cos\theta i^2\sin^2\theta+i^3\sin^3\theta)$$

$$=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta$$

$$=3[(1-\sin^2\theta)\sin\theta]-\sin^3\theta$$

$$=3\sin\theta-4\sin^3\theta,$$

由此可知

$$\sin^3\theta=\frac{3}{4}\sin\theta-\frac{1}{4}\sin3\theta,$$

于是得到

$$
\begin{aligned}
S_k &= \sum_{n=1}^{k} 3^{n-1}\sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{k} 3^{n-1}\left[\frac{3}{4}\sin\left(\frac{x}{3^n}\right)-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{x}{3^{n-1}}\right)\right] \\
&= \left(\frac{3}{4}\sin\frac{x}{3}-\frac{1}{4}\sin x\right)+\left[\frac{3^2}{4}\sin\left(\frac{x}{3^2}\right)\right. \\
&\quad \left.-\frac{3}{4}\sin\left(\frac{x}{3}\right)\right]+\left[\frac{3^3}{4}\sin\left(\frac{x}{3^3}\right)-\frac{3^2}{4}\sin\left(\frac{x}{3^2}\right)\right] \\
&\quad +\cdots+\left[\frac{3^k}{4}\sin\left(\frac{x}{3^k}\right)-\frac{3^{k-1}}{4}\sin\left(\frac{x}{3^{k-1}}\right)\right] \\
&= \frac{3^k}{4}\sin\left(\frac{x}{3^k}\right)-\frac{1}{4}\sin x,
\end{aligned}
$$

所以原级数的和为

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} S_k &= \lim_{k\to\infty}\left[\frac{3^k}{4}\sin\left(\frac{x}{3^k}\right)-\frac{1}{4}\sin x\right] \\
&= \lim_{k\to\infty}\left[\frac{x\sin(x/3^k)}{4\ (x/3^k)}-\frac{1}{4}\sin x\right] \\
&= \frac{1}{4}(x-\sin x).
\end{aligned}
$$

在解决涉及递归关系的问题时，“迭套思想”也很有用。这里只举一个例子．其余的例子将放在下一节介绍。

5.3.5. 设某数列满足递归关系

$x_0=0$，$nx_n=(n-2)x_{n-1}+1$，当$n>0$，试求x_n的明确表达式．

解 由所给递归关系式可以看出$x_0=0$，$x_1=1$，$x_2=\frac{1}{2}$，$x_3=\frac{1}{2}$，而且对一切$n\geqslant2$都有$x_n=\frac{1}{2}$。但一般来说，由递归关系式寻找模型的问题并不会都这样容易．因此我们建议大家不妨按下面方式考虑问题，以便可以从中受到些启发。

对$n\geqslant 2$，在递归式的两端同乘上$n-1$，并对一切n记$y_n=n(n-1)x_n$，于是得y_n的递归关系式：

$$y_n=y_{n-1}+(n-1),\quad y_1=0,$$

从而就有

$$y_2-y_1=1,$$
$$y_3-y_2=2,$$
$$y_4-y_3=3,$$
$$\cdots\cdots$$
$$y_n-y_{n-1}=n-1.$$

将上列各式相加（注意其"迭套"性），得到

$$y_n=1+2+\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1),$$

因此知有

$$x_n=\frac{1}{2},\quad n\geqslant 2.$$

问题

5.3.6. 求下列各式的和：

(a) $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots\cdots+\frac{n-1}{n!}$；

(b) $1\times 1!+2\times 2!+3\times 3!+\cdots+n\times n!$；

(c) $\frac{2}{1\times 2\times 3}+\frac{4}{2\times 3\times 4}+\frac{6}{3\times 4\times 5}+\cdots+\frac{2n}{n(n+1)(n+2)}$.

5.3.7. 求下列各无穷乘积之值：

(a) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$；

(b) $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}$.

(c) 证明，通过恒等式$P=e^{\ln P}$可将无穷乘积化为无穷级数。试用这一办法通过求无穷级数$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$的值来解(a)。

5.3.8. 证明，对每个正整数m有

$$\frac{m}{(m+1)(2m+1)}<\sum_{r=m+1}^{2m}\frac{1}{r^2}<\frac{m}{(m+1)(2m+1)}+\frac{3m+1}{4m(m+1)(2m+1)}.$$

（提示：注意$\frac{1}{r(r+1)}<\frac{1}{r^2}<\frac{1}{(r+1)(r-1)}$）。

5.3.9. 设F_1，F_2，…为Fibonacci序列，用"迭套性质"证明下列恒等式：

(a) $F_1+F_2+\cdots+F_n=F_{n+2}-1$；（提示：$F_{n-1}=F_n-F_{n-1}$）。

(b) $F_1+F_3+\cdots+F_{2n-1}=F_{2n}$；

(c) $F_1^2+F_2^2+\cdots+F_n^2=F_nF_{n+1}$；（提示：$F_n^2=F_n(F_{n+1}-F_{n-1})=F_nF_{n+1}-F_nF_{n-1}$，且$F_0=0$。）

(d) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}}=1$；（证明$\frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}}=\frac{1}{F_{n-1}F_n}-\frac{1}{F_nF_{n+1}}$）。

(e) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}F_{n+1}}=1$。（注意$F_2=F_1=1$）。

5.3.10. 求下列无穷级数的和：

(a) $\sin^3x+\frac{1}{3}\sin^3 3x+\frac{1}{3^2}\sin^3 3^2x+\cdots$；

(b) $\cos^3x-\frac{1}{3}\cos^3 3x+\frac{1}{3^2}\cos^3 3^2x-\cdots$。

5.3.11.

(a) 利用恒等式$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$求前n个自然数的平方和；（提示：在恒等式中令k由1变化到n，并对所得的n个方程求和，然后考虑和式的两端。）

(b) 利用类似的办法求前n个自然数的立方和；

(c) 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^5}\sum\limits_{h=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(5h^4-18h^2k^2+5k^4)\right]$.

5.3.12. 证明，每个比1大的整数的倒数都是无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$中有限个连续项的和。

5.3.13. 设$m>1$为整数，x为实数，定义

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{m-1}\left[\frac{x+im^k}{m^{k+1}}\right],$$

其中$[u]$为实数u的整数部分。证明

$$f(x)=\begin{cases}[x], & \text{如果 } x\geqslant 0\\ [x+1], & \text{如果 } x<0.\end{cases}$$

（提示：参阅问题1.2.3）

5.3.14. 利用本节的方法求解下列递归关系：

(a) $x_0=1$，$x_n=2x_{n-1}+1$，当$n>0$；（提示：将递归式两端同时除以2^n）。

(b) $x_0=0$，$nx_n=(n+2)x_{n-1}+1$，当$n>0$；

(c) $x_0=1$，$x_1=1$，$x_2=2$，$x_{n+3}=x_n+3$，当$n>0$；

5.3.15. 平面上有n条直线，其中没有两条是平行的，也没有三条相交于同一点，证明：平面被这些直线分成$\frac{1}{2}(n^2+n+2)$个区域。

5.3.16. 令$d_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$，证明：

$$d_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n},$$

（提示：考虑迭套级数$\sum_{i=1}^{n-1}(d_{i+1}-d_i)$。）并证明：当$n\to\infty$时$d_n\to\ln 2$.（本题的前半部分还有一种证法是：分别考虑$d_n$的两种表达式同调和式$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2(n-1)}$的差．也可参阅6.8节）．

补充例题

6.6.6，7.1.8，7.2.2.

5.4 幂级数

所谓一个幂级数，就是指形式如

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

的一个表达式，其中a_0，a_1，a_2，…是实数．

给出了一个幂级数，也就可以定义出一个函数$f(x)$，函数的定义域就是所有使得幂级数成为收敛的无穷级数的实数x的集合，函数的值由

$$f(c)=a_0+a_1c+a_2c^2+\cdots+a_nc^n+\cdots$$

确定，其中c是任何使得右端收敛的实数．

任何幂级数$\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$都可被证明属于下列三类情况之一：

(i) 对一切实数x，级数都收敛；

(ii) 仅仅当$x=0$时级数收敛；

(iii) 存在实数r，使得当$|x|<r$时级数收敛，当$|x|>$

r时级数发散。

幂级数收敛半径的定义是：对情况（i），定义为∞；对况情(ii)，定义为0；对情况(iii)，定义为r。

显然可以提出一个这样的问题：对于任意给出的函数f，是否都一定可以将它表示成幂级数？关于这方面的一个结果是（带有余项的）Taylor定理：如果f在某个区间$[0, a)$上可以微分所希望的次数，则有

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+$$

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x),$$

其中$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$，$c$为某个实数，$0<c<x<a$。

一种较为重要的场合是$R_n(x)$具有好的性质，也就是在$n\to\infty$时$Rn(x)\to 0$，因为此时就可以有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

这为我们提供了一种由函数$f(x)$确定它的幂级数的办法。根据这一想法，可以找出几种最普通的初等函数的幂级数。下面所列的几种幂级数是经常要用的，应当记住它们：

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots, \qquad (i)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n-1)!}+\cdots, \qquad (ii)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots, \qquad (iii)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,\quad |x|<1,$$ (iv)

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n}+\cdots,$$

$$|x|<1,$$ (v)

$$(1+x)^r=1+\binom{r}{1}x+\binom{r}{2}x^2+\cdots+\binom{r}{n}x^n$$

$$+\cdots,\qquad r\text{为实数},\qquad |x|<1,$$

$$\text{其中}\binom{r}{n}=\frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{n!}.$$ (vi)

5.4.1. 证明e是一个无理数.

证: 假设$e=\frac{h}{k}$，其中h与k是整数

在e^x的幂级数展开式中取$x=1$，我们得到

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\left[\frac{1}{(k+1)!}+\frac{1}{(k+2)!}+\cdots\right],$$

再在上式两端乘以$k!$，并移项，即得

$$k!\left(\frac{h}{k}-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\cdots-\frac{1}{k!}\right)=\frac{1}{k+1}+$$

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\cdots.$$

上式的右端为一正数，左端为一整数，所以左端是一个正整数。但其右端却是

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$
$$+\cdots$$

$$=\frac{1}{k+1}\left(1+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{(k+2)(k+3)}+\cdots\right)$$

$$<\frac{1}{k+1}\left[1+\frac{1}{k+1}+\left(\frac{1}{k+1}\right)^2+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{k+1}}=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{k+1}{k}=\frac{1}{k}<1,$$

不可能为一个正整数.上述矛盾表明e只能是一个无理数.

5.4.2. 证明无穷级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n\ (x-1)^{2n}}{n!}$ 的幂级数展开式中不可能连续有三项的系数都为零.

证 由于无穷级数的和是$f(x)=\exp\{x(x-1)^2\}$,为得出其幂级数展开式,我们需要计算$f^{(n)}(0)$, $n=1,2,3,\cdots$我们知

$$f'(x)=\exp\{x(x-1)^2\}\cdot(3x^2-4x+1),$$

该式具有形式

$$f'(x)=f(x)g(x),$$

其中$g(x)$是一个二次多项式.所以知有

$$f''(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x),$$

$$f'''(x)=f''(x)g(x)+2f'(x)g'(x)+f(x)g''(x),$$

$$f^{(iv)}(x)=f'''(x)g(x)+3f''(x)g'(x)+3f'(x)g''(x),$$

(注意$g'''(x)\equiv 0$.)利用归纳法可以证明,对$n=3,4,5,\cdots$都有

$$f^{(n+1)}(x)=f^{(n)}(x)g(x)+a_nf^{(n-1)}(x)g'(x)+b_nf^{(n-2)}(x)g''(x),$$

其中a_n与b_n分别是一些整数.

假设$f(x)$的幂级数中有连续三项是0,不妨设$f^{(n)}(0)$

:

$=f^{(n-1)}(0)=f^{(n-2)}(0)=0$，于是由上面所推出的递归式知对一切$k>n$，都会有$f^{(k)}(0)=0$，这就意味着$f(x)$是一个多项式，但这与事实矛盾，所以$f(x)$的幂级数中不可能有连续三项零系数。

5.4.3. 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{e}{2}x+x^2\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right)\right]$.

解 我们先对$(1+\frac{1}{x})^x$求出按$\frac{1}{x}$的幂次展成的*Taylor*级数的前面几项，我们有

$$(1+\frac{1}{x})^x=\exp\left\{x\ln(1+\frac{1}{x})\right\}=$$

$$\exp\left\{x\left[\frac{1}{x}-\frac{(\frac{1}{x})^2}{2}+\frac{(\frac{1}{x})^3}{3}-\cdots\right]\right\}$$

$$=\exp\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^3+\cdots\right\}$$

$$=e\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)\right\}\cdot\exp\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}\right)^2\right\}\cdot\exp$$

$$\left\{-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^3\right\}\cdots$$

$$=e\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2x}\right)^2-\cdots\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}\right)^2+\right.$$

$$\left.\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)^2+\cdots\right)\cdots$$

$$=e\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{11}{24}\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{1}{x}\text{的更高次幂}\right),$$

所以就有

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{e}{2}x+x^2\left((1+\frac{1}{x})^x-e\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{e}{2}x+x^2\left(e-\frac{e}{2x}+\frac{11}{24}e\left(\frac{1}{x}\right)^2+\cdots-e\right)\right]$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{11}{24}e+\frac{1}{x}\text{的更高次幂}\right)=\frac{11}{24}e.$$

幂级数还有一个极为有用的性质，就是可以在收敛区间内部逐项微分和积分．也就是说如果$\sum a_n x^n$的收敛半径是r，而$f(x)=\sum a_n x^n$，就有

$$f'(x)=\sum n a_n x^{n-1}\quad\text{与}\quad\int_0^x f(x)dx=\sum\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$

所得的两个幂级数也具有同一收敛半径r.

由上述性质可以推出函数f幂级数表达式的唯一性，这就是说，如果$f(x)=\sum a_n x^n=\sum b_n x^n$，则对一切$n$都有$a_n=b_n$.实际上还有$a_n=b_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$. 为了验证这个结论，只要反复直接微商$f(x)=\sum a_n x^n$两端并计算各阶导数在$x=0$处的值.例如$f(0)=a_0$；$f'(x)=\sum n a_n x^{n-1}$，$f'(0)=a_1$；$f''(x)=\sum n(n-1)a_n x^{n-2}$，$f''(0)=2!a_2$，也就是$a_2=\frac{f''(0)}{2!}$，等等.

5.4.4. 求无穷级数的和：

$$\frac{1^2}{0!}+\frac{2^2}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{4^2}{3!}+\cdots.$$

解 因为

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

在两端同乘x，即得

$$xe^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!},$$

微商上式两端，可得

$$(1+x)e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{n!},$$

如果再用 x 乘此式两端，就有

$$(x+x^2)e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^{n+1}}{n!},$$

再微商上式两端，就得到

$$(1+3x+x^2)e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ \ +1)^2x^n}{n!},$$

在此式中令 $x=1$，就有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}=5e.$$

下面的定理是经常用到的，应当记住。

Abel极限定理：设 $r>0$， $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nr^n$ 收敛， 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^n$ 在 $|x|<r$ 时绝对收敛，并且

$$\lim_{x\to r}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n.$$

5.4.5. 求无穷级数的和：

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots.$$

解 由于

$$\frac{1}{1+x^3}=1-x^3+x^6-x^9+\cdots,\quad |x|<1,$$

所以有

$$\int_0^x\frac{1}{1+x^3}dx=x-\frac{x^4}{4}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^{10}}{10}+\cdots,$$
$$|x|<1.$$

上式右端的级数在 $x=1$ 处收敛（根据交错级数判别法），所以由Abel极限定理即得

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots=\lim_{x\to 1^-}\int_0^x\frac{dx}{1+x^3}$$

上式右端的积分可以通过部分分式算出（此处略去详细的积分过程，）于是得到

$$\int_0^x\frac{dx}{1+x^3}=\frac{1}{3}\left[\ln\frac{1+x}{\sqrt{1-x+x^2}}+\right.$$

$$\left.\sqrt{3}\left(\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}-\operatorname{arctg}\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right],$$

从而知原级数的和是

$$\frac{1}{3}\left(\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right).$$

5.4.6. 设$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+1}}{i}$，$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$。证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}(S_n-S)=\ln 2-\frac{1}{2}.$$

证 我们的任务就是要计算双重级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+i}}{n+i},$$

为此我们来考虑函数

$$F(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-x)^{i+j}}{i+j},\quad |x|<1.$$

由于

$$\begin{aligned}F'(x)&=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}(-x)^{i+j-1}(-1)\\&=\sum_{j=1}^{\infty}(-1)(-x)^j\sum_{i=1}^{\infty}(-x)^{i-1}\\&=\sum_{j=1}^{\infty}(-1)(-x)^j\frac{1}{1+x}\\&=\frac{x}{1+x}\sum_{j=0}^{\infty}(-x)^j\end{aligned}$$

$$=\frac{x}{(1+x)^2}=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2},$$

所以就有

$$\int_0^x F'(x)dx=\int_0^x\frac{dx}{1+x}-\int_0^x\frac{dx}{(1+x)^2},$$

$$F(x)-F(0)=\ln(1+x)\Big|_0^x+\frac{1}{1+x}\Big|_0^x,$$

于是知

$$F(x)=\ln(1+x)+\frac{1}{1+x}-1.$$

又因为$F(x)$的级数在$x=1$处收敛，所以由Abel极限定理即得

$$F(1)=\ln 2+\frac{1}{2}-1=\ln 2-\frac{1}{2}.$$

5.4.7. 幂级数$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$的系数是$a_n=(n^2+1)3^n$，证明存在如下的递归关系式：

$$a_n+pa_{n+1}+qa_{n+2}+ra_{n+3}=0,$$

其中p，q，r与n无关，求出这些常数，并求出级数的和。

证 把a_n的表达式代入递归关系式，得到

$$(n^2+1)3^n+p(n^2+2n+2)3^{n+1}$$
$$+q(n^2+4n+5)3^{n+2}+r(n^2+6n+10)3^{n+3}=0,$$

在等式两端除以3^n，再令对应项系数相等，即可知道p,q,r必须满足下列等式：

$$3p+9q+27r=-1,$$
$$2p+12q+54r=0,$$
$$6p+45q+270r=-1.$$

这是一个有解的线性方程组，所以知系数a_n存在所示的递归关系式。解此方程组可得$p=-1$，$q=\frac{1}{3}$，$r=-\frac{1}{27}$.

下面来求级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+1)3^n x^n$$

的和。将级数分为两个部分

$$\sum_{n=0}^{\infty}n^2(3x)^n+\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n.$$

令$S=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(3x)^n$.如果$|x|<\frac{1}{3}$，则$S=\frac{1}{1-3x}$.于是由

$$\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n=\frac{1}{1-3x},\quad |x|<\frac{1}{3},$$

知

$$\sum_{n=0}^{\infty}n(3x)^{n-1}\cdot 3=\frac{3}{(1-3x)^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}n(3x)^n=\frac{3x}{(1-3x)^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}n^2(3x)^{n-1}\cdot 3=\frac{d}{dx}\left[\frac{3x}{(1-3x)^3}\right]$$

$$=\frac{9x+3}{(1-3x)^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}n^2(3x)^n=\frac{3x(3x+1)}{(1-3x)^2}.$$

综合上述结果，即得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+1)(3x)^n=\frac{3x(3x+1)}{(1-3x)^2}+\frac{1}{1-3x}$$

$$=\frac{18x^2-3x+1}{(1-3x)^2}.$$

5.4.8. 求和

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}(-4)^k\binom{n+k}{2k}.$$

解 容易算出前面几项和值

$S_0=1$,

$$S_1=\binom{1}{0}-4\binom{2}{2}=1-4=-3,$$

$$S_2=\binom{2}{0}-4\binom{3}{2}+16\binom{4}{4}=1-12+16=5,$$

$$S_3=\binom{3}{0}-4\binom{4}{2}+16\binom{5}{4}-64\binom{6}{6}$$

$$=1-24+80-64=-7.$$

根据这种趋势，我们预计会有$S_n=(-1)^n(2n+1)$。

为了能运用数学归纳法来证实这种猜测，我们首先来寻找递归关系式，为此需要进行如下推理：

$$\binom{n+k}{2k}=\binom{n+k-1}{2k-1}+\binom{n+k-1}{2k}$$

$$=\left[\binom{n+k-2}{2k-2}+\binom{n+k-2}{2k-1}\right]+\binom{n+k-1}{2k}$$

$$=\binom{n+k-2}{2k-2}+\left[\binom{n+k-1}{2k}-\binom{n+k-2}{2k}\right]+$$

$$\binom{n+k-1}{2k}$$

$$=\binom{n+k-2}{2k-2}+2\binom{n+k-1}{2k}-\binom{n+k-2}{2k},$$

于是知

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}(-4)^k\binom{n+k}{2k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-4)^k\binom{n+k-2}{2k-2}+2\sum_{k=0}^{n}(-4)^k\cdot$$

$$\binom{n+k-1}{2k}-\sum_{k=0}^{n}(-4)^k\binom{n+k-2}{2k}$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{k=0}^{n}(-4)^k\binom{n+k-2}{2k-2}+2\sum_{k=0}^{n-1}(-4)^k\binom{n-1+k}{2k}\\
&\quad-\sum_{k=0}^{n-2}(-4)^k\binom{n-2+k}{2k}\\
&=-4\sum_{k=0}^{n}(-4)^{k-1}\binom{n+k-2}{2k-2}+2S_{n-1}-S_{n-2}\\
&=-4\sum_{k=0}^{n-1}(-4)^k\binom{n+k-1}{2k}+2S_{n-1}-S_{n-2}\\
&=-4S_{n-1}+2S_{n-1}-S_{n-2}\\
&=-2S_{n-1}-S_{n-2}.
\end{aligned}
$$

通过这个递归关系式，我们就可以运用数学归纳法来证明前面的猜测$S_n=(-1)^n(2n+1)$了。

作为又一个例题，我们来考虑递归关系式

$$S_n=-2S_{n-1}-S_{n-2},\ S_0=1,\ S_1=-3.$$

我们还假定不能由前若干项看出S_n的表达式，我们打算来介绍一种可资发现表达式的办法，即所谓利用母函数的办法，详情如下：

设$F(x)$是被称作母函数的幂级数，它的系数是S_0，S_1，S_2，…，即有

$$F(x)=S_0+S_1x+S_2x^2+\cdots+S_nx^n+\cdots.$$

设在x处级数收敛于$F(x)$，于是就有

$$
\begin{aligned}
2xF(x)&=2S_0x+2S_1x^2+2S_2x^3+\cdots+2S_{n-1}x^n+\cdots,\\
x^2F(x)&=\qquad\qquad\quad S_0x^2+S_1x^3+\cdots+S_{n-2}x^n+\cdots.
\end{aligned}
$$

相加之，再利用$S_n+2S_{n-1}+S_{n-2}=0$这一事实，即得

$$(1+2x+x^2)F(x)=S_0+(S_1+2S_0)x,$$

也就是有

$$F(x)=\frac{1-x}{(1+x)^2}.$$

下面再将该式右端展开为幂级数．为此，首先微商如下等式的两端：

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,$$

得到

$$\frac{-1}{(1+x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1},$$

再在该式两端同乘 $x-1$，即得

$$\begin{aligned}F(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(x-1)x^{n-1}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^n.\end{aligned}$$

由这里我们也可以看出S_n的表达式，它就是x^n的系数，即 $S_n=(-1)^n(2n+1)$．

由于我们完全忽略了对收敛性的考虑，所以看起来母函数方法能否经得起推敲还是令人生疑的．但是这种方法确实可以在类似的问题中用来帮助提出（关于递推关系式方面的）猜想，而猜想可以用其它方法（例如数学归纳法）加以验证．

5.4.9．求有穷级数$a_0+a_1+\cdots+a_n$的和，其中$a_0=2$，$a_1=5$，又当$n>1$时有$a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}$．

解　容易写出数列a_n的前面若干项：

2，5，13，35，97，275，393，…，

但关于数列的通项公式却不是一眼可以看出，所以我们还是来求助于母函数方法。考虑

$$F(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

则有

$$-5xF(x)=-5a_0x-5a_1x^2-\cdots-5a_{n-1}x^n-\cdots,$$

$$6x^2F(x)=\qquad\qquad 6a_0x^2+\cdots+6a_{n-2}x^n+\cdots,$$

将上述三式相加，并利用递归关系式 $a_n-5a_{n-1}+6a_{n-2}=0$，就得到

$$(1-5x+6x^2)F(x)=a_0+(a_1-5a_0)x,$$

于是有

$$F(x)=\frac{2-5x}{(1-2x)(1-3x)}.$$

将它写成部分分式的和并运用几何级数，得到

$$\begin{aligned}F(x)&=\frac{1}{1-2x}+\frac{1}{1-3x}\\&=\sum_{i=0}^{\infty}(2x)^i+\sum_{i=0}^{\infty}(3x)^i\\&=\sum_{i=0}^{\infty}(2^i+3^i)x^i,\end{aligned}$$

所以知 $a_i=2^i+3^i$，$i=0,1,2,3,\cdots$。〔我们可以用归纳法验证这个公式：首先 $a_0=2^0+3^0=2$，$a_1=2+3=5$，又当 $i\geqslant 2$ 时，有 $a_i=5a_{i-1}-6a_{i-2}=5(2^{i-1}+3^{i-1})-6\cdot(2^{i-2}+3^{i-2})=5(2^{i-1}+3^{i-1})-3\times 2^{i-1}-2\times 3^{i-1}$

$$=2^i+3^i.〕$$

现在再来计算级数的和：

$$a_0+a_1+\cdots+a_n=\sum_{i=0}^{n}(2^i+3^i)=\sum_{i=0}^{n}2^i+\sum_{i=0}^{n}3^i$$

$$=\frac{2^{n+1}-1}{2-1}+\frac{3^{n+1}-1}{3-1}=2^{n+1}-1+\frac{3^{n+1}-1}{2}$$

$$=\frac{2^{n+2}+3^{n+1}-3}{2}.$$

5.4.10. 设$T_0=1$，而当$n\geqslant 1$时有$T_n=T_0T_{n-1}+T_1T_{n-2}+\cdots+T_{n-1}T_0$，求出$T_n$的显式表达式。

解 这个递归关系式源于问题3.5.12，为了解它，令

$$f(x)=T_0+T_1x+T_2x^2+\cdots+T_nx^n+\cdots,$$

又记

$$F(x)=xf(x)=T_0x+T_1x^2+T_2x^3+\cdots+T_nx^{n+1}+\cdots.$$

之所以这样做的原因乃在于

$$(F(x))^2=T_0{}^2x^2+(T_0T_1+T_1T_0)x^3+\cdots+(T_0T_{n-1}+T_1T_{n-2}+\cdots+T_{n-1}T_0)x^{n+1}+\cdots.$$

于是可根据递归关系式得到

$$(F(x))^2=T_1x^2+T_2x^3+\cdots+T_nx^{n+1}+\cdots=F(x)-T_0x,$$

再解该二次方程，即得

$$F(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}.$$

（由于$F(0)=0$，所以只能取解中带负号的一个；对于带正号的一个将会有$F(0)=1$.）

于是只要再根据幂级数展开式

$$\sqrt{1-4x}=1+\binom{\frac{1}{2}}{1}(-4x)+\binom{\frac{1}{2}}{2}(-4x)^2+\cdots+\binom{\frac{1}{2}}{n+1}(-4x)^{n+1}+\cdots,$$

就可以得到$F(x)$中x^{n+1}的系数是

$$
\begin{aligned}
T_n &= -\frac{1}{2}\binom{\frac{1}{2}}{n+1}(-4)^{n+1} \\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)\cdot \\
&\quad (-1)^{n+1}4^{n+1} \\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{(n+1)!}\cdot \\
&\quad \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\cdot(-1)^{n+1}4^{n+1} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1\times 2\times 3\times 4\times\cdots\times 2n}{(n+1)!\cdot 2^n n!}\cdot\frac{4^{n+1}}{2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{(2n)!}{n!\ n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.
\end{aligned}
$$

采用同实数场合相类似的办法，还可以引入复值幂级数的概念

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z$$

其中的系数a_n可以是复数，z是一个复变量。所有可使该级数收敛的z值确定出一个函数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

可以证明，在将幂级数中的实变数x换成复变数z之后，本节开头所给出的有关初等函数的幂级数(i)—(vi)仍然成立。

复幂级数的一个很有用处的性质是：如果$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$，则$\mathrm{Re}f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Re}(a_n z^n)$及$\mathrm{Im}f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Im}(a_n z^n)$

作为例子，我们来证明3.5节所引入的公式$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$的使用合法性。由于

$$\mathrm{Re}\,e^{i\theta}=\mathrm{Re}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Re}\frac{(i\theta)^n}{n!}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\theta^{2k}}{(\ k)!}=\cos\theta,$$

及

$$\mathrm{I_m}e^{i\theta}=\mathrm{I_m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{I_m}\frac{(i\theta)^n}{n!}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sin\theta,$$

所以就有$e^{i\theta}=\mathrm{Re}\,e^{i\theta}+i\mathrm{I_m}e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$.

5.4.11. 求无穷级数的和：

$$S=r\cos\theta+\frac{r^2}{2}\cos 2\theta+\frac{r^3}{3}\cos3\theta+\cdots,\quad 0<r<1,$$

$0<\theta<\pi$.

解 考虑无穷级数

$$-\ln(1-z)=z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots+\frac{z^n}{n}+\cdots,\quad |z|<1,$$

并令$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，就有

$$-\ln(1-r\cos\theta-ir\sin\theta)$$

$$=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{2}r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)+\cdots,$$

取等式两端的实部，即可得到

$$\mathrm{Re}(-\ln(1-r\cos\theta-ir\sin\theta))=r\cos\theta+\frac{r^2}{2}\cos2\theta$$

$$+\frac{r^3}{3}\cos3\theta+\cdots\ .$$

由于对复数w，有$\ln w=\ln|w|+i\arg w$，所以有

$$r\cos\theta+\frac{r^2}{2}\cos2\theta+\cdots=-\ln\sqrt{(1-r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}$$

$$=-\ln\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}\ .$$

问题

5.4.12. 设p与q是实数，满足条件$\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=1$，$0<p\leqslant\frac{1}{2}$，证明

$$p+\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{3}p^3+\cdots=q-\frac{1}{2}q^2+\frac{1}{3}q^3-\cdots.$$

5.4.13. 将下列函数展开成幂级数：

(a) $\frac{1}{x^2+5x+6}$;

(b) $\frac{1+x}{(1+x^2)(1-x)^2}$;

(c) $\arcsin x$;

(d) $\mathrm{arctg}\,x$；（并利用级数找出一列有理数收敛到π）。

5.4.14. 求下列无穷级数的和：

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-4\pi^2r^2)^n}{(2n+1)!}$，$r$为非零整数；

(b) $1+\frac{1}{3}+\frac{1\times 3}{2!3^2}+\frac{1\times 3\times 5}{3!3^3}+\cdots$;

(c) $\frac{2}{9}+\frac{2}{2!}\left(\frac{2}{9}\right)^2+\frac{2\times 5}{3!}\left(\frac{2}{9}\right)^3+\frac{2\times 5\times 8}{4!}\left(\frac{2}{9}\right)^4+\cdots$;

(d) $\frac{1^2}{1!}x+\frac{1^2+2^2}{2!}x^2+\frac{1^2+2^2+3^2}{3!}x^3+$
$+\frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{4!}x^4+\cdots$

5.4.15. 设$f_0(x)=e^x$，$f_{n+1}(x)=xf_n'(x)$，$n=0,1,2,\cdots$. 证明

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n(1)}{n!}=e^e.$$

（提示：考虑$g(x)=e^{e^x}$）。

5.4.16. 证明$\frac{x^3}{x^2-1}$在$x=0$处的n阶导数是：如果n是偶数，则导数值是0；如果n是大于1的奇数，则导数值为$-n!$。

5.4.17. 证明函数方程

$$f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)=(1+x^2)f(x)$$

可以被下面的函数所满足：

$$f(x)=1+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{5}x^4+\frac{1}{7}x^6+\cdots,\quad |x|<1\ .$$

5.4.18. 用幂级数证明$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$

5.4.19. 证明

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{1-x}=&x+x^2+(1-\frac{1}{3!})x^3+(1-\frac{1}{3!})x^4\\&+(1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!})x^5+(1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!})x^6\\&+(1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!})x^7\\&+(1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!})x^8+\cdots\ .\end{aligned}$$

5.4.20. 以$B(n)$表示正整数n的二进制表达式中1的数目.例如：$B(6)=B(110_2)=2$，$B(15)=B(1111_2)=4$，等等。判断

$$\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B(n)}{n(n+1)}\right\}$$

是否为有理数.

5.4.21. 对于怎样的实数a，由初始条件$u_0=a$及递归关系式$u_{n+1}=2u_n-n^2$所确定的数列对每一个$n\geqslant0$都有$u_n>0$?

5.4.22. 证明

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3=1+6x+18x^2+\cdots+(4n^2+2)x^n+\cdots,$$
$$|x|<1 .$$

5.4.23. 设$T_n=\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j+1}}{1-2j}$，$T=\lim_{n\to\infty}T_n$. 证明
$$\sum_{n=1}^{\infty}(T_n-T)=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4} .$$

5.4.24. 解递归关系$a_0=1$，$a_1=0$，$a_2=-5$及对$n\geqslant3$，
$$a_n=4a_{n-1}-5a_{n-2}+2a_{n-3} .$$

5.4.25. 用母函数技巧证明第n个Fibonacci数F_n等于
$$F_n=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} .$$

5.4.26. 求级数$a_0+a_1+\cdots+a_n$的和，其中$a_0=2$，$a_1=17$，且当$j>1$时，$a_j=7a_{j-1}-12a_{j-2}$.

5.4.27. 设$a>0$，$b>0$，证明在函数$e^{ax}\cos bx$的关于x的方幂的幂级数展开式中，或者没有零系数，或者有无穷多个零系数.

5.4.28. 求无穷级数的和：
$$S=1-2r\cos\theta+3r^2\cos2\theta-4r^3\cos3\theta+\cdots,\quad |r|<1 .$$

5.4.29. 证明$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n!}=\sin(\sin\theta)e^{\cos\theta}$.

5.4.30. 利用无穷级数求$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3-5x^2+1}-x)$.

补充例题

1.12.1, 5.3.16, 6.8.1, 7.6.7(c). 还可参阅5.2节（几何级数）和7.5节（用级数表示的不等式）.

第六章　中级实分析

本章介绍中级水平的微积分知识．我们仍以问题为线索，并以极限概念为基础，系统地回顾有关连续函数、可导函数以及可积函数的概念和性质（6.1节为连续性，6.3节为可导性，6.8节为可积性）．在处理与各种函数类有关的问题时，应当注意一些基本的原则，例如，当问题涉及的是连续函数，就可考虑运用中间值定理或是最大值、最小值定理，当问题涉及的是可导函数，就可考虑运用微分中值定理，等等．我们将在举例说明L′Hôpital法则、微积分学基本定理的应用的同时，举例说明上述基本原则的运用．

本章通篇都以R表示实数集合．

6.1　连续函数

如果当$x\to a$时有$f(x)\to f(a)$，就称实值函数f在$x=a$处连续．更确切地说，实值函数f在$x=a$处连续是指：

(i) $f(a)$有定义，

(ii) $\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在，

(iii) 且有$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$．

（当a为f的定义域的边界点时，性质(ii)中的x应限制在定义域内）．

如果函数f在某个区域D内的每一个点处连续，就称它在该区域内连续。

可以证明，函数f在$x=a$处连续的充分必要条件是：对任何一列收敛到a的数列$\{x_n\}$，相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$都收敛到$f(a)$。

这个充分必要条件叫做函数f连续性定义的序列形式。它常常用来验证函数在某个点处的不连续性。例如，验证如下定义的函数f在$x=0$处不连续：

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & \text{如果 } x\neq 0,\\[2ex] 0, & \text{如果 } x=0,\end{cases}$$

就只须取$x_n=\dfrac{2}{(4n+1)\pi}$，就可以看出$x_n\to 0(n\to\infty)$，但

$f(x_n)=\sin\dfrac{1}{x_n}=\sin\dfrac{(4n+1)\pi}{2}=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$，它并不收敛到$f(0)=0$。

6.1.1. 定义函数f：$[0,1]\to[0,1]$如下：$f(1)=1$，而对其余的$a\in[0,1)$，当它的十进制小数表达式为$a=.a_1a_2a_3a_4\cdots$时，就定义$f(a)=.0a_10a_20a_30a_4\cdots$，（当$a$的十进制小数表达式不唯一时，一律采用有尽的小数记法，例如.099999…记作.1）。试讨论f的连续性。

解　容易看出f是一个单调递增的函数。我们来证明它在每个有限的十进制小数处都不连续，也就是要证明它在每个形如$\dfrac{N}{10^n}$的点处都不连续，其中N为正整数，$1\leqslant N<10^n$。作为例子，我们考虑$a=.413$，根据函数f的定义，有$f(a)=.040103$。取数列$\{x_n\}$如下：

$$x_1 = .4129,$$
$$x_2 = .41299,$$
$$x_3 = .412999,$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_n = .412\underbrace{999\cdots9}_{n\text{个}}.$$

当然有$\{x_n\}$收敛到a，但

$$f(x_n) = .0401020\underbrace{\overline{909}\cdots\overline{09}}_{n\text{对}},$$

显见$\{f(x_n)\}$并不收敛到$f(a)$。所以函数f在$x=a$处不续。

还有一个类似的证法，其基本想法是建立在每个有限十进制小数都有两种不同的表达式：

$$a = .a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}a_n, \qquad a_n \neq 0,$$

及 $a = .a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}(a_n-1)999\cdots$.

之上的，这里不再详述。

下面对$a\in(0, 1)$但非有限十进制小数，我们来证明f在$x=a$处连续。由于a具有唯一的表达式

$$a = .a_1a_2a_3a_4\cdots,$$

且其中存在任意大的n，可使$a_n\neq 0$，$a_{n+1}\neq 9$. 故当对每个这样的n，定义X_n与Y_n为

$$X_n = .a_1a_2\cdots a_n \quad \left(=\sum_{i=1}^{n} a_i/10^i\right),$$

$$Y_n = .a_1a_2\cdots a_n(a_{n+1}+1) = X_n + (a_{n+1}+1)/10^{n+1},$$

则都有$a\in(X_n, Y_n)$，且区间(X_n, Y_n)中的每一个数的前n个数字都与X_n及Y_n相同，因此，$(X_n,\ Y_n)$中的每一个数都

被f映射到区间$(f(X_n),\ f(Y_n))$中.显然，数列$\{X_n\}$与$\{Y_n\}$都收敛到a，而数列$\{f(X_n)\}$与$\{f(Y_n)\}$都收敛到$f(a)$。由于任何收敛到a的数列$\{X_n\}$自某项后，都终将成为$(X_n,\ Y_n)$的内点，所以必定有$\{f(x_n)\}$收敛到$f(a)$，故知f在$x=a$处连续。

上述问题是很难单凭几何直觉来考虑，如果离开了对连续性概念的透彻了解，是不能真正懂得其证明的过程。而要懂得下一个问题的证明过程，还要了解有关连续性的精确描述：所谓函数f在$x=a$处连续，是指对每个$\varepsilon>0$，都存在数$\delta>0$，使得$|x-a|<\delta$蕴涵$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$．

6.1.2．设$f: R\to R$是一个1—1连续函数，它具有一个不动点x_0(即$f(x_0)=x_0$)且对一切x，有$f(2x-f(x))=x$。试证$f(x)\equiv x$．

证　令$S=\{x\,|\,f(x)=x\}$.由于f连续，知S是R的一个闭子集(即如果$x_n\in S$，$x_n\to x$，则$x\in S$；这是因为$x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)=f(x)$。)．

现设$S\neq R$．如果x_0是S的一个边界点(x_0的每一个邻域中都含有不属于S的点；但由于S是闭集，故有$x_0\in S$)。

如果$y\in S$，则存在非零实数r，使$f(y)=y+r$．因f为1-1的连续函数，且有$f(2x-f(x))=x$，故由此可以推出，对一切整数n都有

$$f(y+nr)=(y+nr)+r,$$

(其详细推导可见问题2.1.12)。这个等式是下面论证的关键．

我们的基本思路是：如果$x\in S$，也就是$f(x)\neq x$．那末我们就在$R-S$中取一个充分靠近x_0的y，并取得使$f(y)$

也充分靠y（由于f在x_0处连续并且$f(x_0)=x_0$，所以这是可能的）。于是使得等式$f(y)=y+r$成立的非零实数r的绝对值也就充分地小。这样，我们就可由$f(y+nr)=(y+nr)+r$的事实导出一个与f在x处连续的矛盾来（参阅图6.1）.

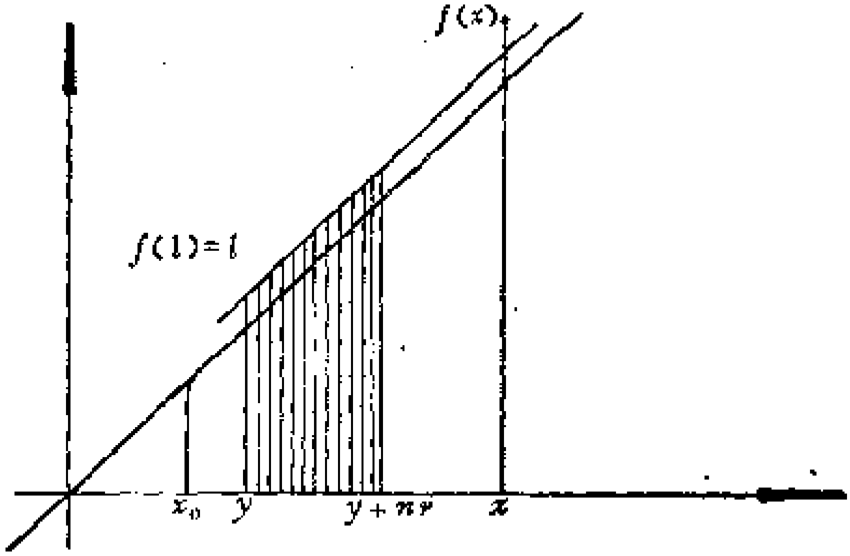


图6.1

证明如下：如上，假定x_0为S的边界点，而对x有$f(x)\neq x$.记$\varepsilon=|f(x)-x|$. 由于f在x处连续，故存在$\delta>0$,我们可设$\delta\leqslant\frac{1}{4}\varepsilon$,使得$|z-x|<\delta$蕴涵$|f(z)-f(x)|<\frac{1}{4}\varepsilon$.又由于f在x_0处连续，故存在$\eta>0$，我们可设$\eta<\delta$，使得$|w-x_0|<\eta$蕴涵$|f(w)-f(x_0)|<\delta$.现选取$y\in(x_0-\eta, x_0+\eta)$，使得$f(y)\neq y$(由于x_0是S的边界点，所以这种y是存在的），于是

$$0<|f(y)-y|\leqslant|f(y)-f(x_0)|+|f(x_0)-y|=$$
$$=|f(y)-f(x_0)|+|x_0-y|<\delta+\eta<2\delta.$$

记$r=f(y)-y$（注意：r可能为负值）.由于$0<|r|<2\delta$,

所以存在一个整数n使得$y+nr\in(x-\delta,\ x+\delta)$，但由于$f(y+nr)=(y+nr)+r$，所以就有

$$
\begin{aligned}
\varepsilon=|f(x)-x|&\leqslant|f(x)-f(y+nr)|+|f(y+nr)-x|\\
&<\frac{1}{4}\varepsilon+|(y+nr)+r-x|\\
&\leqslant\frac{1}{4}\varepsilon+|(y+nr)-x|+|r|\\
&<\frac{1}{4}\varepsilon+\delta+2\delta<\frac{1}{4}\varepsilon+\frac{1}{4}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon,
\end{aligned}
$$

这个矛盾表明必有$S=R$，解毕．

在闭区间$[a,\ b]$上连续的函数，具有两个最为重要的性质，一个是它们可以取得该区间上的最大值和最小值，一个是可以取得介于两个最值之间的每一个值。这两条性质可以陈述为如下的两条定理：

最大值最小值定理：如果f是在$[a,\ b]$上连续的函数，那么一定在$[a,\ b]$中存在数c与d，使得对$[a,\ b]$中的每一个x都有$f(c)\leqslant f(x)\leqslant f(d)$．（这就是说$f(d)$是$f$在$[a,b]$中的最大值，而$f(c)$是最小值）．

中间值定理：如果f是在$[a,\ b]$上连续的函数，又如果$f(a)<y<f(b)$（或$f(b)<y<f(a)$），则在(a,b)中存在一个数c，使得$f(c)=y$．

这两个定理可以有很多方法证明，下面我们将梗概地介绍中间值定理的一种证法，这种方法（叫做反复对分法）还可用于其它问题（例如问题6.3.6）．

设f是一个在闭区间$[a,b]$上连续的函数，且$f(a)<f(b)$（对$f(a)>f(b)$，可类似证明）。设$y\in(f(a),\ f(b))$，要

在$[a, b]$中找到一点c，使得$f(c)=y$.寻找过程如下（最好画一个图）：令$a_0=a$，$b_0=b$，并令x_1是区间$[a_0, b_0]$的中点（第一次对分）.如果$f(x_1)<y$，就定义$a_1=x_1$，$b_1=b_0$；否则，即如果$y\leqslant f(x_1)$，就定义$a_1=a_0, b_1=x_1$；总之，都有$f(a_1)\leqslant y\leqslant f(b_1)$，且$[a_1, b_1]$的长度恰为$[a_0, b_0]$之半。再令$x_2$为$[a_1, b_1]$的中点（第二次对分）。如果$f(x_2)<y$，就定义$a_2=x_2$，$b_2=b_1$；否则，即如果$y\leqslant f(x_2)$，就定义$a_2=a_1$，$b_2=x_2$；总之，仍有$f(a_2)\leqslant y\leqslant f(b_2)$，且$b_2-a_2=\frac{1}{4}(b-a)$. 照此办法一直对分下去，就可得到一个无限的闭区间套序列

$$[a_0, b_0]\supset[a_1, b^1]\supset[a_2, b_2]\supset\cdots\supset\cdots,$$

$|b_i-a_i|\to 0$，$i\to\infty$（因为$b_i-a_i=2^{-i}(b-a)$）.这意味着$\{a_i\}$与$\{b_i\}$同收敛于区间$[a, b]$中的一个实数，将其记作c .

由f的连续性，知$\lim\limits_{i\to\infty}f(a_i)=f(c), \lim\limits_{i\to\infty}f(b_i)=f(c)$. 但因对每个$i$，都有$f(a_i)\leqslant y\leqslant f(b_i)$，所以（根据两边夹法则，这个法则将在7.6节介绍）有

$$f(c)=\lim_{i\to\infty}f(a_i)\leqslant y\leqslant \lim_{i\to\infty}f(b_i)=f(c),$$

即$f(c)=y$，定理证毕 .

对最大值最小值定理，可用类似的办法证明，这将作为一个练习题（问题6.1.5）留给读者.

问题

6.1.3. 函数f在$a\leqslant x\leqslant b$上有界，且对每一对x_1，x_2；$a\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant b$，有

$$f\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(f(x_1)+f(x_2)\right),$$

证明f在$a<x<b$上连续。（提示：证明$f(x+\delta)-f(x)\leqslant\frac{1}{2}(f(x+2\delta)-f(x))\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{2^n}(f(x+2^n\delta)-f(x))$，$a<x+2^n\delta<b$，再令$\delta\to0$）。

6.1.4. 设实值连续函数f对一切实数x，y都满足函数方程

$$f(\sqrt{x^2+y^2})=f(x)\cdot f(y),$$

证明$f(x)=(f(1))^{x^2}$（提示：首先对所有形如$2^{\frac{n}{2}}$的数证明命题，其中n是整数；接着再对所有形如$\frac{m}{2^n}$的数证明命题，其中m是整数，n是非负整数）。

6.1.5. 试用反复对分法证明最大值最小值定理。

6.1.6. 设$f(0)>0$而$f(1)<0$，又存在连续函数g使得$f+g$为非降函数。证明对某x有$f(x)=0$。（提示：利用反复对分法。如果右半区间存在一点x使$f(x)\geqslant0$，就取右半区间，否则就取左半区间，由此可得区间套序列$[a_1, b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots$，它收敛到一点$c$。在每个区间$[a_n, c]$中都存在一点$y_n$使$f(y_n)\geqslant0$，由此再证$f(c)=0$）。

6.1.7. 函数f定义于区间$(0, 1)$上，且

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{如果 } x \text{ 为无理数},\\ \frac{1}{q}, & \text{如果 } x=\frac{p}{q}\text{（既约分数）}.\end{cases}$$

(a) 证明f在$(0, 1)$中的每一个有理点处不连续；

(b) 证明它在$(0, 1)$中的每一个无理点处都连续。

6.1.8. 设x是Cantor集K中的一个元素（参阅问题3.4.6），它具有唯一的表达式

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}2\cdot b_n\cdot3^{-n},$$

其中$b_n=0$或1。定义函数g：$K\to[0,1]$如下：

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cdot 2^{-n}$$

现将$g(x)$延拓到整个区间[0，1]之上：根据问题3.4.6，对每个不属于Cantor集的位于[0，1]的x，都存在唯一的整数n，使$x\in I_n=(X_n, Y_n)$，而X_n与Y_n属于K。此时我们定义$g(x)=g(Y_n)$。（由于对一切n都有$g(X_n)=g(Y_n)$，所以我们只不过是在区间(X_n, Y_n)上将g取作常数）。证明这样延拓出的g是连续的。（可参阅问题6.2.13）。

补充例题

6.3.1，6.3.5，6.3.6，6.4.3，6.7.2，6.7.7，6.8.9，6.8.10，6.9.5。在第六章的大部分例题中，都将连续性作为基本的假定，尤其可参阅6.2节（中间值定理）。

6.2 中间值定理

中间值定理的基本内容是：如果f是闭区间$[a, b]$上的连续函数，d是介于$f(a)$与$f(b)$之间的数，则一定在a与b之间存在一点c，使得$f(c)=d$。这个定理的好处是它作出了某种“存在性”的断言，而并不需要确切确定它们的位置。

例如，我们可以断言$-2x^5+4x=1$在区间(0，1)中一定有解。令$f(x)=-2x^5+4x$，则$f(0)$不足1，$f(1)$大于1，所以根据中间值定理立即可以知道，在(0，1)之间一定有某个数，其处的函数值刚好等于1。

6.2.1．某越野赛跑者用30分钟跑完了6公里的全程。证明他必定在赛程中的某个地段刚好用5分钟跑完了1公里的距离。

证 将自起跑线开始沿着赛跑线路所度量的距离记作 x，则有 $0\leqslant x\leqslant 6$．对每个 $x\in[0, 5]$，将赛跑者自 x 跑至 $x+1$ 所用去的时间记作 $f(x)$，则可以视 $f(x)$ 为连续函数．由题意可知，$f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=30$，所以 $f(0)$，…，$f(5)$ 这 6 个数不可能全都小于5，也不可能全都大于5．这就是说，其中一定存在 a 和 b，使得 $f(a)\leqslant 5\leqslant f(b)$．于是由中间值定理知，在 a 与 b 之间存在一点 c，使得 $f(c)=5$，也就是说，在自 c 至 $c+1$ 的一公里路程中，赛跑者刚好用去了 5 分钟时间．

6.2.2. 设函数 $f: [a, b]\to R$ 连续．(a)（积分中值定理）：试证，在 $[a, b]$ 中存在一点 c，使得 $\int_a^b f(t)dt=f(c)\cdot(b-a)$．(b) 试证在 $[a, b]$ 中存在一点 c，使得 $\int_a^c f(t)dt=\int_c^b f(t)dt$．（注意，(b) 只要求 f 在 $[a, b]$ 上可积就可以了）．

证 (a) 将 f 在 $[a, b]$ 上的最大值和最小值分别记作 M 和 m（根据最大值最小值定理知它们存在），并令 $A=\int_a^b f(t)dt$．本命题的直观意义可由图6.2看出（其中只绘

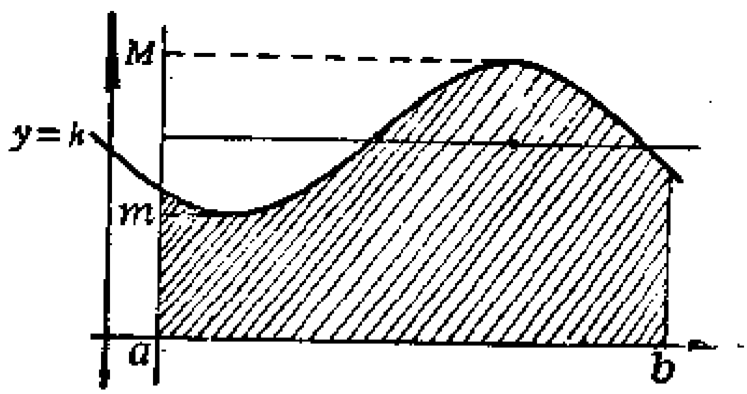


图6.2

出了f为正值函数的情形)。随着直线$y=h$连续地由$y=m$移动到$y=M$，界于$y=h$，$y=0$，$x=a$和$x=b$之间的面积$A(h)$便由一开始的不足A（即$A(m)$)变化到超过A(即$A(M)$)。用代数式写出来，就有$A(m)=m(b-a)\leqslant\int_a^b f(t)dt\leqslant M(b-a)=A(M)$。(当然也可以由图中的“面积”直接看出来)。由于$A(h)\equiv h(b-a)$是$h$的连续函数，所以由中间值定理知存在一点$d$，使得$A(d)=A$，即$d(b-a)=A$。又由于$d$介于$m$与$M$之间，而$f$连续，所以再次根据中间值定理即可知，在$(a, b)$中存在一点$c$，使得$f(c)=d$，从而$\int_a^b f(t)dt=f(c)\cdot(b-a)$。

(b) 本命题的直观意义如图6.3所示（仅绘出了正值函数的情形)。令$A=\int_a^b f(t)dt$，并令$A(h)=\int_a^h f(t)dt$。 则

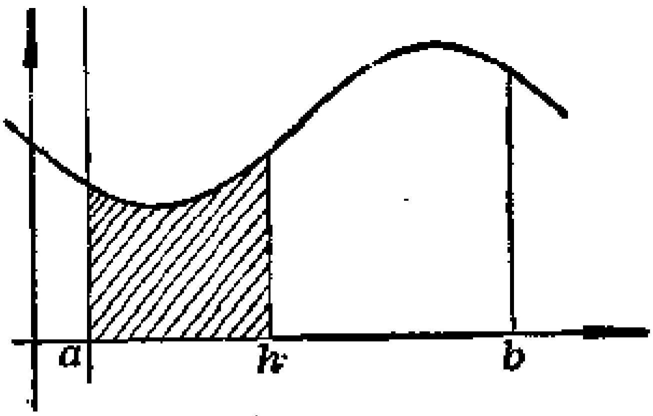


图6.3

由图看出，当$a<h<b$时，$A(h)$表示由$y=f(x)$，$y=0$，$x=a$及$x=h$所界出的面积（图中阴影部分)。现在的问题是，如何找出一点c，使得$A(c)=\frac{1}{2}A$？显然，当铅直线$x=h$由$x=a$右移到$x=b$时，相应的积分值（即面积）由0变化为A，所以必在某点处经过$\frac{1}{2}A$。由此看来，只要再证得$A(h)$是一

个h的连续函数，则上述论证便天衣无缝了。为此，我们注意到

$$A(h+x)-A(h)=\int_h^{h+x} f(t)dt,$$

而由(a)款知，在h与$h+x$之间存在一点c_x使得

$$\int_h^{h+x} f(t)dt=c_x\cdot|x|,$$

所以就有

$$\lim_{x\to 0}(A(h+x)-A(h))=\lim_{x\to 0}c_x|x|=0,$$

（因为f可积故知c_x有界），这就是说当$x\to 0$时，有$A(x+h)\to A(h)$，所以$A(h)$在h处连续．证毕．

6.2.3. 设A是一个平面点集，其中共有$2n$个点，一半涂为红色，一半涂为蓝色，并且任何三个点都不共线。证明或者否定如下命题：可用n条闭线段连接它们，使得每条线段都连接一个红点和一个蓝点，并且每两条线段都不相交。

证 我们曾在1.11.2中考虑过本问题，这里再来介绍一个基于中间值性质的证明，当然是富有启发性的。

对n行归纳法。当$n=1$时命题显然成立。假设当$n=1,2,\cdots,k$时命题都已成立，下面来考虑具有上述性质的由$2(k+1)$个点组成的平面点集A。

假如A的凸包的顶点不尽同色，则其边界上必有二异色的相邻顶点，设为P、Q，连PQ得一闭线段。又由归纳假设，可用k条闭线段按所述要求连结$A-\{P、Q\}$中的点，而由P、Q的性质知，这k条闭线段也都不会与PQ相交，所以此时命题对A成立。

剩下的情况是A的凸包的顶点的颜色全都相同，不妨全为红色。对平面上任何一条非水平直线L，以$B(L)$记其左

侧的蓝点数目，以R(L)记其左侧的红点数目，并令$D(L)=B(L)-R(L)$。现取一条位于A中所有点之左的非水平直线L，则有$D(L)=0$。假定所取的L不与A中任何两点的连线平行，那么当L连续地向右平动时，必将一个一个地越过A中的点。当它越过一个蓝点时，$D(L)$将增加1；当它越过一个红点时，$D(L)$将减少1。由于L首先越过的是一个凸包上的顶点（红点），所以$D(L)$所取的第一个非零值是-1；而L最后越过的也是一个凸包上的顶点（红点），所以$D(L)$所取的最后一个非零值将是$+1$。由此观之，$D(L)$必在首次和末次越过A的点之间的某个时刻取得0值（因$D(L)$是一个整值函数）。而当L处于使$D(L)=0$的位置时，它将A分为两个非空子集，每个子集中的红点、蓝点数目相等，因此可对这两个子集（它们分别位于L的左右两侧）使用归纳假设，而且所得的线段全都互不相交，因此结论对A成立。

由数学归纳法，命题得证。

问题

6.2.4. 设f：$[0,1]\to[0,1]$连续，证明在$[0,1]$中存在一点c，使得$f(c)=c$。

6.2.5. 某登山者星期六早晨7:00开始攀登山峰，当日下午5:00抵达山顶，在山顶宿营一晚后于次日晨7:00开始下山，下午5:00返抵原出发地。证明：该登山者星期日有某个时刻所处的高度恰好与星期六同一时刻所处的高度相等。

6.2.6. 如果某连续函数取任何值都不超过两次，证明它对某些值一定只取一次。

6.2.7. 设三角多项式

$$a_0+a_1\cos x+\cdots+a_n\cos nx$$

的系数皆为实数，且$|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_{n-1}|\leqslant a_n$，证明它在区间$[0, 2\pi]$中至少有$2n$个零点。

6.2.8. 试对常数k给出充分必要条件，使得存在某个实值连续$f(x)$可对一切实数x都成立等式$f(f(x))=kx^9$。

6.2.9. (a)设$f: [a, b]\to R$连续，g: $[a, b]\to R$可积，又对一切$x\in[a, b]$有$g(x)\geqslant 0$。证明在$[a, b]$中存在一点c，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

(b) 设函数f: $[a, b]\to R$递增（因而可积），又g: $[a, b]\to R$可积，且对一切$x\in[a, b]$有$g(x)\geqslant 0$. 证明在$[a, b]$中存在一点c，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(a)\int_a^c g(x)dx+f(b)\int_c^b g(x)dx.$$

6.2.10. 设f: $[0, 1]\to R$ 连续且 $f(0)=f(1)$。证明，对每个正整数n，在区间$[0, 1-\frac{1}{n}]$中都存在一点x，使得

$$f(x)=f(x+\frac{1}{n}).$$

6.2.11. 某物体在时刻t的温度可以用一个不超过3次的多项式$P(x)$来描述。证明该物体上午 9 时至下午 3 时间的平均温度恒可表示为某两个固定时刻的温度平均值，且这两个时刻与多项式的形式无关。并进一步证明与这两个时刻最靠近的分钟是上午10时16分和下午 1 时44分。（提示：利用积分中值定理；参阅6.2.2(a)）。

6.2.12. 证明，对任何两个三角形，都存在一条同时平分它们的直线。

6.2.13. 给出一个由$[0, 1]$到$[0, 1]$的连续实值函数f的例

子，它无限次地取到(0，1)中的每一个值。（提示：有一个办法是修改问题6.1.8所定义的连续函数）。

补充例题

6.1.6，6.5.2，6.5.3，6.5.4，6.5.13，6.6.4，6.6.5，6.6.6，6.6.9，7.6.13。

6.3 导数

函数f：$(a, b)\to R$，对$x\in(a, b)$，当极限

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

存在时，就把它定义为f在x处的导数。应当注意，只要f在x有导数，就一定在x处连续，这是因为

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}(f(x+h)-f(x))\\&=\lim_{h\to 0}\left[\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)\cdot h\right]\\&=\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0}h\right)\\&=f'(x)\cdot(\lim_{h\to 0}h)=0.\end{aligned}$$

6.3.1. 如果函数$xf(x)$在指定点$x_0\neq 0$处有导数，而f在该点处连续，证明f在该点处有导数。

证 令

$$L=\lim_{x\to x_0}\frac{xf(x)-x_0f(x_0)}{x-x_0}$$

则该式右端极限存在，因其即为$xf(x)$在x_0处的导数（在此

我们已用$x-x_0$代替h）。而当x充分靠近x_0但还不是x_0时（因而它们的差不是0），

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}&=\frac{\dfrac{xf(x)}{x}-\dfrac{x_0f(x_0)}{x_0}}{x-x_0}\\
&=\frac{xx_0f(x)-xx_0f(x_0)}{xx_0(x-x_0)}\\
&=\frac{xx_0f(x)-x^2f(x)-xx_0f(x_0)+x^2f(x)}{xx_0(x-x_0)}\\
&=\frac{xf(x)(x_0-x)+x(xf(x)-x_0f(x_0))}{xx_0(x-x_0)}\\
&=\frac{1}{x_0}\left(\frac{xf(x)-x_0f(x_0)}{x-x_0}\right)-\frac{f(x)}{x_0}.
\end{aligned}$$

因此知有

$$\begin{aligned}
f'(x_0)&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\
&=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{x_0}\left(\frac{xf(x)-x_0f(x_0)}{x-x_0}\right)-\frac{f(x)}{x_0}\right]\\
&=\frac{1}{x_0}\lim_{x\to x_0}\left(\frac{xf(x)-x_0f(x_0)}{x-x_0}\right)-\frac{1}{x_0}\lim_{x\to x_0}f(x)\\
&=\frac{1}{x_0}\left(L-f(x_0)\right).
\end{aligned}$$

其中$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$是由于$f(x)$在$x_0$处连续。但$f(x)$的这一连续性条件并不是必要的，事实上

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}&=\frac{xx_0f(x)-xx_0f(x_0)}{xx_0(x-x_0)}\\
&=\frac{-xx_0f(x_0)+x_0^2f(x_0)+xx_0f(x)-x_0^2f(x_0)}{xx_0(x-x_0)}
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{x}\left(\frac{xf(x)-x_0f(x_0)}{x-x_0}\right)-\frac{f(x_0)}{x},$$

由此我们也可以得到（无需f在x_0处的连续性）：

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{x}\left(\frac{xf(x)-x_0f(x_0)}{x-x_0}\right)-\frac{f(x_0)}{x}\right]$$

$$=\frac{1}{x_0}(L-f(x_0)).$$

6.3.2. 设$f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$，其中$a_1,a_2,\cdots,a_n$是实数，$n$为正整数。如果对一切实数$x$有$|f(x)|\leqslant|\sin x|$，证明$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant 1$。

证 在问题2.4.4中，我们曾就本命题给出过一个归纳证明；但在注意到了$f'(x)=a_1\cos x+\cdots+na_n\cos nx$之后，我们可以给出一个更为自然的证明。由该式知$f'(0)=a_1+2a_2+\cdots+na_n$（这就是所要证明的不等式的左端），这就启发了我们采用如下的推理：

$$|f'(0)|=\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|=\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|$$

$$\leqslant\lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right|=1,$$

这就是所要证明的不等式。

6.3.3. 设f在$x=a$可导，$f(a)\neq 0$，试求

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n$$

解 要求原极限，也就是要求

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(a+x)}{f(a)}\right]^{\frac{1}{x}}$$

由于当x充分小时，$f(a+x)$与$f(a)$符号相同，所以

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(a+x)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{x}}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\ln\left(\frac{|f(a+x)|}{|f(a)|}\right)^{\frac{1}{x}}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln|f(a+x)|-\ln|f(a)|}{x},$$

上述最后一式即为$\ln|f(x)|$在$x=a$处的导数定义，从微积分中我们知道它就是$f'(a)/f(a)$，所以

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(a+x)}{f(a)}\right]^{\frac{1}{x}}=\exp\{f'(a)/f(a)\}$$

问题

6.3.4. (a) 如果将通常意义下的导数记作$Df(x)$，下面再定义一种新的导数$D^*f(x)$：

$$D^*f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f^2(x+h)-f^2(x)}{h}$$

试用$Df(x)$表示$D^*f(x)$。

(b)如果f在x可导，计算

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+ah)-f(x+bh)}{h}\right).$$

(c) 假设f在$x=0$处可导，又对一切x与y满足函数方程$f(x+y)=f(x)+f(y)$，证明f在每个实数x处都可导。

6.3.5. 函数f的定义是

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & \text{如果 } x\neq 0,\\ 0\quad, & \text{如果 } x=0.\end{cases}$$

(a) 证明在一切x处都有$f'(x)$存在，但$f'(x)$在$x=0$处不连续。(当$x\neq0$时，f的导数是$2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$，在0处的导数是什么呢？)

(b) 设$g(x)=x+2f(x)$。证明：$g'(0)>0$，而f在任何包含0点的任何开区间中都不单调。

6.3.6. 设函数f：$[0, 1)\to R$可导，又对$[0, 1)$中任何点x都没有$f(x)=0=f'(x)$。证明f在$[0, 1)$中只有有限个零点。(假如有无限个零点，则$[0, \frac{1}{2}]$或$[\frac{1}{2}, 1)$中有无限个零点(或许两者中都有无限个零点)，将其中一个有无限个零点的区间再行对分。照此下去，可得一个由不同零点构成的收敛序列，并因此而得出一个矛盾)。

6.3.7. 设f在(a, b)可导，在(a, b)中某点c处取得极值(即极大值或极小值)，证明$f'(c)=0$。(有关本命题的应用，可参阅6.4.1，6.4.2，6.4.5，6.4.6，6.4.7，6.6.4，7.4.1)。

补充例题

6.6.2，6.7.2，6.9.1，7.6.2 。

6.4 最大值最小值定理

数学中的存在性定理是用来断言某些事物是否存在的定理(例如，函数的定义域内是否存在具有某种特定性质的点)，而诸如此类的特殊对象往往位于某些“特殊”位置之上，为寻找它们，往往需要启用最大值最小值定理，即对闭区间$[a, b]$上的连续函数f，一定存在$[a, b]$中的点c和d，可以

使得对$[a, b]$中的一切x都有$f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d)$.

6.4.1. 设函数$f: [a,b] \to R$可导。证明对f'中间值定理成立（即对介于$f'(a)$与$f'(b)$之间的任何数d，在区间(a, b)中都存在一点c使$f'(c)=d$）。

证 如果f'连续，则可以直接根据已证的连续函数性质知结论成立。但可惜的是f'可能不连续（例如，参阅问题6.3.5(a)），此时该怎么办呢？

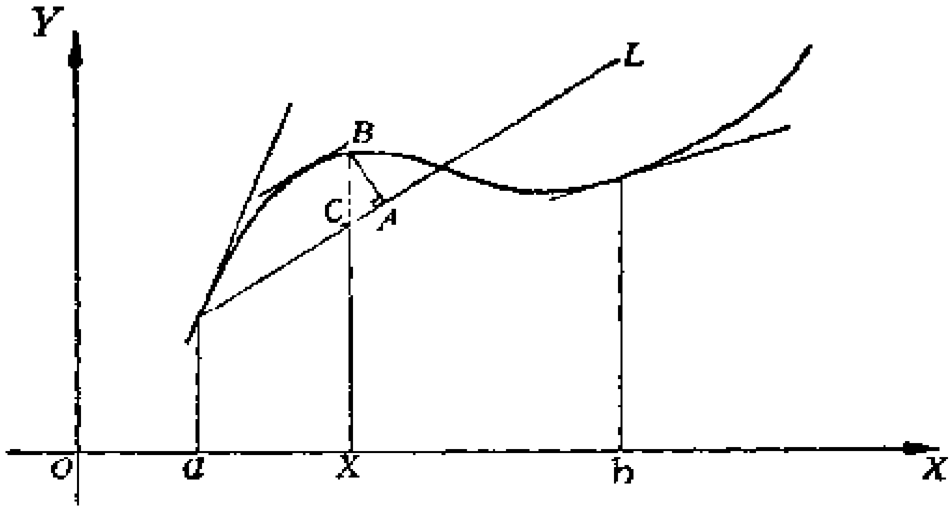


图6.4

为了启发思路，我们来观察图6.4。图中斜率为d的直线L经过点$(a, f(a))$，其中$f'(b)<d<f'(a)$。对$[a, b]$中的每个点x，我们以$g(x)$记点$(x, f(x))$到L的有号距离（诸如图中AB的长度），直观地说，我们要找的就是使g达到最大值的点x。我们将会证明确如所言，但为了简化计算，我们还是转而观察另一个稍有区别的函数$h(x)$。

对于$[a, b]$中的每个x，$h(x)$表示由点$(x, f(x))$到L间的铅直线段的有号长度（诸如图6.4中BC之长），则不难发现使得h取得其在$[a, b]$上最大值的点x也恰使g取得其在

$[a, b]$上的最大值（这是因为$g(x)=h(x)\cos\alpha$，其中α是L的倾角）。但考虑$h(x)$的好处是可以较方便地用$f(x)$和L的方程式来表示它。

现在言归正题，我们有

$$h(x)=f(x)-[f(a)+d(x-a)],$$

因此有

$$h'(x)=f'(x)-d.$$

由于$f'(b)<d<f'(a)$，所以$h'(b)<0<h'(a)$。这表明无论$h(a)$，还是$h(b)$都不是h在$[a, b]$上的最大值（这是导数定义的推论），但h在$[a, b]$上连续，由最大值最小值定理知它一定在(a, b)中的某个点c处取得最大值。根据问题6.3.7，在该处导数为0，即$f'(c)=d$。

如果$f'(a)<d<f'(b)$，当然可以类似证明。不过h在(a, b)中某点c取得最小值，仍有$f'(c)=d$。

6.4.2. 一个角的两条边分别是射线OA与OB，而P是角内一点。试在OA上定出一点X，在OB上定出一点Y，使线段XY经过P点并使乘积$(PX)(PY)$最小。

解 图形如图6.5。

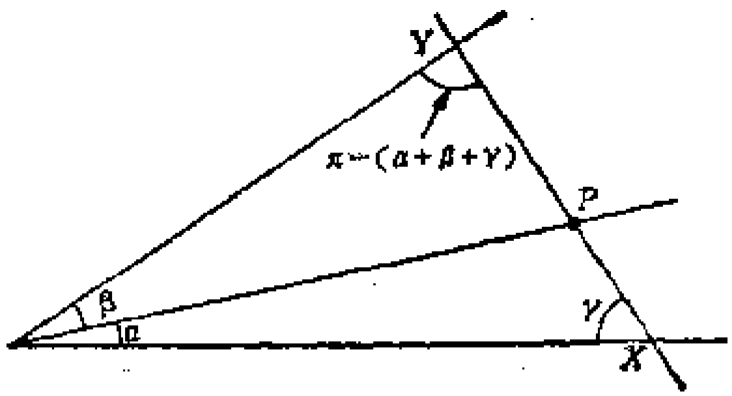


图6.5

这是一个初等微积分中出现的典型"最大—最小"问题：它并不在意"是否存在最小值？"而是关注"何处可达最小值？"解决这类问题的途径是利用问题6.3.7的结论：只要最小值是在开区间的内部达到，它一定出现在导数为零的点上。所以我们应设法将乘积$(PX)(PY)$表示成某个单变量的函数，并找出它在何处导数为零。

对于每个正数x，在OA上都唯一地存在点X使得$x=|OX|$，这个点又在OB上唯一地决定出点Y，使得X、P及Y共线，所以$(PX)(PY)$是x的函数。由于这个函数的显式表达相当复杂，所以应另想它法。

我们注意到$(PX)(PY)$可以由角γ所唯一决定（参阅图6.5），为了推出其以γ为变量的显式表达，先分别对$\triangle OXP$与$\triangle OPY$应用正弦定理：

$$\frac{\sin\alpha}{PX}=\frac{\sin\gamma}{OP},\qquad \frac{\sin\beta}{PY}=\frac{\sin(\pi-\alpha-\beta-\gamma)}{OP},$$

由此得到所需要的表达式：

$$\begin{aligned}F(\gamma)=(PX)(PY)&=\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right)\cdot(OP)\\&\quad\cdot\left(\frac{\sin\beta}{\sin(\pi-\alpha-\beta-\gamma)}\right)\cdot(OP)\\&=C\cdot(\csc\gamma)\cdot(\csc(\pi-\alpha-\beta-\gamma)),\ 0<\gamma<\pi,\end{aligned}$$

其中$C=\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot(OP)^2$为常数。

函数F在$(0,\ \pi)$上连续且可导，又当$\gamma\to0^+$或$\gamma\to\pi^-$时，$F(\gamma)\to\infty$，所以F只能在$(0,\ \pi)$内的某点处取得最小值。在该点有$F'(\gamma)=0$，即

$0=(\csc\gamma)\cdot(\csc(\pi-\alpha-\beta-\gamma))\cdot[\operatorname{ctg}\gamma-\operatorname{ctg}(\pi-\alpha-\beta-\gamma)]$。既然在$(0,\pi)$中$\csc\gamma$与$\csc(\pi-\alpha-\beta-\gamma)$都不会等于

零，所以最小值只能在$\mathrm{ctg}\gamma=\mathrm{ctg}(\pi-\alpha-\beta-\gamma)$时达到。但这在$0<\gamma<\pi$及$0<\pi-\alpha-\beta-\gamma<\pi$中，仅当$\gamma=\pi-\alpha-\beta-\gamma$时才可实现，此时自有$OX=OY$.所以$(PX)\cdot(PY)$的最小值仅当$\triangle OXY$为等腰三角形时达到。(本题的另一解答见问题8.1.3)。

问题

6.4.3. (a) 设f：$(a, b)\to R$连续，且对(a, b)中一切x都有$f(x)>0$.证明存在某正数c，使得对(a, b)中的一切x都有$f(x)\geqslant c$

(b) 证明，不可能存在将闭区间$[0, 1]$映射成开区间$(0, 1)$的连续函数f。

6.4.4. 设f:$[a, b]\to R$在$[a, b]$中每一点处可导，且$f'(a)=f'(b)$。证明在(a, b)中至少存在一点c，使得

$$f'(c)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}.$$

6.4.5. (a) Rolle定理：设f：$[a,b]\to R$在$[a,b]$上连续，在(a, b)中可导，如果$f(a)=f(b)$，则在(a, b)中存在一点c，使得$f'(c)=0$。

(b) 微分中值定理：如果f：$[a, b]\to R$在$[a, b]$上连续，在(a, b)中可导，则在(a, b)中存在一点c，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

6.4.6. 设A，B，C为某三角形的三内角，证明

$$-2\leqslant\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{3},$$

并指出等号何时成立。

6.4.7. 设有一个半径r的定圆，P是圆周上一点，L是过P点

的圆的切线。由圆周上的动点R向L引垂线RQ交L于Q。试求三角形PQR面积的最大值。

补充例题

1.11.5，6.6.1，6.6.4，6.6.5.

6.5 洛尔定理

如下的存在性定理（即Rolle定理）是可导函数的基本性质之一，它的内容是：

Rolle定理设f：$[a,b]\to R$在$[a,b]$上连续，在(a, b)中可导。如果$f(a)=f(b)$，则在(a, b)中存在一点c，使得$f'(c)=0$。

这个命题是问题6.3.7的直接推论：只需设点c在(a, b)内且$f(c)$是函数的一个最值（由最大值最小值定理知其存在），则由6.3.7立知$f'(c)=0$。Rollb定理不仅从理论角度看来十分重要（我们将要在下面证明，微分中值定理以及另一个有着许多有用推论的定理，都能方便地从Rolle定理推出来），而且它也是一种重要的解题方法。

6.5.1. 证明方程$4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$在0与1之间至少有一个根。

证 由于对a，b，c的性质所知甚少，所以任何运用中间值定理的尝试（如同6.2节解决类似问题时所做的那样）都会遇到麻烦，但可转而考虑函数　$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2-(a+b+c)x$。由于$f(0)=0=f(1)$，所以由Rolle定理知，在（0，1）中存在一点$d$，使得$f'(d)=0$，这个$d$即为原方程$4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$的根。

6.5.2. 证明，如果可导函数f与g对一切x都有$f'(x)g(x)\neq g'(x)f(x)$，那么在$f(x)=0$的每两个根之间都至少有$g(x)=0$的一个根.

证　设a与b是f的两个根，$a<b$，则由题目条件知它们都不是$g(x)=0$的根. 如果g在a与b之间没有根，那么作为中间值定理的自然推论，g在$[a, b]$上保持符号不变（即对$[a, b]$中的每一个x，或者都有$g(x)>0$，或者都有$g(x)<0$）。

此时我们考虑函数$F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$。该函数在$[a,b]$上连续且可导，又$F(a)=0=F(b)$，所以由Rolle定理知，存在(a, b)中一点c，使得$F'(c)=0$。但因

$F'(c)=\frac{g(c)f'(c)-g'(c)f(c)}{g^2(c)}$，所以就有$g(c)f'(c)=g'(c)f(c)$，这是一个矛盾。这表明$g(x)=0$在$a$与$b$之间有根。

Rolle定理还有一个甚为有用的推论：如果函数f在$[a, b]$上连续且可导，而x_1与x_2是f的零点，$a<x_1<x_2<b$，则f'在x_1与x_2之间有一个零点。一般地，如果f在$[a, b]$中有n个不同零点，则f'至少有$n-1$个零点（它们与f的零点相互交错排列），f''至少有$n-2$个零点（如果f'在$[a, b]$上连续且可微），等等.

6.5.3. 证明，等式$x^2=x\sin x+\cos x$恰可对两个实数x成立.

证　考虑$f(x)=x^2-x\sin x-\cos x$，则有$f(-\frac{\pi}{2})>0$，$f(0)<0$及$f(\frac{\pi}{2})>0$，故由中间值定理知f至少有两个

零点。但如果f有三个或更多的零点，则由刚才的注释知，f'至少有两个零点，但

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - \sin x - x\cos x + \sin x \\ &= x(2 - \cos x), \end{aligned}$$

它仅有一个零点。所以f恰好有两个零点。

6.5.4. 设$P(x)$是某个实系数多项式，再构造一个多项式如下：

$$Q(x) = (x^2+1)P(x)P'(x) + x[(P(x))^2 + (P'(x))^2].$$

假定方程$P(x)=0$有n个大于1的不同实根，试判断方程$Q(x)=0$是否具有至少$2n-1$个不同实根。

解 设a_1，a_2，…，a_n是$P(x)=0$的n个不同的实根，其中$1<a_1<a_2<\cdots<a_n$，再将$Q(x)$写成形式

$$Q(x) = (x-1)^2 P(x)P'(x) + x[P(x)+P'(x)]^2.$$

假设$P(x)$在区间(a_i, a_{i+1})，$i=1, 2, \cdots, n-1$，中都没有零点（这种假设并不丧失一般性，因为如果$P(x)$有更多的零点，例如有m个，$m>n$，则可重新对a_i编号，把这m个都包括进去，于是以下的证明将表明Q至少有$2m-1$个不同零点）。由Rolle定理知，在(a_i, a_{i+1})中存在一点b_i使得$P'(b_i)=0$。由于P是多项式，所以$P'(x)=0$在(a_i, a_{i+1})中只能有有限个根，故可对每个i，都假定b_i是P'在(a_i, a_{i+1})中的最大零点。

假设$P(x)$在(a_i, a_{i+1})中恒正，下面来考虑函数

$$F(x) = P(x) + P'(x)$$

我们希望能从(b_i, a_{i+1})中找到一点c_i，使得$F(c_i)<0$。由此再注意$F(b_i)>0$，便可由中间值定理知，在(b_i, c_i)

中存在一点d_i，使得$F(d_i)=0$.随之有

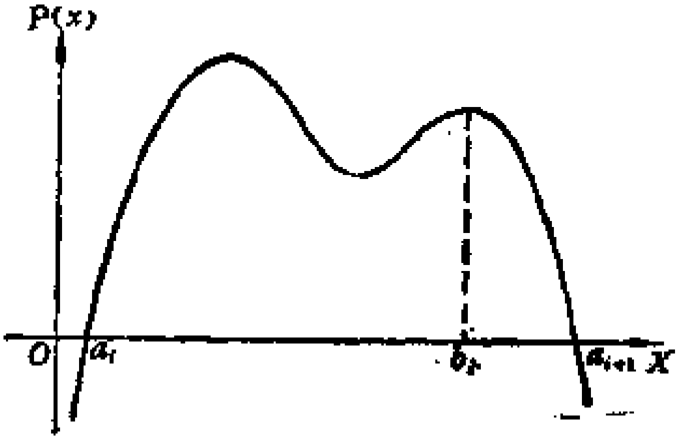


图　6.6

$$Q(b_i)=b_i(F(b_i))^2>0,$$

$$Q(d_i)=(d_i-1)^2P(d_i)P'(d_i)<0,$$

（注意对(b_i, a_{i+1})中一切x都有$P'(x)<0$），及

$$Q(a_{i+1})=a_{i+1}(F(a_{i+1}))^2\geqslant 0 .$$

从而就可由中间值定理获知，在(b_i, d_i)存在一点x_i，在$(d_i, a_{i+1}]$中存在一点y_i，使得$Q(x_i)=0=Q(y_i)$.

为了使上述论证生效，我们必须证明在(b_i, a_{i+1})中确实存在一点c_i，使得$F(c_i)<0$.

假如a_{i+1}是$P(x)$ 0的一重根，则有$F(a_{i+1})=P'(a_{i+1})<0$，从而可自a_{i+1}的充分小的邻域内取得所需的c_i；假如a_{i+1}是$P(x)=0$的多重根，则有

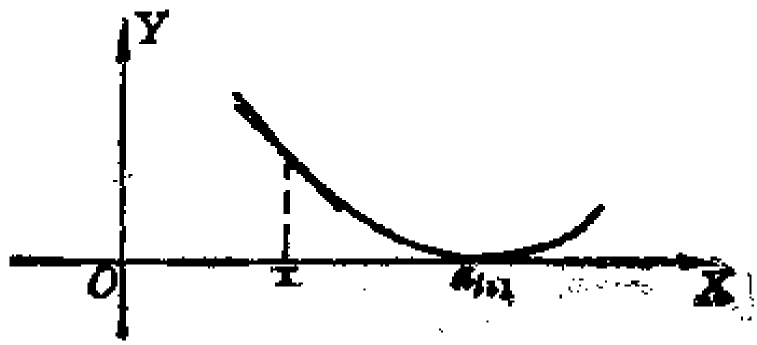


图　6.7

$P(a_{i+1})=0=P'(a_{i+1})$，而对充分小的$\delta>0$，在区间$(a_{i+1}-\delta, a_{i+1})$中却有$P''(x)>0$

（参看图6.7），那末对这样的x，就有

$$P'(x)<\frac{P(x)-P(a_{i+1})}{x-a_{i+1}}=\frac{P(x)}{x-a_{i+1}},$$

因而有

$$F(x)=P(x)+P'(x)<P(x)\left[1+\frac{1}{x-a_{i+1}}\right]$$

$$=P(x)\left[\frac{x-a_{i+1}+1}{x-a_{i+1}}\right],$$

从而可将c_i取为充分靠近a_{i+1}的x，以使得上式括号内的分子为正，并有分母为负.总之，对这样的Ci，有$F(c_i)<0$，$b_i<c_i<a_{i+1}$.至此，我们证得$Q(x)=0$在（b_i，a_{i+1}］中有两个根 .

上面的论证，是对$P(x)$在(a_i, a_{i+1})中保持恒正的情形进行的。当对(a_i, a_{i+1})中一切x都有$P(x)<0$时，也可通过类似的推导获得同样的结论.这样,我们已经证得Q至少有$2n-2$个零点（在每个区间（a_i，a_{i+1}）中都有两个，$i=1, 2, \cdots, n-1$）。如果我们能再证得在（$-\infty$，a_1）中，Q还有一个零点，则全部论证即告完成。下面仍须考虑好几种情况。

假如$P'(x)=0$在$(0, a_1)$中有一个根，无须再谈细节.通过与上完全类似的推导即可知道，Q在(b_0, a_1)中有一个零点，其中b_0是P'在（0，a_1）中的最大零点.

剩下的就只有$P'(x)=0$在（0，a_1）中无根的情况了.假如对（0，a_1）中一切x都有$P(x)>0$，则必都有$P'(x)<0$，而且$Q(0)<0$，$Q(a_1)>0$. 于是由中值定理知，$Q(x)=0$在$(0, a_1)$中有一个根. 类似地，假如对（0，a_1）中一切x都有$P(x)<0$，则有$Q(0)>0$及$Q(a_1)<0$，等。故在所有情况

下，$Q(x)=0$都至少有$2n-1$个不同的根．

尽管如上的分析冗长复杂，但完全建立在最基本的原理：Rolle定理和中间值定理的基础之上．凭借这两个原理，证明的构思显得自然而易于理解．本题还有另外一种证法，它易于陈述，但却需经过一个巧妙的关键步骤(可参看问题6.5.11和6.9.4)，因它富有启发性，特介绍如下．

首先，可将Q写成如下的乘积形式

$$\begin{aligned}Q(x)&=(x^2+1)P(x)P'(x)+x[(P(x))^2+(P'(x))^2]\\&=[P'(x)+xP(x)][xP'(x)+P(x)],\end{aligned}$$

再记$F(x)=P'(x)+xP(x)$，$G(x)=xP'(x)+P(x)$．

下面关键是注意到了$F(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}(e^{\frac{x^2}{2}}P(x))'$而$G(x)=(xP(x))'$的事实．

假如$P(x)$有m个大于1的不同实零点a_i，且$1<a_1<a_2<\cdots<a_m$ $(m\geqslant n)$，则$a_1, a_2,\cdots,a_m$同样也都是$e^{\frac{x^2}{2}}P(x)$的零点．于是由Rolle定理知，$(e^{\frac{x^2}{2}}P(x))'$以及$F(x)$至少有$m-1$个零点b_i，且$a_i<b_i<a_{i+1}$．类似地，由Rolle定理知，$G(x)$至少有m个零点：$c_0,c_1,\cdots,c_{m-1}$，$0<c_0<a_1$，$a_i<c_i<a_{i+1}$，$i=1, 2, \cdots, m-1$．因此，为了完成命题的证明，只须再证对每个$i=1,\cdots,m-1$都有$b_i\neq c_i$就行了．用反证法．

假设对某个i，有$b_i=c_i=r$．于是$F(r)=0$．从而知$P'(r)=-rP(r)$．将此式代入$G(r)=0$，得到$r(-rP(r))+P(r)=0$，即$(r^2-1)P(r)=0$．由于$r>1$，故知$P(r)=0$．但是$a_i<r<a_{i+1}$，这与我们关于a_i与a_{i+1}是$P(x)=0$相邻根的假设相矛盾．所以每个b_i与c_i都不相同，因而$Q(x)$

$=0$至少有$2m-1$（$\geqslant 2n-1$）个不同实根。

问题

6.5.5.（a）证明$5x^4-4x+1$在0与1之间有一个零点。

（b）如果实数a_0，a_1，…，a_n满足等式

$$\frac{a_0}{1}+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0,$$

证明方程$a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$至少有一个实根。

6.5.6.（a）假设f：$[0,1]\to R$可导，$f(0)=0$，且对$(0,1)$中每个x都有$f(x)>0$。证明在（0，1）中存在一点c，使得

$$\frac{2f'(c)}{f(c)}=\frac{f'(1-c)}{f(1-c)}$$

（提示：考虑$f^2(x)f(1-x)$）

（b）在$(0,1)$中是否存在一点d，使得

$$\frac{3f'(d)}{f(d)}=\frac{f'(1-d)}{f(1-d)}?$$

6.5.7.（a）Cauchy中值定理：如果f与g在$[a,b]$上连续，在(a,b)中可导，则在(a,b)中存在一点c，使得

$$(f(b)-f(a))g'(c)=(g(b)-g(a))f'(c).$$

（b）证明微分中值定理（问题6.4.5(b)）是(a)的特殊情形。

6.5.8.（a）证明，不论b为何值，x^3-3x+b在$[-1,1]$中不可能多于一个零点。

（b）设$f(x)=(x^2-1)e^{cx}$，证明在区间$(-1,1)$中恰有一点x使得$f'(x)=0$，且x与参数c有相同的符号。

6.5.9.函数$f(x)=2^x-1-x^2$有多少实零点？

6.5.10. 设$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$为实系数多项式，且有$n+1$个不同实根。试用Rolle定理证明对一切$0\leqslant k\leqslant n$有$a_k=0$。

6.5.11. 如果函数f：$R\to R$可导，证明在$f(x)=0$的任何两个根之间都有$f'(x)-af(x)=0$的一个根。

6.5.12. 设n为非负整数，且

$$f(x)=c_0e^{r_0x}+c_1e^{r_1x}+\cdots+c_ne^{r_nx},$$

其中c_i与r_i是实数。证明，如果f在R中的零点多于n个，必有$f(x)\equiv 0$。（提示：对n归纳）。

6.5.13. n阶Legendre多项式的定义是

$$P_n(x)=\frac{1}{2^nn!}D^n[(x^2-1)^n],$$

其中D^n表示关于x的n阶导数。证明$P_n(x)$刚好有n个不同实根，且都分布在区间（-1，1）中。（提示：因$(x^2-1)^n=(x-1)^n(x+1)^n$，可运用归纳推理证明，$(x-1)^n(x+1)^n$的k阶导数以1为$n-k$重零点，也以-1为$n-k$重零点，并且在-1与1之间至少有k个不同的零点）。

6.6 微分中值定理

设f：$[a, b]\to R$在$[a, b]$上连续，在(a, b)中可导。用类似于问题6.4.1解答中的方法，考虑函数

$$F(x)=f(x)-L(x)$$

（参看图6.8）其中$y=L(x)$是一条经过点（a，$f(a)$）和点（b，$f(b)$）的直线。从几何意义上说，$F(x)$表示了铅直

直线上由点（x，$f(x)$）到直线$y=L(x)$间的有限长度。由于$F(a)=0=F(b)$，所以由Rolle定理知，在（a，b）中存在一点c，使得$F'(c)=0$，也就是有$f'(c)-L'(c)=0$，或等价地有

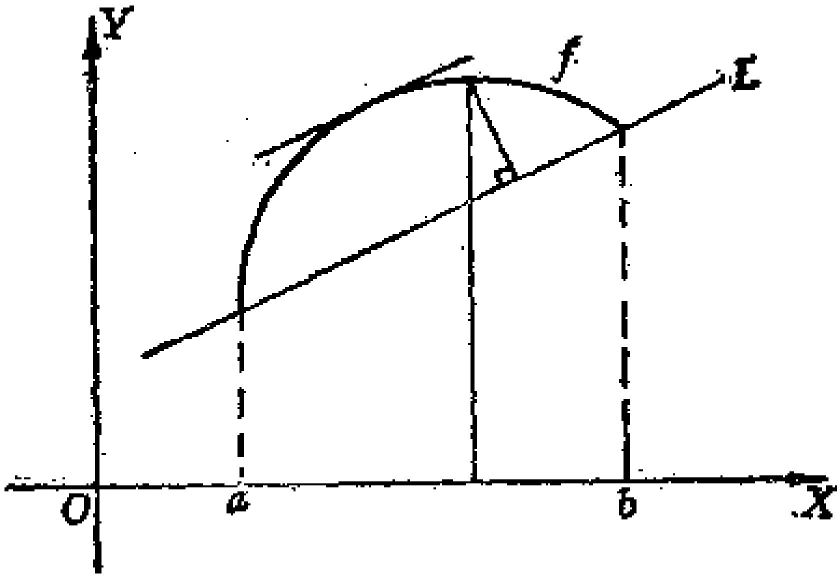


图 6.8

$$f'(c)=L'(c)=（L的斜率）=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

于是我们证得了：

微分中值定理　如果f：$[a, b]\to R$在$[a, b]$上连续，在（a，b）中可导，则（a，b）中存在一点c，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

在$f(a)=f(b)$的场合，本命题刚好是Rolle定理。在其它场合，它说明在a与b之间存在一点，其处所对应的曲线斜率刚好等于经过点（a，$f(a)$）与（b，$f(b)$）的直线斜率。

6.6.1. 设函数$g(x)$的一阶导函数$g'(x)$在一切x处连续，且

满足下列条件：

(i) $g(0)=0$，

(ii) $|g'(x)|\leqslant|g(x)|$对一切x成立．

证明，$g(x)$恒等于0．

证 我们采用一种不太常见的解法，目的是想说明微分中值定理的应用．首先考虑区间[0，1]．设x为(0，1]中任意一点，由微分中值定理知，在(0，x)中存在一点c_1，使得

$$g'(c_1)=\frac{g(x)-g(0)}{x-0},$$

由此得$|g(x)|=|xg'(c_1)|=|x|\cdot|g'(c_1)|\leqslant|x|\cdot|g(c_1)|$。

类似地，在(0，c_1)中存在一点c_2，使得$|g(c_1)|\leqslant|c_1|\cdot|g(c_2)|$，再结合前一不等式，即有$|g(x)|\leqslant|x|\cdot|c_1|\cdot|g(c_2)|$．

继续照此下去，即可找到点列c_1，c_2，…，c_n，$0<c_n<\cdots<c_2<c_1<x\leqslant1$，使得$|g(x)|\leqslant|x||c_1|\cdots|c_n||g(c_n)|$．由于$g$在[0，1]上连续，所以知其有界（介于它的两个最值之间，而两个最值的存在，可由最大值最小值定理保证），因而只要把n取得充分地大，就可使得上面最后一个不等式的右端任意地小（$|c_i|$中的每一个都比1小），所以知有$g(x)=0$．故$g(x)$在[0，1]上恒等于零．

再将同样的推理应用于区间[1,2]（即对(1,2)中的x,在$(1,x)$中存在一点c_1,使得$|g(x)|\leqslant|x-1|\cdot|g(c_1)|$,等等），即可获知$g(x)$在[1，2]上也恒等于零．

再由归纳推理，可知对任何整数n，g在[n，$n+1$]上

都等于零。所以，g恒等于零 。（注意，我们并未用到g'连续的假设）。

微分中值定理在实际中有许多很有用的重要推论：

设f与g在$[a, b]$上连续，在(a, b)中可导。于是

(i) 如果对(a, b)中所有x有$f'(x)=0$，则f是常数。

(ii) 如果对(a, b)中所有x有$f'(x)=g'(x)$，则存在一个常数c，使得$f(x)=g(x)+c$ 。

(iii) 如果对(a, b)中所有x有$f'(x)>0$，则f是递增函数；相应地，如果对(a,b)中所有x有$f'(x)<0$ ($f'(x)\geqslant 0$, $f'(x)\leqslant 0$)，则f在(a,b)中是递减函数（非减函数，非增函数）。（作为应用，可参阅7.4节）。

(i) 的证明　令$x\in(a, b)$。由微分中值定理知，在(a, x)中存在一点c，使得$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)=0$ 。

由此可知，对(a, b)中一切x，都有$f(x)=f(a)$ 。

(ii) 的证明　将(i)运用于函数$h(x)=f(x)-g(x)$ 。

(iii) 的证明　考虑$x, y\in(a, b)$，$x<y$由微分中值定理，在(x, y)中存在一点c使

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(c)>0,$$

由此即知$f(y)>f(x)$，所以f是递增函数 。

6.6.2. 设f：$R\to R$对R中一切x与y都有$|f(y)-f(x)|\leqslant(x-y)^2$，试证$f$为常数 。

证　由上面的推论(i)知，只须证明对一切x都有$f'(x)=0$ 。为此，我们推理如下：

$$|f'(x)|=\left|\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|=\lim_{y\to x}\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|$$

$$=\lim_{y\to x}\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|}\leqslant\lim_{y\to x}\frac{(y-x)^2}{|y-x|}$$

$$=\lim_{y\to x}|y-x|=0.$$

6.6.3. 设f：$R\to R$二次可导，并对一切x有$f''(x)\geqslant 0$.证明，对一切a与b，$a<b$，都有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}[f(a)+f(b)].$$

证 图6.9表明所要证明的结论是可信的。但$f''(x)\geqslant 0$是一种局部性质（因f''在x处的值仅取决于x附近的f的值），正是微分中值定理可使我们把它转化为一种全局的性质（使结论对一切a和b成立，而不必顾及两者的远近）.

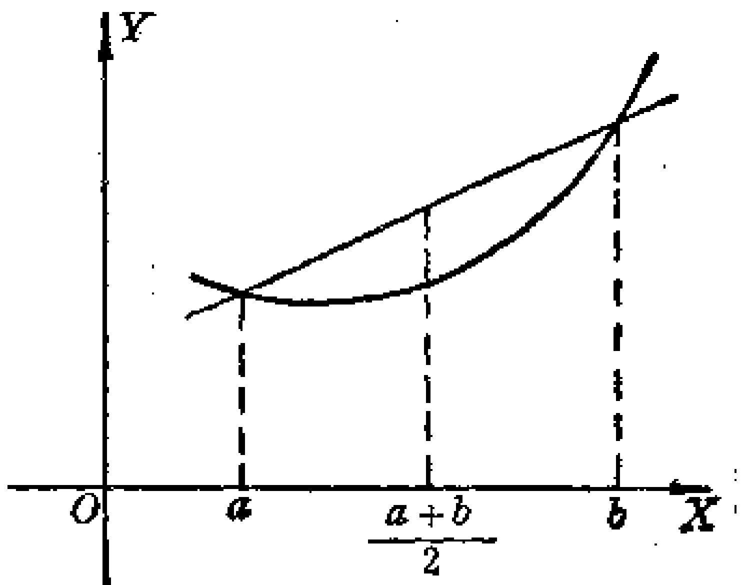


图 6.9

根据微分中值定理，知在$(a,\frac{1}{2}(a+b))$中存在一点x_1，使得

$$\frac{f\left(\frac{1}{2}(a+b)\right)-f(a)}{\frac{1}{2}(a+b)-a}=f'(x_1),$$

又在$\left(\frac{1}{2}(a+b),\ b\right)$中存在一点$x_2$，使得

$$\frac{f(b)-f\left(\frac{1}{2}(a+b)\right)}{b-\frac{1}{2}(a+b)}=f'(x_2).$$

但因对$(x_1,\ x_2)$中一切x，都有$f''(x)\geqslant 0$，所以f'是一个非降函数，因而$f'(x_2)\geqslant f'(x_1)$，亦即

$$\frac{f(b)-f\left(\frac{1}{2}(a+b)\right)}{b-a}\geqslant\frac{f\left(\frac{1}{2}(a+b)\right)-f(a)}{b-a},$$

也就是：

$$f\left(\frac{1}{2}(a+b)\right)\leqslant\frac{1}{2}\left[f(a)+f(b)\right].$$

在本节的余下部分里，我们介绍一些需要综合运用本章介绍的各主要存在性定理的例题，这些定理包括：中间值定理、最大值最小值定理、Rolle定理以及微分中值定理等.

6.6.4. 设f可导且f'在$[a,\ b]$上连续，证明：如果在$[a,\ b]$中存在一点c，使得$f'(c)=0$，则必在$(a,\ b)$中存在点ξ，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$$

证　我们先从几何直观上来认识一下本命题，考虑图6.10，其中B选得使CB为水平线段. 对于a与b之间的点x，C点即为$(x,\ f(x))$，因而方程式的右端，即

$$\frac{f(x)-f(a)}{b-a}$$

表示了直线AB的斜率，而其左端，即$f'(x)$是曲线在C点的切线的斜率.

我们再来考察函数

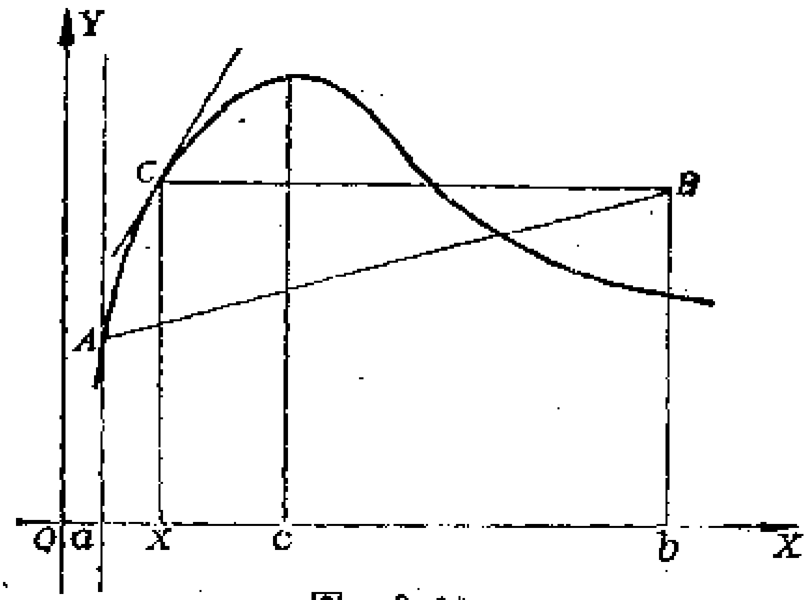


图 6.10

$$F(x)=f'(x)-\frac{f(x)-f(a)}{b-a}.$$

它是 x 的连续函数（此处用到了 f' 连续的事实），于是由中间值定理知，如果可在（a, b）中找到点 x_1 与 x_2，使得 $F(x_1)>0$ 及 $F(x_2)<0$，则必在（a, b）中存在点 ξ，使得 $F(\xi)=0$。

我们看到，（在图6.10所示的情形下）$F(x)$ 在 $x=a$ 处取正值变化到在 $x=c$ 处取负值．但这种情形，或与此相类似的某种其它情形，是否总会出现呢？

假如 $f(c)>f(a)$，则有 $f'(c)=0$ 及 $\frac{f(c)-f(a)}{b-a}>0$，于是

$$F(c)=f'(c)-\frac{f(c)-f(a)}{b-a}<0.$$

由微分中值定理知，在（a, c）中存在一点 d，使得 $f'(d)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}$，因而

$$F(d)=f'(d)-\frac{f(d)-f(a)}{b-a}$$

$$=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}-\frac{f(d)-f(a)}{b-a}$$

$$>\frac{f(c)-f(a)}{b-a}-\frac{f(d)-f(a)}{b-a}$$

$$=\frac{f(c)-f(d)}{b-a},$$

如果能知$f(c)>f(d)$,则全部证明即告完成，遗憾的是，正如图6.11所示，该设想未必都对．

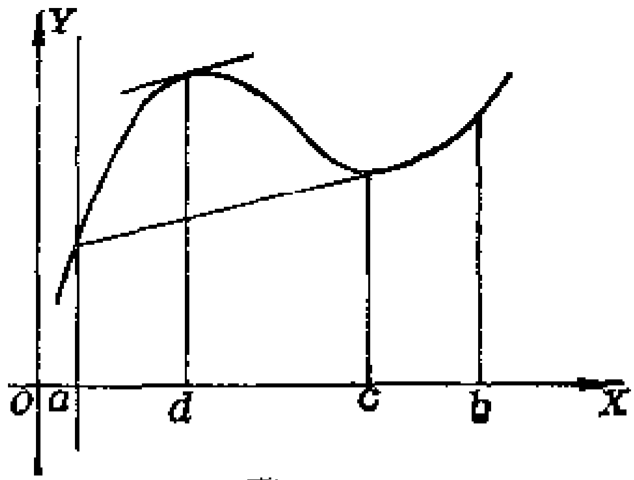


图 6.11

为了克服这个困难，我们改变一下做法．在区间$[a, c]$上考察函数f．由最大值最小值定理知它可在该区间上取得最大值，不妨设是在$x=s$处取得（s可能等于c）．由于已设$f(c)>f(a)$，所以有$a<s\leqslant c$．如果$s=c$,则$f'(s)=f(c)=0$;如果$a<s<c$，则由问题6.3.7知$f'(s)=0$．再按前面的做法，在(a, s)中找出一点d，使得$f'(d)=\frac{f(s)-f(a)}{s-a}$，于是

$$F(d)=f'(d)-\frac{f(d)-f(a)}{b-a}$$

$$=\frac{f(s)-f(a)}{s-a}-\frac{f(d)-f(a)}{b-a}$$

$$>\frac{f(s)-f(a)}{b-a}-\frac{f(d)-f(a)}{b-a}$$

$$=\frac{f(s)-f(d)}{b-a},$$

由s的选取知$f(s)\geqslant f(d)$，故上面最后一个分式非负. 所以对$f(c)>f(a)$的场合，命题证毕 .对于$f(c)<f(a)$及$f(c)=f(a)$的场合，证明过程类似 .

6.6.5. 设实值函数f对一切实数有定义，二次连续可导，且对一切x有$|f(x)|\leqslant 1$，$(f(0))^2+(f'(0))^2=4$. 证明存在实数x_0，使得$f(x_0)+f''(x_0)=0$.

证 有两条自然途径可供考虑. 一条是运用中值定理，即考虑函数$F(x)=f(x)+f''(x)$，并设法找出a和b，使得$F(a)>0$及$F(b)<0$. 但不易看出条件$(f(0))^2+(f'(0))^2=4$怎样能被运用于这一途径 .

另一种考虑办法是观察$G(x)=(f(x))^2+(f'(x))^2$能否在某个区间的内部达到最值. 因为在这样的最值处有$G'(x)=0$，而$G'(x)=2f(x)f'(x)+2f'(x)f''(x)=2f'(x)[f(x)+f''(x)]$，所以这种想法使人感觉合理 .

我们的意图是先证明存在a与b，$-2<a<0$，$0<b<2$，使得$|G(a)|\leqslant 2$及$|G(b)|\leqslant 2$，这样，再根据$G(0)=4$就可以知道$G(x)$必在(a, b)中某点x_0处取得最大值，并因此有$G'(x_0)=0$.

由微分中值定理，知在$(-2, 0)$中存在一点a，在$(0, 2)$中存在一点b，使得

$$f'(a)=\frac{f(0)-f(-2)}{2}$$

及 $\quad f'(b)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2}$ ，

于是有

$$|f'(a)|=\left|\frac{f(0)-f(-2)}{2}\right|\leqslant\frac{1}{2}(|f(0)|+|f(-2)|)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}(1+1)=1,$$

$$|f'(b)|=\left|\frac{f(2)-f(0)}{2}\right|\leqslant\frac{1}{2}(|f(2)|+|f(0)|)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}(1+1)=1.$$

所以

$$|G(a)|=|(f(a))^2+(f'(a))^2|\leqslant|f(a)|^2+|f'(a)|^2\leqslant 2,$$

$$|G(b)|=|(f(b))^2+(f'(b))^2|\leqslant|f(b)|^2+|f'(b)|^2\leqslant 2.$$

令x_0为$(a,\ b)$中使$G(x)$达最大值的点，则

$$G'(x_0)=2f'(x_0)[f(x_0)+f''(x_0)]=0.$$

如果$f'(x_0)=0$，则$G(x_0)=(f(x_0))^2+(f'(x_0))^2$

$$=(f(x_0))^2\leqslant 1.$$

但因$G(0)=4$，故应有$G(x_0)\geqslant 4$，所以$f'(x_0)\neq 0$。从而必有$f(x_0)+f''(x_0)=0$。

6.6.6. 设$f(x)$在$[0,1]$上可导且有$f(0)=0$及$f(1)=1$。证明对每个正整数n，在$[0,\ 1]$中都存在n个不同的点$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$，使得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f'(x_i)}=n.$$

证 为了有助于看清一般情形，先考虑$n=1$的情形。要

在〔0，1〕中找出点x_1，使得$\frac{1}{f'(x_1)}=1$，这由微分中值定理很容易做到，因为在区间〔0，1〕中，存在一点x_1，使得$f'(x_1)=1$．

再考虑$n=2$的情形．我们分别考察子区间〔0，x〕和〔x，1〕，其中x是某个待定的介于0和1之间的数．由微分中值定理知，在（0，x）中存在点x_1，在（x，1）中存在点x_2，使得

$$f'(x_1)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \quad 及 \quad f'(x_2)=\frac{f(1)-f(x)}{1-x}.$$

于是为使

$$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=2,$$

必须且只须

$$\frac{x}{f(x)}+\frac{1-x}{1-f(x)}=2,$$

$$x(1-f(x))+(1-x)f(x)$$
$$=2f(x)-2(f(x))^2,$$
$$x-xf(x)+f(x)-xf(x)-2f(x)+2(f(x))^2$$
$$=0,$$
$$x-2xf(x)-f(x)+2(f(x))^2=0,$$
$$x(1-2f(x))-f(x)(1-2f(x))=0,$$
$$[x-f(x)][1-2f(x)]=0.$$

这样，如果我们已在（0，1）中选定x，使得$f(x)=\frac{1}{2}$（由中值定理所保证，这是可以办到的），则只要反过来进行上述推导，就可完成证明．

有了这样的背景，我们就可以考虑n为任意正整数的情

形了．设c_i是〔0，1〕中使得$f(c_i)=\frac{i}{n}$的最小的数（由函数的连续性与中值定理，可保证这种数的存在性），则$0<c_1<c_2<\cdots<c_{n-1}<1$．再定义$c_0=0$，$c_n=1$，于是可在每个区间（$c_{i-1}$，$c_i$），$i=1$，2，…，$n$中，选取一点$x_i$，使得

$$f'(x_i)=\frac{f(c_i)-f(c_{i-1})}{c_i-c_{i-1}},$$

（由微分中值定理所保证，这是可以做到的．）则有

$$f'(x_i)=\frac{\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}}{c_i-c_{i-1}}=\frac{1}{n(c_i-c_{i-1})}\quad,$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}n(c_i-c_{i-1})=n\ .$$

问题

6.6.7．（a）通过证明$F'(x)=0$，证明

$$F(x)=\frac{\sin x+\sin(x+a)}{\cos x-\cos(x+a)}$$

是常值函数．（本命题源出于问题1.2.1.）.

（b）设$P(x)$是x的三次多项式，$y^2=P(x)$，证明

$$\frac{D(y^3D^2y)}{y^2}$$

是常数，其中D表示求导算符．（提示：首先用P及其导数将上式表示出来）．

6.6.8．（a）如果$y=f(x)$是微分方程$y''+y=0$的一个解，证明$f^2+(f')^2$是常数

（b）利用(a)的结果证明$y''+y=0$的每一个解都具有

$y=A\cos x+B\sin x$的形式。（提示：首先容易验证每个形为$A\cos x+B\sin x$的函数都满足微分方程．再令$f(x)$是一个解．欲使$f(x)$具有形式$f(x)=A\cos x+B\sin x$，必须$A=f(0)$，$B=f'(0)$．下面再考虑$F(x)=f(x)-f(0)\cos x-f'(0)\sin x$，对$F(x)$运用($a$)的结论，并设法利用事实$F(0)=0=F'(0)$）．

（c）利用(b)的结果证明加法公式

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y,$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y .$$

6.6.9. 设$f(x)$在(0，1)上可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$．证明，对任何正整数n及任意给定的正数k_1，k_2，…，k_n，都存在不同的x_1，x_2，…，x_n，使得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}k_i .$$

补充例题

6.9.6，6.9.10，第7.4节．

6.7 洛比达法则

我们假定读者们都已经熟悉了L'Hôpital法则的各种不同形式．

6.7.1. 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{a^x-1}{a-1}\right)^{\frac{1}{x}}，其中a>1^{*)}.$$

---

*）译者注：原文"$a>0$"，这样一样，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a^x-1}{x}$不是$\frac{\infty}{\infty}$型，不能用L'Hôpital法则，故改$a>1$．

解 将表达式改写为等价的形式

$$\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{a^x-1}{a-1}\right)^{\frac{1}{x}}=\exp\left\{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{a^x-1}{a-1}\right)\right\}.$$

这样，问题就转化为计算

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{a^x-1}{a-1}\right)\right\},$$

或者等价地，计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}\right)+\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^x-1}{x}\right)-\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a-1}{x}\right),$$

前提当然是上述各极限存在 .

显然，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a-1}{x}=0$，又由L′Hôpital法则知

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\ \ln\ \frac{1}{x}\right)=-\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,$$

仍然由L′Hôpital法则知，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\ln(a^x-1)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^x\ln a}{a^x-1}\right)=\ln a.$$

所以就有

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{a^x-1}{a-1}\right)^{\frac{1}{x}}=\exp\{\ln a\}=a.$$

6.7.2. 设函数f有二阶连续导数，$f(0)=0$。定义函数g为：$g(0)=f'(0)$，$g(x)=\frac{f(x)}{x}$，当$x\neq0$。证明函数g有连续导数 .

证 当$x\neq0$时，有

$$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2},$$

由于f'连续，所以在一切$x\neq0$处g'连续。只须再验证g在x

$=0$处是否有导数，以及当$g'(0)$存在时，g'是否在$x=0$处连续。

为证$g'(0)$存在，我们考察如下的极限：

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\left(\frac{f(x)}{x}-f'(0)\right)\right]$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}(f(x)-xf'(0))\right].$$

由于当$x\to 0$时，有$f(x)-xf'(0)\to 0$，又因为f与f'可导，所以可用L'Hôpital法则，得到

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{f'(x)-f'(0)}{x}\right)=\frac{1}{2}f''(0),$$

（上式中最后一步是根据$f''(0)$的定义得出），故知$g'(0)$存在 。

为检验g'在0处的连续性，利用连续的定义，我们有

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}(xf'(x)-f(x))\right]$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2x}(f'(x)+xf''(x)-f'(x))\right]$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}f''(x)\right)=\frac{1}{2}f''(0),$$

上式中最后一步得自f有连续二阶导数的假定，所以

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=g'(0) .$$

问题

6.7.3. 计算

$$\lim_{n\to\infty} 4^n\left(1-\cos\frac{\theta}{2^n}\right).$$

6.7.4. 计算下列极限：

(a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$；(b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$；

(c) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$，(d) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$；

(e) $\lim_{n\to\infty}\frac{2p_nP_n}{p_n+P_n}$，其中$p_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，

$P_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

6.7.5. 设$0<a<b$，计算

$$\lim_{t\to 0}\left[\int_0^1(bx+a(1-x))^t\,dt\right]^{\frac{1}{t}}.$$

6.7.6. 计算

$$\lim_{x\to\infty} x\int_0^x \exp\{t^2-x^2\}\,dt .$$

6.7.7. 设函数$y=(x^2)^x$，$y(0)=1$，证明它在$x=0$处连续。

6.8 积 分

当$n\to\infty$时，和式

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$$

会出现什么情况？利用几何解释是回答这个问题的一种途径。如图6.12所示，在$(n, 2n)$上构造矩形。由该图形看出

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}>\int_n^{2n}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_n^{2n}$$

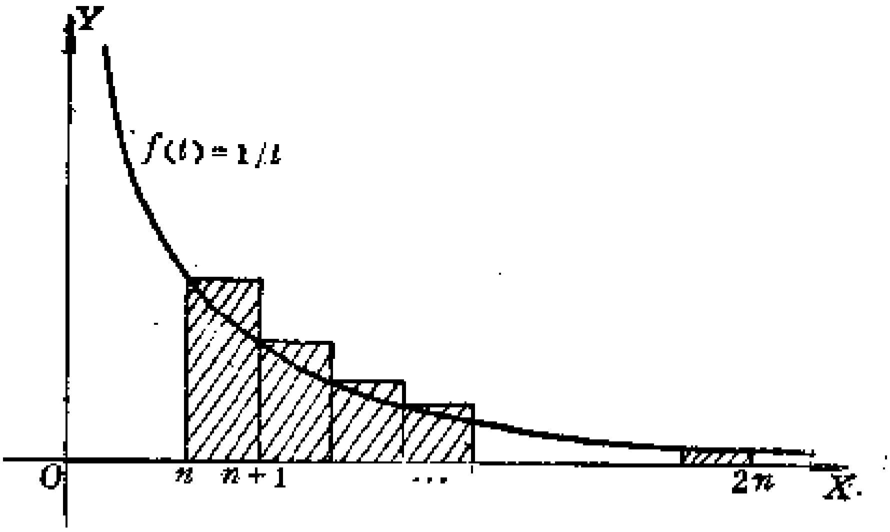


图6.12

$$=\ln 2n-\ln n=\ln 2。$$

类似地，由图6.13知

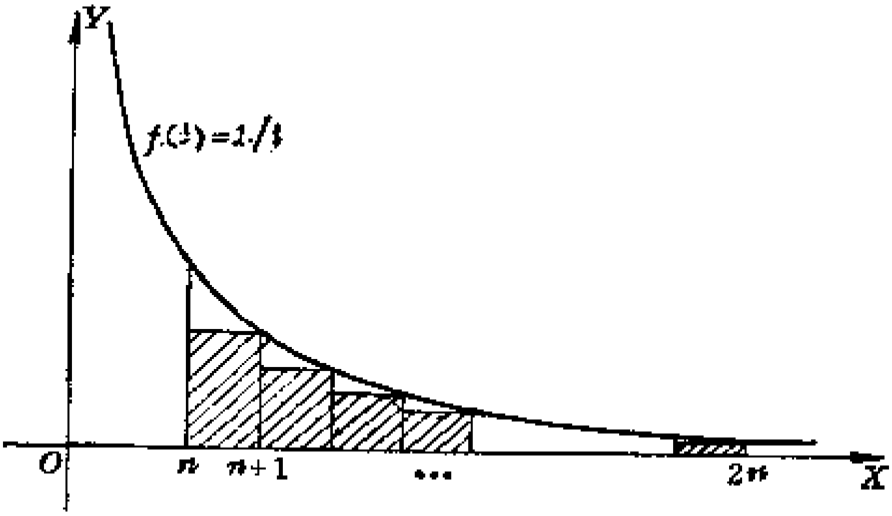


图6.13

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}<\int_n^{2n}\frac{1}{t}dt=\ln 2。$$

综合两方面，我们得到

$$\ln 2<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}<\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\right)+\ln 2 .$$

所以当$n\to\infty$时，所考察的和式逼近于$\ln 2$.

还有一种考察问题的方式：将和式改写为

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{1+k/n}\right)\frac{1}{n}$$

的形式，把它的每一项 $\left(\frac{1}{1+k/n}\right)\frac{1}{n}$ 都看成是以 $\left[\frac{k}{n},\ \frac{k+1}{n}\right]$ 为底，且高为 $\frac{1}{1+k/n}$ 的矩形的面积。这样，和式恰好表示了图6.14中阴影所示的那些矩形的面积之和。当 $n\to\infty$ 时，

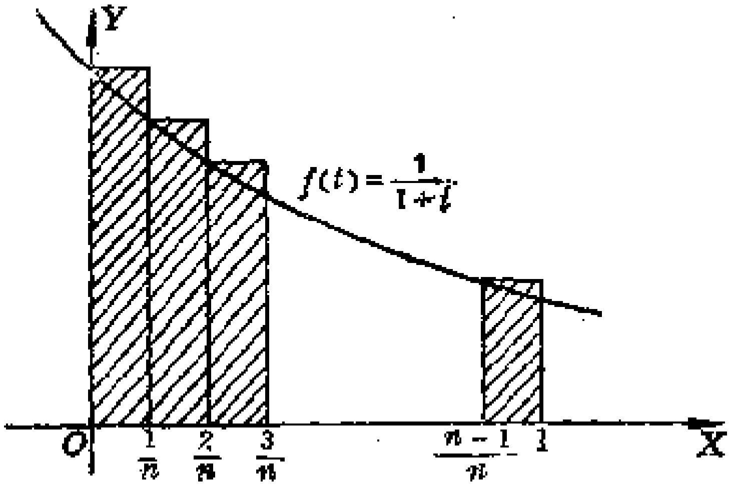


图 6.14

该面积逼近于由 $y=1/(1+x)$，$y=0$，$x=0$，$x=1$ 所界出的面积，即

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{K=0}^{n-1}\left(\frac{1}{1+k/n}\right)\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2\ .$$

6.8.1. 计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n}\left(\left[\frac{2n}{k}\right]-2\left[\frac{n}{k}\right]\right).$$

解 本题事实上即为计算定积分

$$\int_0^1\left(\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]\right)dx\ .$$

我们打算运用几何方法，也就是通过计算位于曲线 $f(x)=[2/x]-2[1/x]$ 下方且界于 $x=0$ 及 $x=1$ 之间的图形面积来求

得这一定积分。显然，$f(x)$在$(0,\ 1)$中的不连续点只可能出现在$\frac{2}{x}$或$\frac{1}{x}$是整数之处。前者为$\frac{2}{x}=n$，此时有$x=\frac{2}{n}$；后者为$\frac{1}{x}=n$，此时有$x=\frac{1}{n}$。所以我们应把注意力集中到点$1>2/3>2/4>2/5>2/6>\cdots$之处。

容易验证，对每个n，有

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x\in\left(\frac{2}{2n+1}\quad \frac{2}{2n}\right],\\ 1, & \text{当 } x\in\left(\frac{2}{2n+2}\quad \frac{2}{2n+1}\right],\end{cases}$$

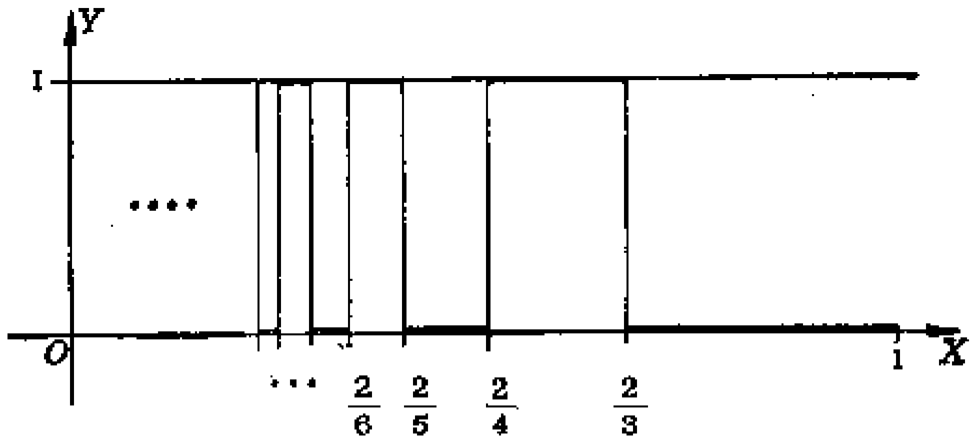


图6.15

其图形如图6.15所示，因而，所要计算的定积分之值为：

$$\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{4}\right)+\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{6}\right)+\left(\frac{2}{7}-\frac{2}{8}\right)+\cdots,$$

或$2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots\right)$。回顾

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots.$$

$$-1<x\leqslant 1,$$

我们得到

$$2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\right)=2(\ln 2-1+\frac{1}{2})$$
$$=\ln 4-1.$$

6.8.2. 计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\prod_{i=1}^{2n}(n^2+i^2)^{1/n}.$$

解 可以将乘积式等价地改写为

$$\frac{1}{n^4}\prod_{i=1}^{2n}(n^2+i^2)^{1/n}=\exp\left[\ln\frac{1}{n^4}\prod_{i=1}^{2n}(n^2+i^2)^{1/n}\right]$$
$$=\exp\left[\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{n}\ln(n^2+i^2)-\ln n^4\right],$$

所以下面我们考察

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{n}\ln(n^2+i^2)-\ln n^4\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{n}\ln n^2\left(\frac{n^2+i^2}{n^2}\right)-\ln n^4\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{n}\left\{\ln n^2+\ln\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)\right\}-\ln n^4\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{n}\ln n^2+\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{n}\ln\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)-\ln n^4\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{n}\ln n^2+\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{n}\ln\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)-\ln n^4\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{2n}\ln\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)\cdot\frac{1}{n}\right].$$

将上面的最后一个式子看作定积分

$$\int_0^2\ln(1+x^2)dx,$$

运用分部积分，得到

$$\int_0^2\ln(1+x^2)dx=x\ln(1+x^2)\Big|_0^2-2\int_0^2\frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$=2\ln 5-2\int_0^2\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$=2\ln 5-2(x-\operatorname{arctg}x)\Big|_0^2$$

$$=2\ln 5-2(2-\operatorname{arctg}2)。$$

所以，原求之极限即为

$$\exp\{2\ln 5-4+2\operatorname{arctg}2\},$$

或者等价地，为

$$25\exp\{2\operatorname{arctg}2-4\}.$$

6.8.3. 证明

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{k+m+1}=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\frac{1}{k+n+1}$$

证 本题的关键是注意到

$$\frac{1}{k+m+1}=\int_0^1 t^{k+m}dt.$$

利用这一等式，得到

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{k+m+1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\int_0^1 t^{k+m}dt$$

$$=\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}t^{k+m}dt$$

$$=\int_0^1 t^m(1-t)^n dt,$$

作变量替换$s=1-t$，由最后那个积分得到

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{k+m+1}=\int_0^1 s^n(1-s)^m ds$$

$$=\int_0^1 s^n\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}s^k ds$$

$$=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\int_0^1 s^{k+n}ds$$

$$=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\frac{1}{k+n+1}.$$

问题

6.8.4. 计算下列极限

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\cdots+\frac{1}{3n}\right]$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^a+2^a+\cdots+n^a}{n^{1+a}}\right]$, $a>-1$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n}{1^2+n^2}+\frac{n}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right]$,

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$。

6.8.5. 计算下列极限：

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-\frac{3}{2}}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k^2+n^2}}$.

6.8.6. 求$\sum\limits_{n=1}^{10^9} n^{-2/3}$的整数部分。（提示：比较区间$[1,10^9+1]$上位于曲线$f(x)=x^{-2/3}$下方的面积与区间$[2,10^9+1]$上位于曲线$g(x)=(x-1)^{-2/3}$下方的面积）。

6.8.7. 设f与g均在$[0,a]$上连续，对$[0,a]$中每个x都有$f(x)=f(a-x)$及$g(x)+g(a-x)=k$，其中k为某常数。证明

$$\int_0^a f(x)g(x)dx=\frac{1}{2}k\int_0^a f(x)dx,$$

并利用这一事实计算

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

6.8.8. (*a*) 令

$$A=\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{(x+2)^2}dx,$$

试用A表示

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cdot\cos x}{x+1}dx.$$

(*b*) 令

$$f(x)=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}dt,\quad x>0,$$

计算 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$.

6.8.9. 试从定义于$0\leqslant x\leqslant 1$的连续正值函数中，找出所有的满足下列关系式的$f(x)$：

$$\int_0^1 f(x)dx=1,\quad \int_0^1 xf(x)dx=a,\quad \int_0^1 x^2f(x)dx=a^2,$$

其中a为某个给定的实数.

6.8.10. 设$f(x,\ y)$为定义于正方形

$$S=\{(x,\ y):\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$$

之上的连续函数. 对S内部的每个点$(a,\ b)$，以$S_{(a,b)}$记中心在$(a,\ b)$，边与S的边相平行，且含于S的最大的正方形. 如果对每个这样的正方形$S_{(a,b)}$，其上的二重积分$\iint f(x,\ y)dxdy$值都为零，试问$f(x,\ y)$在S上是否恒等于零？

补充例题

1.4.4，1.6.3，1.12.3，1.12.6，2.5.15，6.2.2，6.2.9，7.6.3.

6.9 基本定理

微积分学的基本定理是指涉及导数与积分之间的互逆关系的两个定理。其中关于导数的积分的基本定理是说：如果在区间$[a, b]$上函数$F(t)$具有连续导数，则有

$$\int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a)。$$

换句话说，对导数作积分可恢复到原来的函数加上一个常数，也就是

$$F(x) = \int_0^x F'(t)dt + C,$$

其中$C = F(0)$

例如，函数$F(t) = \sin^2 t$的导数是$F'(t) = 2\sin t\cos t$，$F'(t)$在$[0, x]$上的积分就是

$$\sin^2 x = \int_0^x 2\sin t\cos t dt,$$

此时之所以能恢复为原来的函数是因为$F(0) = 0$。还应看到，也有别的办法可以计算该积分，那就是（设$u = \cos t$）

$$\int_0^x 2\sin t\cos t dt = -\cos^2 t\Big|_0^x = -\cos^2 x + 1。$$

由此得到$\sin^2 x = -\cos^2 x + 1$，或者等价地，对一切x都有$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$。

6.9.1. 试求定义于$(0, +\infty)$上满足等式

$$f(xy) = f(x) + f(y),\quad x > 0,\quad y > 0$$

的可导函数f。

解 当$x = y = 1$，得到$f(1) = f(1\times 1) = f(1) + f(1)$，故有 $f(1) = 0$。

如果$x\neq 0$，则有$0=f(1)=f\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$，

所以$f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$，因而$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$$=f(x)-f(y).$$

下面再设法求出f的导数，然后利用积分恢复f：

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}f\left(\frac{x+h}{x}\right)\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)}{tx}，\text{其中}t=h/x$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{f(1+t)-f(1)}{t}\right)$$

$$=\frac{1}{x}f'(1).$$

于是根据基本定理可以知道

$$f(x)=f(x)-f(1)=\int_1^x f'(t)dt=\int_1^x\frac{f'(1)}{t}dt$$

$$=f'(1)\cdot\ln x,$$

这就是说所求函数都具有$f(x)=A\ln x$的形式，其中A是一个任意常数。

6.9.2. 计算级数的和

$$1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{6n-5}-\frac{1}{6n-1}+\cdots.$$

解　在区间$0<x\leqslant 1$上考虑由如下无穷级数所定义的函数

$$f(x)=x-\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^{11}}{11}+\cdots+\frac{x^{6n-5}}{6n-5}-\frac{x^{6n-1}}{6n-1}+\cdots,$$

该级数在$|x|<1$时绝对收敛，因此可以重新排列各项的顺序：

$$f(x)=\left(x+\frac{x^7}{7}+\frac{x^{13}}{13}+\cdots+\frac{x^{6n-5}}{6n-5}+\cdots\right)$$
$$-\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^{11}}{11}+\cdots+\frac{x^{6n-1}}{6n-1}+\cdots\right).$$

下面我们采用先对f求导，改变它的形式，然后再应用基本定理通过积分恢复f的方法。对$0<x<1$，有

$$f'(x)=(1+x^6+\cdots+x^{6n-6}+\cdots)-(x^4+x^{10}+\cdots$$
$$+x^{6n-2}+\cdots)$$
$$=\frac{1}{1-x^6}-\frac{x^4}{1-x^6}=\frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}.$$

积分之（详细过程略去），并注意$f(0)=0$，得到

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]。$$

由于f的级数表达式在$x=1$处收敛，所以由Abel定理（参阅5.4节）得出原级数收敛到

$$f(1)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right]=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

关于积分的导数的基本定理是指：如果f是区间$[a,b]$上的连续函数，则对(a,b)中的任何x都有

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)。$$

换句话说，先积分后求导可将函数完全恢复原形。

6.9.3. 设$a(x)$，$b(x)$，$c(x)$及$d(x)$都是x的多项式，证明

$$\int_1^x a(x)c(x)dx\int_1^x b(x)d(x)dx$$

$$-\int_1^x a(x)d(x)dx\int_1^x b(x)c(x)dx$$

可被$(x-1)^4$整除。

证 以$F(x)$记问题中的表达式，则有$F(1)=0$，由于$F(x)$是多项式，所以知$x-1$是$F(x)$的一个因式。

我们知道，对一个多项式F来说，欲$(x-1)^4$是其因子，必须且只须$F(1)=F'(1)=F''(1)=F'''(1)=0$*)。利用基本定理来计算$F'$，得到

$$F'(x)=a(x)c(x)\int_1^x b(x)d(x)dx+b(x)d(x)\int_1^x a(x)c(x)dx-a(x)d(x)\int_1^x b(x)c(x)dx-b(x)c(x)\int_1^x a(x)d(x)dx,$$

故知$F'(1)=0$（因而$(x-1)^2$是$F(x)$的一个因子）。可以类似地计算$F''(x)$与$F'''(x)$，得知$F''(1)=0$，并在最后求得$F'''(1)=(ac)'bd+(bd)'ac-(ad)'bc-(bc)'ad\big|_{x=1}=0$，证毕。

以下的三个例子可以说是综合运用了本章的所有各种技巧。

6.9.4. 设f：$(0,\infty)\to R$可导，当$x\to\infty$时有$f(x)+f'(x)\to 0$。证明，当$x\to\infty$时有$f(x)\to 0$。

证 先谈几句题外的话。如果$p(x)$与$q(x)$是连续函数，则方程

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$$

---

*）译者注：原书错作"…当且仅当$F'''(1)=0$"。

可用下述方法来解：用$m(x)=\exp\left\{\int p(x)dx\right\}$乘方程两端，则所得方程可以写成

$$\frac{d}{dx}(ym(x))=m(x)\cdot q(x)$$

的形式。于是由微积分的基本定理知，对每个常数a，都存在一个常数C，使得

$$ym(x)=\int_a^x m(t)q(t)dt+C,$$

由此即可解得y。

下面言归正传。令$g(x)=f(x)+f'(x)$，则按上述理由，可用e^x乘其两端并解出$f(x)$（用$g(x)$表示出来）。如前所述，我们可以得到方程

$$f(x)e^x=\int_a^x e^t g(t)dt+C,$$

这等价于

$$f(x)=e^{-x}\int_a^x e^t g(t)dt+Ce^{-x}。$$

设$\varepsilon>0$。因当$x\to\infty$时，有$g(x)\to 0$，故可取a充分大，使得对一切$x>a$，都有$|g(x)|<\varepsilon$，于是

$$\begin{aligned}|f(x)|&\leqslant e^{-x}\left|\int_a^x e^t g(t)dt\right|+|Ce^{-x}|\\&\leqslant e^{-x}\int_a^x e^t|g(t)|dt+|Ce^{-x}|\\&\leqslant \varepsilon e^{-x}\int_a^x e^t dt+|Ce^{-x}|\\&=\varepsilon(1-e^{a-x})+|Ce^{-x}|,\end{aligned}$$

因此对充分大的x，将有$|f(x)|<2\varepsilon$。所以当$x\to\infty$时，有$f(x)\to 0$。

6.9.5. 计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x(1+\sin 2t)^{\frac{1}{t}}dt\ .$$

解 我们的意图是设法利用L′Hôpital法则，不过先要做些准备工作。由于被积函数在$t=0$处没有定义，因此就有一个积分的存在性问题。但由于有

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\exp\left\{\frac{1}{x}\ln(1+\sin 2x)\right\}$$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\ln(1+\sin 2x)\right]\right\}$$

而由L′Hôpital法则，上式即为

$$\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{1+\sin 2x}\right\}=\exp\{2\}=e^2,$$

所以，我们只要定义

$$f(x)=\begin{cases}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}, & \text{如果 } x\neq 0,\\ e^2, & \text{如果 } x=0,\end{cases}$$

就有f为连续函数，而且$\int_0^x(1+\sin 2t)^{\frac{1}{t}}dt=\int_0^x f(t)dt$。

为了能对问题本身运用L′Hôpital法则，还需证明当$x\to 0$时有$\int_0^x(1+\sin 2t)^{\frac{1}{t}}dt\to 0$。为此，设$K$是$|f(x)|$在$(-1, 1)$上的一个上界，于是对$(-1, 1)$中的$x$，有

$$\left|\int_0^x(1+\sin 2t)^{\frac{1}{t}}dt\right|\leqslant\int_0^x|1+\sin 2t|^{\frac{1}{t}}dt\leqslant K|x|,$$

因此就有

$$\int_0^x(1+\sin 2t)^{\frac{1}{t}}dt\to 0,\ 当\ x\to 0.$$

现在可以应用L′HÔPital法则于问题本身了：

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x(1+\sin 2t)^{\frac{1}{t}}dt=\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}=e^2 .$$

6.9.6. 设f：$[0,1]\to R$有二阶连续导数，$f(0)=0=f(1)$，且对$(0,1)$中一切x，有$f(x)>0$。证明

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx>4 .$$

证 设$f(x)$于$(0,1)$中的X处取得最大值，记$Y=f(X)$，则有$Y>0$，且

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx>\frac{1}{|Y|}\int_0^1|f''(x)|dx$$

$$\geqslant\frac{1}{|Y|}\left|\int_0^1 f''(x)dx\right|=\frac{|f'(1)-f'(0)|}{Y} .$$

但至此我们似乎陷入了困境，因为未必就可有$|f'(1)-f'(0)|\geqslant 4Y$。但是，由微分中值定理知，在$(0,X)$中存在点$a$，在$(X,1)$中存在点$b$，使得

$$f'(a)=\frac{f(X)-f(0)}{X-0}=\frac{f(X)}{X}=\frac{Y}{X}$$

及

$$f'(b)=\frac{f(1)-f(X)}{1-X}=\frac{-Y}{1-X},$$

于是

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx>\int_a^b\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx\geqslant\frac{1}{|Y|}$$

$$\left|\int_a^b f''(x)dx\right|$$

应用基本定理于最后一个积分，即得

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx>\frac{1}{|Y|}\left|f'(b)-f'(a)\right|$$

$$=\frac{1}{|Y|}\left|\frac{-X}{1-X}-\frac{Y}{X}\right|=\frac{1}{|Y|}\left|\frac{Y}{1-X}+\frac{Y}{X}\right|$$
$$=\left|\frac{1}{X(1-X)}\right|.$$

而$x(1-x)$在$(0,1)$中的最大值是$\frac{1}{4}$(当$x=\frac{1}{2}$时)，故

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx>\frac{1}{|X(1-X)|}\geqslant 4。$$

问题

6.9.7. 由下述方程所定义出什么样的函数：

$$f(x)=\int_0^x f(t)dt+1 \quad ?$$

6.9.8. 设f: $[0,1]\to(0,1)$连续，证明方程

$$2x-\int_0^x f(t)dt=1$$

在区间$[0,1]$中有且只有一个解．

6.9.9. 设f为连续函数，对一切x满足方程

$$\int_0^x f(t)dt=\int_x^1 t^2f(t)dt+\frac{x^{16}}{8}+\frac{x^{18}}{9}+c,$$

其中C是某常数。求出$f(x)$的明显表达式，并确定出常数C的值．

6.9.10. 如图6.16所示，C_1与C_2是经过坐标原点的曲线．C是另一条介于C_1与C_2之间的曲线，如果对于C上的任

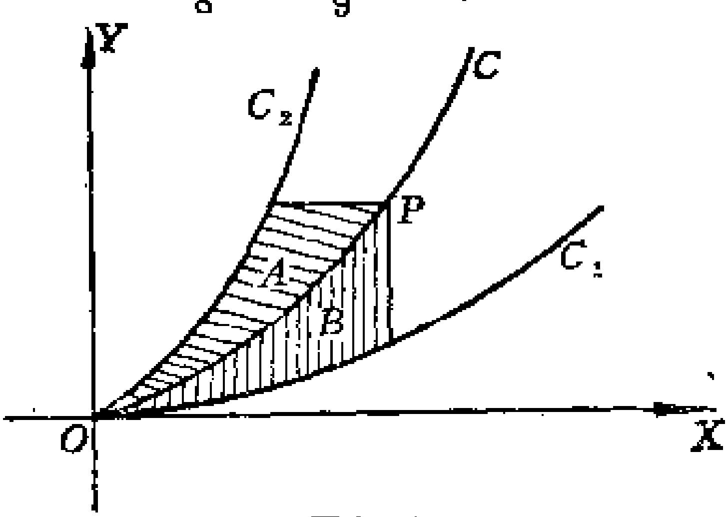


图6.16

何一点P，图中的两个阴影区域A与B的面积都相等，就称C平分介于C_1与C_2之间的面积。现给定平分曲线C为 $y=x^2$ 并给定下方曲线C_1为$y=\frac{1}{2}x$，试确定上方的曲线C_2

6.9.11. 计算级数的和：

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\cdots.$$

6.9.12. 设f可导，f'在$x\geqslant 0$中严格递增．如果$f(0)=0$，证明$\frac{f(x)}{x}$在$x>0$中严格递增．

补充例题

1.5.1，5.1.3，5.1.9，5.1.11，5.4.6，7.6.5．

第七章　不等式

在数学的大多数分支里，不等式都是有用的，并且不等式问题也是数学中最有意义的问题之一．在所有不等式中，我们将集中考虑其中的两个：7.2节中的算术平均—几何平均不等式及7.3节中的Cauchy—Schwarz不等式．此外，在7.1节内将讲到许多代数和几何的技巧；在7.4节及7.5节内将讲到解析的技巧．最后，在7.6节内我们将看到怎样用不等式求极限．

7.1　不等式的基本技巧

建立不等式的最直接的方法是利用代数演算或借助几何解释．例如，算术平均—几何平均不等式

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab},\quad 0<a\leqslant b$$

可以通过把它改写成等价的形式

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$$

用代数方法建立起来，也可以通过图7.1中的半圆从几何上证明（图中半圆的直径AB长为$a+b$，C是AB上一点，

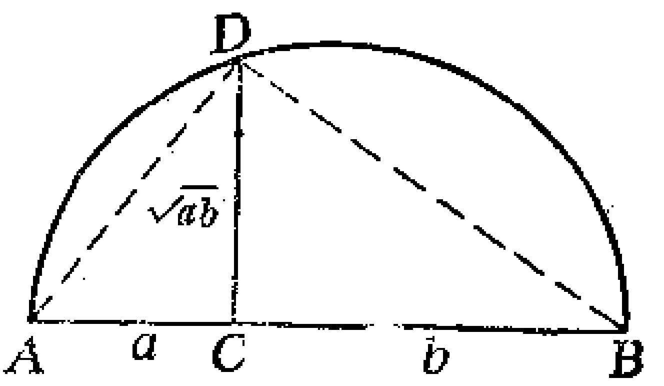


图7.1

使得$AC=a$，$BC=b$．过C点且垂直于AB的直线交半圆于D．因三角形ACD和CDB相似，所以$a/CD=CD/b$，这就得到$CD=\sqrt{ab}$．显然，$\sqrt{ab}\leqslant$圆的半径$=(a+b)/2$．）．从两种推导都能明显地看出当且仅当$a=b$时等号成立．

本节内我们举一些不等式的例题，它们是仅用代数与几何的方法即可证明．

7.1.1. 证明：对于任意正数a、b、c，有

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca.$$

证 我们从要证的不等式开始，倒推下去：

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca,$$

$$2a^2+2b^2+2c^2\geqslant 2ab+2bc+2ca,$$

$$(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\geqslant 0,$$

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant 0.$$

最后一个不等式显然成立，并且上述过程是可逆的，不等式获证（从证明还可以明显地看出，当且仅当$a=b=c$时等号成立）．

这个例题说明了一个常用的方法：把一个表达式化为这样一种形式，使之能利用一个数的平方是非负的这一常识．

7.1.2. 证明：当$0<x<\pi/2$时，有

$$\cos^2x+x\sin x<2.$$

证 考虑函数

$$f(x)=2-\cos^2x-x\sin x,$$

并作如下证明

$$f(x)=1+(1-\cos^2x)-x\sin x$$
$$=1+\sin^2x-x\sin x$$

$$=(1-2\sin x+\sin^2 x)-x\sin x+2\sin x$$
$$=(1-\sin x)^2+(2-x)\sin x\ .$$

由此可见当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时要证的不等式成立 .

7.1.3. 设$0\leqslant a$、b、$c<1$，证明

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)$$
$$(1-c)\leqslant 1\ .$$

证 在这里，简单的代数展开会把问题弄得很复杂，并且没有头绪. 为简单起见，且不失一般性，设$0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant 1$. 于是，有

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}\leqslant\frac{a+b+c}{a+b+1}\ .$$

因而我们可以试证不等式

$$\frac{a+b+c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant 1.$$

这个问题从代数角度较容易，但并不简洁，因为我们可能放大得太多了（也就是说，这个不等式甚至可能不成立）. 然而，我们有下面的等式：

$$\frac{a+b+c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)$$
$$=\frac{a+b+1}{a+b+1}+\frac{c-1}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)$$
$$=1-\left(\frac{1-c}{a+b+1}\right)\left[1-(1+a+b)(1-a)(1-b)\right].$$

从这个式子并注意到

$$(1+a+b)(1-a)(1-b)\leqslant(1+a+b+ab)(1-a)\cdot(1-b)$$
$$=(1+a)(1+b)(1-a)(1-b)$$

$$=(1-a^2)(1-b^2)\leqslant 1,$$

就得到要证的不等式

7.1.4. 设n是正整数，且$a_i\geqslant 1$，$i=1, 2, \cdots, n$.证明

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant\frac{2^n}{n+1}(1+a_1+\cdots a_n).$$

证 用归纳法是一个自然的想法，而且这样去做也不困难。但下面的"退一步"的论证方法更有趣：

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$$

$$=2^n\left(\frac{1}{2}+\frac{a_1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{a_2}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+\frac{a_n}{2}\right)$$

$$=2^n\left(1+\frac{a_1-1}{2}\right)\left(1+\frac{a_2-1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n-1}{2}\right)$$

$$\geqslant 2^n\left(1+\frac{a_1-1}{2}+\frac{a_2-1}{2}+\cdots+\frac{a_n-1}{2}\right)$$

$$\geqslant 2^n\left(1+\frac{a_1-1}{n+1}+\frac{a_2-1}{n+1}+\cdots+\frac{a_n-1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{2^n}{n+1}(n+1+a_1-1+a_2-1+\cdots+a_n-1)$$

$$=\frac{2^n}{n+1}(1+a_1+a_2+\cdots+a_n).$$

7.1.5. 对于任意正整数n，证明

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

证 这是一个重要的不等式，有许多方法证明（参看7.1.11，7.2.8，7.4.18）.这里我们给出一个比较两边的二项式展开对应项的证明 .

在左边，有

$$(1+\frac{1}{n})^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\frac{1}{n})^k$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n\cdot n\cdot n\cdots n}\frac{1}{k!}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n}).$$

对右边，有

$$(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{k-1}{n+1})$$

$$=\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$

不等式是很显然的了，因为比较这些式子内$1/k!$的系数，对于每个k，$k=0$，1，2，…，n，有

$$(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})<(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{k-1}{n+1}).$$

值得注意的是

$$(1+\frac{1}{n})^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})$$

$$<\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$$

$$<1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}=1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}$$

$$<1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}=3.$$

这样，数列$\{1+(1/n)\}^n$增加且有上界3（还可以证明这个数列收检于数e）。

下面的结果理论上是重要的而且很有用（参看7.4.9及7.4.20）.

7.1.6. 设f: $R\to R$, 对(a,b)内的所有x、y, $x\neq y$, 满足

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)<\frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

证明

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n},$$

这里x_i在(a, b)内，且至少对一个数对(i, j)有$x_i\neq x_j$.

证 设结论对$n=m$成立，我们先证明它对$n=2m$也成立。事实上：

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_{2m}}{2m}\right)=f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x_1+\cdots+x_m}{m}+\frac{x_{m+1}+\cdots+x_{2m}}{m}\right)\right)$$

$$<\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x_1+\cdots+x_m}{m}\right)+f\left(\frac{x_{m+1}+\cdots+x_{2m}}{m}\right)\right)$$

$$<\frac{1}{2}\left(\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_m)}{m}+\frac{f(x_{m+1})+\cdots+f(x_{2m})}{m}\right)$$

$$=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{2m})}{2m}$$

于是，由归纳法，这个结论对所有2的正幂成立。

现在设$n>2$且n不是2的幂，即对某个整数m，$2^{m-1}<n<2^m$.令$k=2^m-n$，并记$y_i=(x_1+\cdots+x_n)/n$，$i=1, 2, \cdots, k$.这样2^m个数x_1，x_2，$\cdots$，x_n，y_1，$\cdots$，y_k都在

(a, b)内，所以，由前面的讨论，有

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n+y_1+\cdots+y_k}{2^m}\right)<$$

$$\frac{f(x_1)+\cdots+f(y_k)}{2^m}.$$

如果注意到

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n+y_1+\cdots+y_k}{2^m}\right)$$

$$=f\left[\frac{x_1+\cdots+x_n+k(x_1+\cdots+x_n)/n}{2^m}\right]$$

$$=f\left[\frac{n(x_1+\cdots+x_n)+(2^m-n)(x_1+\cdots+x_n)}{2^m n}\right]$$

$$=f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right).$$

把它代入前面最末一个不等式，得

$$f\left(\frac{x_1+\cdots x_n}{n}\right)<\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)+f(y_1)+\cdots+f(y_k)}{2^m}$$

$$=\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)+kf[(x_1+\cdots+x_n)/n]}{2^m}$$

两边乘2^m，得

$$2^m f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)<f(x_1)+\cdots+f(x_n)+(2^m-n)$$

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right),$$

由此得到要证的不等式对n成立：

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)<\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

问题

7.1.7. 设a、b、c为正数，证明：

(a) $(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc$;

(b) $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geqslant abc(a+b+c)$;

(c) 若$a+b+c=1$，则$ab+bc+ca \leqslant 1/3$.

7.1.8. 证明

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{999999}{1000000}<\frac{1}{1000}$$

（提示：两边平方后再“退让一步”以创造一个“迭套”式的乘积（参看5.3）.）

7.1.9.

(a) 若a及b是非零实数，证明下列不等式中至少有一个成立：

$$\left|\frac{a+\sqrt{a^2+2b^2}}{2b}\right|<1,\quad \left|\frac{a-\sqrt{a^2+2b^2}}{2b}\right|<1 .$$

(b)若n个数x_1，x_2，…，x_n，都在区间（0，1）内，证明下列不等式中至少有一个成立：

$$x_1x_2\cdots x_n \leqslant 2^n,\quad (1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n) \leqslant 2^n .$$

7.1.10. (a) a_1/b_1、a_2/b_2、…、a_n/b_n是n个分数，且$b_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$，证明分数

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$$

是一个位于上述n个分数中最小者及最大者之间的数 .

（注意所有分数a_i/b_i相等这一特殊情形）.

(b) 若

$$\frac{a+b}{b+c}=\frac{c+d}{d+a},$$

证明或者$a=c$或者$a+b+c+d=0$.

7.1.11. (a) 证明：对于$0<a<b$，有

$$(n+1)(b-a)a^n<b^{n+1}-a^{n+1}<(n+1)(b-a)a^n .$$

(b) 在此不等式中，令$a=1+\{1/(n+1)\}$，
$b=1+(1/n)$，证明

$$(1+\frac{1}{n})^n<(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\ 。$$

7.1.12. 证明：对所有正整数n，有

$$(\frac{n}{e})^n<n!<e(\frac{n}{2})^n\ .$$

7.1.13. (Cauchy—Schwarz不等式）.对n行归纳法，证明对于所有实数a_1，…，a_n；b_1，…，b_n，有

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right).$$

7.1.14. 证明：凸四边形（两边对角线在其内部）对角线长之和小于它的周长，但大于它的半周长。

7.1.15. 证明：对任意正整数n，$\sqrt[n]{n}<1+\sqrt{2/n}$.

补充例题

1.3.3， 1.7.4， 1.7.5， 1.8.2， 1.8.6， 1.12.7， 2.1.5， 2.1.6， 2.2.4， 2.2.6， 2.4.1， 2.4.4， 2.4.6， 5.3.8， 6.1.3， 7.3.1， 7.4.8， 7.4.9， 7.4.20， 7.4.21， 7.4.22， 7.4.23 .

7.2 算术平均——几何平均不等式

若$x_i>0$，$i=1$，2，…，n. x_1，x_2，……x_n的算术平均是指数

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},$$

而x_1，x_2…，x_n的几何平均是指数

$$(x_1x_2\cdots x_n)^{1/n}.$$

算术平均一几何平均不等式是

$$(x_1x_2\cdots x_n)^{1/n}\leqslant\frac{x_1+x_2\cdots x_n}{n}.$$

当且仅当所有x_i相等时等号成立。

在7.1节的开始一段，用代数和几何的两种方法，已证明了$n=2$这一特殊情形。对于较大的n，可以用数学归纳法（参看7.2.5或2.5.7）或考虑函数$f(t)=\log t$的凹性（参看7.4.20）来证明。但是，下面的做法（但不是一个证明）更有启发性。

考虑几何平均$(x_1x_2\cdots x_n)^{1/n}$及算术平均$(x_1+x_2+\cdots+x_n)/n$。若所有x_i不全相等，把它们当中最大的数x_M和最小的值x_m，都用$(x_M+x_m)/2$代替。因为$((x_M+x_m)/2)+((x_M+x_m))/2=x_M+x_m$，且$((x_M+x_m)/2)^2>x_Mx_m$，于是，这样替代的结果使得几何平均增加而算术平均不变。若这新的n个数仍不全相等，我们可以重复前面的过程。这个过程重复充分多次后，可以使这些数达到我们所希望的接近程度（这一步还必需加以证明，但在此我们不去讨论它了）。在这个过程的每一步，几何平均是增加的而算术平均不变。如果出现所有数都相等（当然，也可能永远不会出现，例如，取$x_1=1$，$x_2=3$，$x_3=4$），则两个平均数将相等。因此，只可能有一种情形：几何平均小于或等于算术平均，当且只当所有的数相等时，这两个平均数相等。

以$x_1=2$，$x_2=4$。$x_3=8$，$x_4=12$的情形为例，上述算法产生出下面集合的叙列：

$$\{2,4,8,12\}\to\{7,4,8,7\}\to\{7,$$

6, 6, 7 } → { 13/2, 13/2, 13/2, 13/2 } .

与这些集合相应的几何平均增加到13/2，而算术平均数始终保持为13/2 .

7.2.1. 证明，在表面积一定的长方体中，体积最大的是立方体；而在体积一定的长方体中，表面积最小的也是立方体 .

证 设三条相邻的边长为a、b及c .以A及V分别表示长方体的表面积和体积，则

$$A=2(ab+bc+ca),\ V=abc .$$

由算术平均—几何平均不等式，有

$$\begin{aligned} V^2 &= a^2b^2c^2=(ab)(bc)(ca) \\ &\leqslant\left(\frac{ab+bc+ca}{3}\right)^3=\left[\frac{2(ab+bc+ca)}{6}\right]^3 \\ &=\left(\frac{A}{6}\right)^3 . \end{aligned}$$

于是，对所有a、b、c，有

$$6V^{2/3}\leqslant A .$$

而且当$ab=bc=ca$（或等价地，当$a=b=c$）时，有$6V^{2/3}=A$，除此以外的一切情形都是$6V^{2/3}<A$. 于是，若A固定，当$a=b=c$（立方体）时，我们得到最大的体积（即$V=(A/6)^{3/2}$）；而若V固定，当$a=b=c$（立方体）时，我们得到最小的表面积（即$A=6V^{2/3}$） .

7.2.2. 证明下面的不等式：

$$n[(n+1)^{1/n}-1]<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$
$$<n-(n-1)n^{-1/(n-1)} .$$

证 令$S_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.左边的不等式相当于

$$\frac{n+S_n}{n}>(n+1)^{1/n},$$

它有点象算术平均—几何平均不等式。用下面的方法来证实这个想法：

$$\frac{n+S_n}{n}=\frac{1}{n}\left[n+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left[(1+1)+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left[2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\cdots+\frac{n+1}{n}\right]$$

$$>\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}\right)^{1/n}$$

$$=(n+1)^{1/n}.$$

对于要证的不等式的右边部分，必须证明

$$\frac{n-S_n}{n-1}>n^{-1/(n-1)}.$$

再利用算术平均—几何平均不等式，我们有

$$\frac{n-S_n}{n-1}=\frac{1}{n-1}\left[n-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[(1-1)+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n-1}{n}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{2}\cdots\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{n-1}{n}\right)^{1/(n-1)}$$

$$=\left(\frac{1}{n}\right)^{1/(n-1)}=n^{-1/(n-1)}.$$

7.2.3. 设a、b、c是正数，使得$(1+a)(1+b)(1+c)=8$，证明$abc\leqslant 1$。

证　我们已知

$$1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc=8 .$$

由算术平均--几何平均不等式，有

$$a+b+c\geqslant 3(abc)^{1/3},$$

及
$$ab+bc+ca\geqslant 3(abc)^{2/3} .$$

当且只当$a=b=c$时，它们各自成立等号。于是

$$\begin{aligned}8&\geqslant 1+3(abc)^{1/3}+3(abc)^{2/3}+abc\\&=[1+(abc)^{1/3}]^3\end{aligned}$$

由此可得

$$(abc)^{1/3}\leqslant(2-1)=1 .$$

或等价地，

$$abc\leqslant 1,$$

当且仅当$a=b=c=1$时等号成立。

7.2.4. 设$x_i>0$，$i=1$，2，…，n，且$x_{n+1}=x_1$。证明

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_{i+1}}{x_i}\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right)^n$$

证　考虑$n=3$的情形，由算术平均一几何平均不等式，我们有

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_2}{x_3}\cdot\frac{x_3}{x_1}\,1\leqslant\qquad\frac{1}{3}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{x_3}{x_1}\right)^3+\frac{1}{3}$$

$$\frac{x_3}{x_2}=\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_3}{x_1}\,1\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3+\qquad+\frac{1}{3}\left(\frac{x_3}{x_1}\right)^3+\frac{1}{3}$$

$$\frac{x_1}{x_3}=\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_3}\,1\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^3+\qquad+\frac{1}{3}$$

还有

$$1=\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_3}\cdot\frac{x_3}{x_1}\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{x_3}{x_1}\right)^3$$

把以上不等式相加即得要证的不等式。对于任意正整数n的

情形，证明是类似的．

问题

7.2.5. 用下面的归纳步骤证明算术平均－几何平均不等式：对每一个k，记$A_k=(x_1+x_2+\cdots+x_k)/k$，$G_k=(x_1\cdot x_2\cdots x_k)^{1/k}$．假定我们已证明$A_k\geqslant G_k$，令

$$A=\frac{x_{k+1}+(k-1)A_{k+1}}{k}\text{及}G=(x_{k+1}A_{k+1}^{k-1})^{1/k*}.$$

于是，利用归纳假定，有$A\geqslant G$，由此得到$A_{k+1}=(A_k+A)/2\geqslant(A_kA)^{1/2}\geqslant(G_kG)^{1/2}=(G_{k+1}^{k+1}A_{k+1}^{k-1})^{1/2k}$．从它就得到$A_{k+1}\geqslant G_{k+1}$．基于这个讨论，易证等号当且仅当所有$x_i$相等时成立．

7.2.6. 设a、b、c是正数，证明

$$(a^2b+b^2c+c^2a)(a^2c+b^2a+c^2b)\geqslant 9a^2b^2c^2.$$

7.2.7. 设a_1，a_2，$\cdots a_n$是正数，且b_1，b_2，$\cdots$，b_n是a_1，a_2，$\cdots a_n$的一个重新排列，证明

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\geqslant n.$$

7.2.8.

(a)对正数a及b，$a\neq b$．证明

$$(ab^n)^{1/(n+1)}<\frac{a+nb}{n+1}.$$

(b) 在(a)中，考虑$a=1$，$b=1+1/n$的情形，证明

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

(c) 在(a)中，用$n+1$替代n，令$a=1$，$b=n/(n+1)$，证明

---

*）译者注：此处原文误为$A=\dfrac{x_{k+1}+(k-1)A_k}{k}$，$G=(x_kA_{k+1}^{k-1})^{1/k}$．

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

7.2.9. 对任何整数$n>2$，证明

(a) $\prod\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\leqslant\left(\frac{2^n-2}{n-1}\right)^{n-1}$.

(b) $n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

(c) $1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)<n^n$.

7.2.10. 设方程$x^6-6x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+1=0$的所有根为正，求$a$、$b$、$c$、$d$.

7.2.11.

(a) 设$x_i>0$，$i=1, 2, \cdots, n$，且p_1，p_2，$\cdots$，p_n是正整数，证明

$$(x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n})^{1/(p_1+\cdots+p_n)}\leqslant\frac{p_1x_1+\cdots+p_nx_n}{p_1+\cdots+p_n}.$$

(b) 证明：当p_1、p_2、$\cdots$、p_n是正有理数时，(a)中的结果仍然成立。

7.2.12. 利用算术平均一几何平均不等式解下列各题：

(a) 制作一个底面和侧面都是矩形的上方开口槽．它的宽为4米、体积为36立方米．若建筑此槽底面每平方米须10元，而侧面每平方米须5元，问怎样建筑此槽花钱最少？

(b) 一农场主有一片紧靠一条直的河流的草地，为了放牧，他要建一道矩形栅栏．若沿河的一面不设置栅栏，他已有建1000米栅栏的材料．问怎样设置栅栏，能使所围的面积最大？（提示：等价于面积的二倍最大.）

(c) 一农场主有建1000米栅栏的材料，他要建一个矩形圈，并在中间用一道栅栏把它划分为两个较小的矩形块，问

怎样选择圈的尺寸，使其总面积最大.

(*d*) 证明：在周长一定的矩形中，面积最大的是正方形；而在面积一定的矩形中，周长最小的是正方形.

(*e*) 证明：在周长一定的三角形中，面积最大的是等边三角形；而在面积一定的三角形中，周长最小的是等边三角形.（提示：三角形的面积和它的周长通过公式$A=[s(s-a)(s-b)(s-c)]^{1/2}$联系起来，这里$a$、$b$、$c$是三角形的三边长，$s=p/2$，$p$是它的周长.）

补充例题

7.6节的引言，7.3.1,8.1.4

7.3 柯西—许瓦兹不等式

设$a_i>0$，$b_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$. Cauchy—Schwarz 不等式是指

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}.$$

当且仅当$a_1/b_1=a_2/b_2=\cdots=a_n/b_n$时等号成立.

用数学归纳法可以证明它（参看7.7.13）. 然而考虑二次多项式$P(x)=\sum_{i=1}^{n}(a_ix-b_i)^2$却是一个较容易的途径. 显然，对所有$x$，$P_1(x)\geqslant 0$，且$P(x)=0$只在条件：$a_1/b_1=a_2/b_2=\cdots=a_n/b_n$及$x=a_ib_i$下成立. 因

$$\begin{aligned}P(x)&=\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^2x^2-2a_ib_ix+b_i^2\right)\\&=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)x^2-2\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)x+\sum_{i=1}^{n}b_i^2\end{aligned}$$

且$P(x)\geqslant 0$，P的判别式不能为正，且它只在$P(x)=0$时为零。于是

$$\left(-2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2-4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)\leqslant 0$$

或等价地

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}.$$

当且仅当$a_1/b_1=\cdots=a_n/b_n$时等号成立。

在这个不等式中，a_ib_i为正的要求是多余的，这是因为对一切a_ib_i，有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_i|\,|b_i|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}.$$

7.3.1. 设a、b、$c>0$，且$a\cos^2\theta+b\sin^2\theta<c$，证明

$$\sqrt{a}\cos^2\theta+\sqrt{b}\sin^2\theta<\sqrt{c}.$$

证 由Cauchy—Schwarz不等式

$$\begin{aligned}&\sqrt{a}\cos^2\theta+\sqrt{b}\sin^2\theta\\&\leqslant[(\sqrt{a}\cos\theta)^2+(\sqrt{b}\sin\theta)^2]^{1/2}[\cos^2\theta\\&+\sin^2\theta]^{1/2}\\&=(a\cos^2\theta+b\sin^2\theta)^{1/2}<\sqrt{c}.\end{aligned}$$

本题也可以用算术平均—几何平均不等式漂亮地证明：

$$\begin{aligned}&(\sqrt{a}\cos^2\theta+\sqrt{b}\sin^2\theta)^2=a\cos^4\theta\\&+2\sqrt{a}\sqrt{b}\cos^2\theta\sin^2\theta+b\sin^4\theta\\&\leqslant a\cos^4\theta+(a+b)\cos^2\theta\sin^2\theta+b\sin^4\theta\\&=(a\cos^2\theta+b\sin^2\theta)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=c.\end{aligned}$$

本题的另一个更富有几何味道的证明，将在7.4.19中给出。

7.3.2. 设P是$\triangle ABC$内一点，r_1、r_2、r_3分别表示P到三

边a_1、a_2、a_3的距离。R表示$\triangle ABC$外接圆半径， 证明

$$\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2R}}(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2)^{1/2}.$$

当且仅当ABC是等边三角形，且P是内心时等号成立

证 由Cauchy-Schwarz不等式

$$\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}=\sqrt{a_1r_1}\sqrt{1/a_1}+\sqrt{a_2r_2}\sqrt{1/a_2}+\sqrt{a_3r_3}\sqrt{1/a_3}$$

$$\leqslant(a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3)^{1/2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)^{1/2},$$

当且仅当

$$\frac{\sqrt{a_1r_1}}{\sqrt{1/a_1}}=\frac{\sqrt{a_2r_2}}{\sqrt{1/a_2}}=\frac{\sqrt{a_3r_3}}{\sqrt{1/a_3}}$$

时等号成立.或等价地，当且仅当

$$a_1{}^2r_1=a_2{}^2r_2=a_3{}^2r_3$$

时等号成立。

在前面的不等式内，我们注意到$a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3=2A$，这里A是三角形的面积。我们还知道三角形面积依赖于外接圆半径R：$A=a_1a_2a_3/4R$（参看8.1.12）.因此，$a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3=a_1a_2a_3/2R$，从而我们有

$$\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}\leqslant\left(\frac{a_1a_2a_3}{2R}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)^{1/2}$$

$$=\left(\frac{a_1a_2a_3}{2R}\right)^{1/2}\left(\frac{a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2}{a_1a_2a_3}\right)^{1/2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2R}}(a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2)^{1/2}.$$

现在，再由Canchy—Schwaz不等式，有

$$a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2\leqslant(a_2{}^2+a_3{}^2+a_1{}^2)^{1/2}(a_3^2+a_1{}^2$$

$$+a_2^2)^{1/2}$$

$$=a_1^2+a_2^2+a_3^2,$$

当且仅当$a_2/a_3=a_3/a_1=a_1/a_2=(a_1+a_2+a_3)/(a_3+a_1+a_2)=1$，

（参看7.1.12），或者等价地，当且仅当

$$a_1=a_2=a_3$$

时等号成立。

这样，我们有

$$\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2R}}(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{1/2},$$

当且仅当$a_1^2r_1=a_2^2r_2=a_3^2r_3$且$a_1=a_2=a_3$，也就是当且仅当$a_1=a_2=a_3$且$r_1=r_2=r_3$时等号成立。证毕。

7.3.3. 设a、b、c、d、e是实数，使得

$$a+b+c+d+e=8$$

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16.$$

求e的最大值

解 给定的方程可改写为

$$8-e=a+b+c+d$$

$$16-e^2=a^2+b^2+c^2+d^2.$$

我们希望找到一个只含e的不等式，为此Cauchy—Schwarz提供了一个途径，因为

$$(a+b+c+d)$$

$$\leqslant(1+1+1+1)^{1/2}(a^2+b^2+c^2+d^2)^{1/2}.$$

把上面两个等式代入此不等式，再两边平方，有

$$(8-e)^2\leqslant 4(16-e^2),$$

$$64-16e+e^2\leqslant 64-4e^2,$$

$$5e^2-16e\leqslant 0.$$
$$e(5e-16)\leqslant 0.$$
由此得 $0\leqslant e\leqslant 16/5$，且当$a=b=c=d=6/5$* 时 e达到其上界16/5。

7.3.4. 设a_1，a_2，…，$a_n(n>1)$是实数，且
$$A+\sum_{i=1}^{n}a_i^2<\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2.$$
证明$A<2a_ia_j$，$1\leqslant i<j\leqslant n$。

证 由Cauchy—Schwarz不等式
$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2=\Big[(a_1+a_2)+a_3+\cdots+a_n\Big]^2$$
$$\leqslant(1+\cdots+1)\left[(a_1+a_2)^2+a_3^2+\cdots+a_n^2\right]$$
$$=(n-1)\left[\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2a_1a_2\right].$$
再由已给的不等式，得
$$A<-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)+\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2$$
$$\leqslant-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)+\frac{1}{n-1}\left\{(n-1)\left[\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2a_1a_2\right]\right\}$$
$$=2a_1a_2.$$
同理，对于$1\leqslant i<j\leqslant n$，有$A<2a_ia_j$。

7.3.5. 设$x_i>0$，$i=1$，2，…n.证明对任何非负整数k，有
$$\frac{x_1^k+\cdots+x_n^k}{n}\leqslant\frac{x_1^{k+1}+\cdots+x_n^{k+1}}{x_1+\cdots+x_n}.$$

证 不失一般性，可设$x_1+\cdots+x_n=1$.否则的话，我们只要用$x_i=x_i/(x_1+\cdots+x_n)$代替x_i即可。

---

*）译者注：原书似误为$a=b=c=d=16/5$。

当$k=0$时不等式成立。设对于所有小于k的非负整数不等式成立。由Cauchy—Schwarz不等式

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k}{n}=\sum_{i=1}^{n}x_i^{(k+1)/2}\frac{x_i^{(k-1)/2}}{n}$$
$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{k+1}\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{k-1}}{n^2}\right)^{1/2}.$$

由归纳假设，$\sum_{i=1}^{n}x_i^{k-1}/n\leqslant\sum_{i=1}^{n}x_i^k$，所以，延续末尾的不等式，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{k+1}\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{k-1}}{n^2}\right)$$
$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{k+1}\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k}{n}\right)^{1/2}.$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k}{n}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{k+1}\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k}{n}\right)^{1/2},$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k}{n}\right)^{1/2}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{k+1}\right)^{1/2},$$
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k}{n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}x_i^{k+1}$$

由归纳法，证明完毕。

问题

7.3.6. 设$a_1,a_2,\cdots,a_n$是实数，使得$a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，利用Cauchy—Schwarz不等式，证明$a_1^2+\cdots+a_n^2\geqslant 1/n$。

7.3.7. 用Cauchy—Schwarz不等式，证明下列各题：

(a) 若$p_1,\cdots,p_n$；$x_1,\cdots,x_n$是$2n$个正数，则

$$(p_1x_1+\cdots+p_nx_n)^2$$
$$\leqslant(p_1+\cdots+p_n)(p_1x_1^2+\cdots+p_nx_n^2).$$

(b) 若a、b、c是正数，则

$$(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)\geqslant 9a^2b^2c^2。$$

(c) 若x_k，y_k，$k=1, 2, \cdots, n$是正数，则

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} k x_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2/k\right)^{1/2}.$$

(d) 若a_k，b_k，c_k，$k=1, 2, \cdots, n$是正数，则

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k\right)^4 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^4\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^4\right)\left(\sum_{k=1}^{n} c_k^4\right)^2.$$

(e) 若$C_k=\binom{n}{k}$，$n>2$，$1\leqslant k\leqslant n$，则

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{C_k}\leqslant\sqrt{n(2^n-1)}.$$

7.3.8. 对正整数n，设$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$和$(b_1, b_2, \cdots, b_n)$是$(1, 2, \cdots, n)$的两个（不要求相异）排列，求$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$的下界和上界。

7.3.9. 设a、b、c、d是正数，使得$c^2+d^2=(a^2+b^2)^3$，证明

$$\frac{a^3}{c}+\frac{b^3}{d}\geqslant 1,$$

等号当且仅当$ad=bc$时成立。（提示：证明

$[(a^3/c)+(b^3/d)](ac+bd)\geqslant(a^2+b^2)^2\geqslant(ac+bd)$.）

7.3.10. 设P是$\triangle ABC$内一点，r_1、r_2、r_3分别表示P到三边a_1、a_2、a_3的距离。利用Cauchy—Schwarz不等式，证明当P是$\triangle ABC$的内心时，

$$\frac{a_1}{r_1}+\frac{a_2}{r_2}+\frac{a_3}{r_3}$$

取最小值。（提示：$a_i=\sqrt{a_ir_i}\sqrt{a_i/r_i}$.）

补充例题

7.6.14.

7.4 利用函数证明不等式

这节内我们将举一些例题，说明怎样用解析的，特别是微分学的方法，有效地解决一些不等式的问题。

7.4.1. 已给正数p、q及r，使得$2p=q+r$，$q\neq r$，证明

$$\frac{p^{q+r}}{q^q r^r}<1.$$

证 若q及r是正整数，考虑q个数$1/q$，…，$1/q$及r个数$1/r$，…，$1/r$。由算术平均一几何平均不等式，有

$$\left(\frac{1}{q^q}\cdot\frac{1}{r^r}\right)^{1/q+r}<\frac{q(1/q)+r(1/r)}{q+r}=\frac{1}{p}.$$

它等价于要证的不等式。

显然，当q或r只要有一个不是整数，上面的方法就要失败，我们怎样做下去呢？一个想法是先将不等式变形如下：

$$p^{q+r}<q^q r^r$$

$$\left(\frac{q+r}{2}\right)^{q+r}<q^q r^r,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{q+r}<\left(\frac{q}{q+r}\right)^q\left(\frac{r}{q+r}\right)^r,$$

$$\frac{1}{2}<\left(\frac{q}{q+r}\right)^{q/(q+r)}\left(\frac{r}{q+r}\right)^{r/q+r}.$$

令$x=q/(q+r)$及$y=r/(q+r)$.显然$x+y=1$且$0<x$，$y<1$.于是,问题等价证明

$$F(x)\equiv x^x(1-x)^{1-x}>\frac{1}{2},\quad 0<x<1,$$

$$x\neq\frac{1}{2}$$

由于引进了函数，我们就有可能利用解析的方法。其想法就是寻求$F(x)$在(0，1)内的最小值.为了求导方便，我

们考虑函数$G(x)=\log F(x)$.为求得驻点，先求导：

$$G'(x)=\frac{d}{dx}[x\log x+(1-x)\log(1-x)]$$
$$=(\log x+1)-1-\log(1-x)$$
$$=\log\frac{x}{1-x}.$$

不难看出当且仅当$x=1/2$时$G'(x)=0$.而且在区间(0，1/2)内$G'(x)<0$；在区间(1/2，1)内$G'(x)>0$.所以，$G(x)$在$x=1/2$取得它在区间(0，1)内的最小值.于是，$F(x)$在(0，1)内的最小值是$F(1/2)=(\frac{1}{2})^{1/2}(\frac{1}{2})^{1/2}=\frac{1}{2}$.因而,对所有在(0，1)内的$x$，$x\neq1/2$，有$F(x)>1/2$.证毕.

7.4.2. 设p及q是正数，使得$p+q=1$.证明对所有x，有

$$pe^{x/p}+qe^{-x/q}\leqslant e^{x^2/8p^2q^2}.$$

证 考虑函数

$$F(x)=\frac{pe^{x/p}+qe^{-x/q}}{e^{x^2/8p^2q^2}}$$

我们的问题是要证明对任意x，$F(x)\leqslant1$.由于问题的对称性，只要证明当$x\geqslant0$时，$F(x)\leqslant1$就足够了.

注意到$F(0)=1$，由中值定理的推论(iii)(参看前面6.2.2的讨论),只要证明当$x\geqslant0$时,$F'(x)\leqslant0$就可以了.为了计算简单，考虑函数$G(x)=\log F(x)$.由通常的微分法并作些代数简化，得

$$G'(x)=\frac{F'(x)}{F(x)}=\frac{e^{x/p}-e^{-x/q}}{pe^{x/p}+qe^{-x/q}}-\frac{x^2}{4p^2q^2}$$
$$=\frac{e^{x/pq}-1}{e^{x/pq}+q}-\frac{x^2}{4p^2q^2}.$$

因为对任何$x\geqslant 0$，$F(x)>0$，故当且仅当$G'(x)<0$时$F'(x)<0$。但由前面$G'(x)$的表达式不易确定是否有$G'(x)\leqslant 0$，因此，我们将通过另外的途径来分析。

$$G''(x)=-\frac{(pe^{x/pq}-q)^2}{4p^2q^2(pe^{x/pq}+q)^2}.$$

显然对任意x，有$G''(x)\leqslant 0$。它同$G'(0)=0$一起推出当$x\geqslant 0$时，$G'(x)\leqslant 0$。即对任意x，有$F'(x)\leqslant 0$。因而当$x\geqslant 0$时，$F(x)\leqslant 1$。证毕。

前面的问题中所用的方法是常用的。上面方法扼要重述如下：为了证明不等式

$$f(x)\geqslant g(x),\quad x\geqslant a.$$

它等价于证明下面两个不等式之一：

$$Q(x)\equiv\frac{f(x)}{g(x)}\geqslant 1,\quad x\geqslant a;$$

或

$$D(x)=f(x)-g(x)\geqslant 0,\quad x\geqslant a.$$

它们各自可证：先证不等式对$x=a$成立，然后证对一切$x\geqslant a$，$Q'(x)\geqslant 0$（或相应地，$D'(x)\geqslant 0$）。

在前面的例题里，如果改考虑函数

$$D(x)=e^{x^2/8p^2q^2}-pe^{x/p}-qe^{-x/q}$$

分析方法将无效：虽然$D(0)=0$，但不满足$D'(x)>0$（例如，当$p=1/3$，$q=2/3$，$x=1/2$时）。

7.4.3. 证明：对所有实数a及b有，

$$|a+b|^p\leqslant|a|^p+|b|^p\qquad 0\leqslant p\leqslant 1.$$

证 这个不等式对许多特殊情形是平凡的。例如，若$a=0$或a及b有相反的符号时，这个结果成立。又如$p=0$或$p=1$时亦如此。因此，只需就a与b为正且$0<p<1$时证明

这样的a、b及p，令$x=b/a$.于是，只要证明

$$(1+x)^p\leqslant 1+x^p \qquad x>0,\ 0<p<1$$

问题就解决了。为此，令$D(x)=1+x^p-(1+x)^p$，我们有$D(0)=0$及$D'(x)=px^{p-1}-p(1+x)^{p-1}>0$.于是由前面的讨论，问题证完（注意若$p>1$，这个不等式变向。）.

例4 设在$[0,1]$上f有连续导数，满足$0<f'(t)\leqslant 1$，又设$f(0)=0$。证明

$$\left[\int_0^1 f(t)dt\right]^2\geqslant\int_0^1 [f(t)]^3 dt.$$

证 如前面的例题那样利用微分学的方法，是不知如何下手的。现在的想法是引入一个变量并证明一个更为一般的结果。对于$0\leqslant x\leqslant 1$，令

$$F(x)=\left[\int_0^x f(t)dt\right]^2-\int_0^x [f(t)]^3 dt.$$

于是$F(0)=0$，且

$$F'(x)=2\left[\int_0^x f(t)dt\right]f(x)-\left[f(x)\right]^3$$
$$=f(x)\left\{2\int_0^x f(t)dt-[f(x)]^2\right\}.$$

我们已知当$0<x<1$时$f(x)\geqslant 0$（因为有$f(0)=0$且$f'(0)>0$）；但现在不能确定上式右端第二个因子的符号（为了F'是非负的）.所以，令

$$G(x)=2\int_0^x f(t)dt-[f(x)]^2,\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

于是，$G(0)=0$，且

$$G'(x)=2f(x)-2f(x)f'(x)$$
$$=2f(x)[1-f'(x)]\geqslant 0.$$

（最后一个不等式是因为$f(x)\geqslant 0$，且假设$1-f'(x)\geqslant 0$.）

从以上讨论知，对所有x，$0\leqslant x\leqslant 1$，$F(x)\geqslant 0$，特别地$F(1)\geqslant 0$.证毕.

7.4.5. 设x是正数，证明$\log[1+(1/x)]>1/(1+x)$.

证 令$f(x)=\log[1+(1/x)]-1/(1+x)$

$=\log(1+x)-\log x-1/(1+x)$.于是

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$=\frac{x(1+x)-(1+x)^2+x}{x(1+x)^2}$$

$$=\frac{-1}{x(1+x)^2}<0,\ x>0.$$

而且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$. 这就得到对$x>0$，有$f(x)>0$.

7.4.6. 求所有n，使满足

$$3^n+4^n+\cdots+(n+2)^n=(n+3)^n.$$

证 直接计算可以证明当$n=2$及$n=3$时方程成立，同样的方法可以断定当$n=4$及$n=5$时方程不成立。由上所述，我们猜想解题的关键是涉及到某种方式的同余算式，然而这些尝试都没有成效，现找别的途径，我们将证明当$n\geqslant 6$时，有

$$3^n+4^n+\cdots+(n+2)^n<(n+3)^n.$$

因而只有$n=2$及$n=3$能满足方程。

我们要证的不等式可改写为下面形式：

$$\left(\frac{3}{n+3}\right)^n+\left(\frac{4}{n+3}\right)^n+\cdots+\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n<1,$$

$$\left(1-\frac{n}{n+3}\right)^n+\left(1-\frac{n-1}{n+3}\right)^n+\cdots$$

$$+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n<1.$$

或者为了方便，把后一个式子倒写

$$\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^n+\left(1-\frac{2}{n+3}\right)^n+\cdots$$

$$+\left(1-\frac{n}{n+3}\right)^n<1.$$

为了证明这个不等式，只要证明

$$\left(1-\frac{k}{n+3}\right)^n<\left(\frac{1}{2}\right)^k,\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

就可以了。因为若上式成立，则

$$\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^n+\left(1-\frac{2}{n+3}\right)^n+\cdots$$

$$+\left(1-\frac{n}{n+3}\right)^n$$

$$<\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n<1.$$

余下要证

$$\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^n<\left(\frac{1}{2}\right)^k,\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

由Brnoulli's不等式（一个很有用的不等式，参看7.4.10）

$$\left(1-\frac{k}{n+3}\right)^k\geqslant 1-\frac{k}{n+3}.$$

因而

$$\left(1-\frac{k}{n+3}\right)^n\leqslant\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^{kn}$$

$$=\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\right]^k.$$

于是，最后一步要证

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\leqslant\frac{1}{2},\ n\geqslant 2\ .$$

为此，考虑函数

$$F(x)=\left(1-\frac{1}{x+3}\right)^x$$

而证明对任意$x\geqslant 6$，$F'(x)<0$及$F(6)<1/2$则很简单。证毕。

7.4.7. 证明：当$0\leqslant a<b<\frac{\pi}{2}$时，

$$\frac{b-a}{\cos^2 a}<\operatorname{tg} b-\operatorname{tg} a<\frac{b-a}{\cos^2 b}\ .$$

证 考虑在[0，1]上的函数$f(x)=\operatorname{tg} x$，依中值定理存在$(a,\ b)$内的一点c，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\ .$$

这意味着对某个在$(a,\ b)$内的c，有

$$\frac{\operatorname{tg} b-\operatorname{tg} a}{b-a}=\sec^2 c.$$

又当$0\leqslant a<b\leqslant\pi/2$时，$\sec^2 a<\sec^2 c<\sec^2 b$，由此得要证的不等式。

许多不等式可以通过考虑一个适当的凸(或凹)函数而建立。这个想法是基于6.6.3的结果：若$f:R\to R$且$f''(x)\geqslant 0$，则

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{2},$$

而若$f''(x)\leqslant 0$，则

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\geqslant\frac{f(x)+f(y)}{2}\ .$$

例如，因为$f(x)=x^2$是凸函数，对任意实数x及y，有

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}.$$

又如，因为$f(x)=\sin x$是在$(0,\pi)$内的凹函数，若$0<x$，$y<\pi$则，

$$\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\geqslant\frac{\sin x+\sin y}{2},$$

7.4.8．设a及b是正数，且$a+b=1$，证明

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geqslant\frac{25}{2}.$$

证 由公式：

$$\frac{x^2+y^2}{2}\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

取$x=a+(1/a)$及$y=b+(1/b)$，那末

$$\frac{1}{2}\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\right]$$

$$\geqslant\left\{\frac{1}{2}\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)\right]\right\}^2$$

$$=\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]^2$$

由Cauchy-Schwarz不等式，$[(1/a)+(1/b)](a+b)\geqslant(1+1)^2=4$，因而

$$\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]^2\geqslant\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{4}{a+b}\right)\right]^2$$

$$=\left(\frac{1+4}{2}\right)^2=\frac{25}{4}.$$

把前面两个不等式放在一起成为一个不等式，并在每边乘以2，即得要证结果。

7.4.9．设$0<x_i<\pi$，$i=1,2,\cdots,n$，记$x=(x_1+x_2+\cdots+x_n)/n$。

证明

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\sin x_i}{x_i}\right)\leqslant\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n.$$

证 这个问题等价于证

$$\sum_{i=1}^{n}\log\frac{\sin x_i}{x_i}\leqslant n\log\frac{\sin x}{x}.$$

考虑函数

$$f(t)=\log\frac{\sin t}{t}.$$

很容易看出$f(t)$在区间$(0,\pi)$内是凹的($f''(t)<0$)。因而

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

完全类似于7.1.6的方法，可以证明

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\geqslant\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

把f直接代入这个不等式内，即得

$$\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)\geqslant\frac{1}{n}\left(\log\frac{\sin x_1}{x_1}+\cdots+\log\frac{\sin x_n}{x_n}\right).$$

问题

7.4.10. (Bernoulli's不等式)。证明：对于$0<a<1$，有

$$(1+x)^a\leqslant 1+ax,\quad x\geqslant -1.$$

当$a<0$或$a>1$时，这个不等式将怎样？

7.4.11. 证明

$$\frac{x}{1+x}<\log(1+x)<\frac{x(x+2)}{2(x+1)},\quad x>0.$$

7.4.12. (Huygen's不等式)，证明

$$2\sin x+\mathrm{tg}\,x\geqslant 3x,\quad 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

7.4.13. 对任意$x>0$，有$(2+\cos x)x>3\sin x$.

(a) 利用函数$F(x)=x-[(3\sin x)/(2+\cos x)]$，证明此不等式。

(b) 利用函数$F(x)=(2+\cos x)x-3\sin x$，证明此不等式。

7.4.14. 证明

$$0\leqslant\frac{x\log x}{x^2-1}\leqslant\frac{1}{2},\quad x>0,\ x\neq 1\ .$$

7.4.15. 证明

$$\log\left(1-\frac{1}{x+3}\right)+\frac{x}{(x+2)(x+3)}<0,\quad x>-2\ .$$

7.4.16. 证明

$$\left(\frac{a+1}{b+1}\right)^{b+1}>\left(\frac{a}{b}\right)^{b}\ ,\quad a、b>0,\ ab\neq b$$

7.4.17. 证明

$$\frac{\sin a}{\sin b}<\frac{a}{b}<\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b},\quad 0<b<a<\frac{\pi}{2}\ .$$

7.4.18. 利用本节的方法，证明对任意正整数n，有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\ .$$

(即证函数$f(x)=[1+(1/x)]^x$是增函数。)

7.4.19. 利用$f(x)=\sqrt{x}$的凹性，证明：当a、b、c是正数，且$a\cos^2\theta+b\sin^2\theta<c$时，有$\sqrt{a}\cos^2\theta+\sqrt{b}\sin^2\theta<\sqrt{c}$.
(提示：作函数$y=\sqrt{x}$的草图。考察点$a\cos^2\theta+b\sin^2\theta$在函数的定义域内的位置，及点$\sqrt{a}\cos^2\theta+\sqrt{b}\sin^2\theta$在值域内的位置)

7.4.20. 设$x_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$.考虑数$f(t)=\log t$；然

后用类似于7.4.9的方法，证明

$$(x_1x_2\cdots x_n)^{1/n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},$$

当且仅当所有x_i相等时等号成立。

7.4.21.

(a) 设$x_i>0$, $i=1, 2, \cdots, n$.利用7.4.20的结果证明

$$\frac{1}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}\leqslant(x_1x_2\cdots x_n)^{1/n}$$

(b) 对满足$(1/a)+(1/b)+(1/c)=1$的正数a、b、c，证明$(a-1)(b-1)(c-1)\geqslant 8$.

7.4.22. 若a、b、c为正数，且$a+b+c=1$,证明

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2\geqslant\frac{100}{3}.$$

7.4.23. 若a、b、c是一三角形的三边长，证明

$$\frac{3}{2}\leqslant\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\leqslant 2.$$

补充例题

6.4.6, 6.4.7 .

7.5 用级数证明不等式

证明形如

$$f(x)\leqslant g(x),\ 0<x<c$$

的不等式的另一个方法（参看前面7.4.3的讨论），是把f和g展开成幂级数，即对区间$(-d, d)$内的任意x，有

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$及$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$。若对所有$n$，$a_n \leqslant b_n$，则显然对区间$(0, d)$内的任意$x$，$f(x) \leqslant g(x)$。

7.5.1. 对怎样的实数c，$(e^x+e^{-x})/2 \leqslant e^{cx^2}$能对任意$x$成立。

解 若对任意x不等式成立，那么

$$0 \leqslant e^{cx^2}-\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n x^{2n}}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(c^n-\frac{1}{2^n}\right)\frac{x^{2n}}{n!}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(c^n-\frac{1}{2^n}\right)\frac{x^{2n}}{n!}$$

两边除以x^2后，令$x=0$，即得$c \geqslant 1/2$。

另一方面，若$c \geqslant 1/2$，则

$$\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}=e^{x^2/2}$$

$$\leqslant e^{cx^2}.$$

由此知，当且仅当$c \geqslant 1/2$时不等式对任意x成立。

应用于不等式问题的另一个重要级数是交错级数。悉知：只要当正数列$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$单调下降趋于零（即$a_{n+1}<a_n$，且当$n \to \infty$时$a_n \to 0$），级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛。更为重要的是：交错级数的和位于两个相邻的部分和之间（若S表示交错级数的和，S_n表示第n个部分和，那末

$\{S_{2n+1}\}$是增加的序列，$\{S_{2n}\}$是减少的序列，且对一切n，$S_{2n+1}<S<S_{2n}$)

7.5.2. 证明：对一切x，有

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}>0.$$

证 当$x\geqslant0$时结果显然成立。当$x<0$时，左边的级数是一个交错级数，由于$2n$是偶数（那么左边的有限和的最后一项是正的），由前所述，有

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$$>1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=e^x>0.$$

7.5.2. 证明$(2+\cos x)>3\sin x$，$x>0$。

证 这与7.4.13是同一个题，这里我们用级数的方法解答。

当$x>0$时，要证的不等式的左边

$$(2+\cos x)x>(2+1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!})x,$$

而其右边

$$3\sin x<3(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}).$$

这样，只要能证

$$3x-\frac{x^3}{2!}+\frac{x^5}{4!}-\frac{x^7}{6!}>3(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!})$$

就足够了。

当$x>0$时，这个不等式成立的充要条件是

$$\frac{x^5}{4!}-\frac{x^7}{6!}>\frac{3x^5}{5!}.$$

$$\left(\frac{1}{4!}-\frac{3}{5!}\right)>\frac{1}{6!}x^2 .$$

$$x^2<6!\left(\frac{2}{5!}\right)=12 .$$

于是，若$0<x<\sqrt{12}$，要证的不等式成立。又当$x\geqslant\sqrt{2}$时，要证的不等式显然成立。所以，对一切$x>0$不等式成立。证毕。

在前面的证明里，无穷级数的项数是如何选出，能不能多些或少些？为了保持不等式在右边的方向，我们必需低估$\cos x$而高估$\sin x$，因而，要限定级数近似值的最后一项的符号。如果粗糙地用$1-(x^2/2)$代替$\cos x$、用x代替$\sin x$来估计。就归结为讨论

$$\left(3-\frac{x^2}{2}\right)x>3x ,$$

它等价于

$$-\frac{x^3}{2}>0$$

而这对任何正的x显然都不成立。

增加级数的项数，最接近的就是用$1-(x^2/2)+(x^4/4!)-(x^6/6!)$代替$\cos x$，用$x-(x^3/3!)+(x^5/5!)$代替$\sin x$。这就导致前面的解法。

7.5.4. 证明

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\geqslant\cos x \qquad 0<x\leqslant\frac{\pi}{2} .$$

证 因$x>0$，

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3>\left(1-\frac{x^2}{3!}\right)^3=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{216} .$$

且 $$\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!} .$$

因此，只要证明

$$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{216}>1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}$$

就可以了，或者等价地，证

$$\frac{1}{4!}+\left(-\frac{1}{216}+\frac{1}{720}\right)x^2-\frac{1}{8!}x^4>0 .$$

上式右边的函数在（0，∞）内是减少的，因而，当$0<x<2$时，有

$$\frac{1}{4!}+(-\frac{1}{216}+\frac{1}{720})x^2-\frac{1}{8!}x^4>\frac{1}{4!}+(-\frac{1}{216})2^2$$

$$-\frac{1}{8!}(2)^4>\frac{1}{4!}-\frac{4}{5!}+\frac{1}{6!}=\frac{30-24+1}{6!}>0.$$

证毕。

问题

7.5.5. 利用无穷级数证明下列不等式：

(a) $e^x>1+(1+x)\log(1+x)$, $x>0$.

(b) $(1+x)/(1-x)>e^{2x}$, $0<x<1$.

(c) $\arcsin x<x/(1-x^2)$, $0<x<1$.

7.5.6. 证明$\sqrt[3]{1+x}-1-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{9}<\frac{5}{8!}x^3$，$x>0$.

7.5.7. 证明

$$x<\frac{1}{3}(2\sin x+\operatorname{tg}x),\quad x>0$$

（提示：证明等价的不等式$\sin x(2\cos x+1)>3\cos x, x>0$.）

7.5.8. 证明$\sin^2 x<\sin x^2$，$0<x<\sqrt{\pi/2}$.

7.6 两边夹原理

在本节内，将利用不等式估计极限。其想法表现为下面的结果(它有很多变形)：

两边夹原理．设 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$ 都是无穷序列，对所有充分大的 n，满足 $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$．若 $\{a_n\}$ 及 $\{c_n\}$ 收敛于同一个数 L，则 b_n 也收敛于 L．

这个原理(显然，对于序列 $\{b_n\}$ 是别无选择的：它必需"夹"在 $\{a_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 之间，且后两个数列都收敛于同一个极限．)看起来似乎是无关紧要的，但它在解题中的用处却出人意外。它适合于下面的情形。如果我们要计算序列 $\{b_n\}$ 的极限，当 b_n 的表达式很复杂，不能直接计算时，利用两边夹原理，用两个比较简单的数列 $\{a_n\}$ 及 $\{c_n\}$ 把 $\{b_n\}$ "夹"起来。

例如，考虑数列 $\{n^{1/n}\}$，我们可以就L'Hôspital's法则计算其极限，这里，用下面的方式来讨论，由算术平均一几何平均不等式

$$1 \leqslant n^{1/n} = (\underbrace{1 \times 1 \times \cdots \times 1}_{n-2\text{个}} \times \sqrt{n} \times \sqrt{n})^{1/n}$$

$$\leqslant \frac{(n-2)+2\sqrt{n}}{n} = 1 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}\right)$$

现在，由两边夹原理($a_n = 1$及$c_n = 1 + 2[(1/\sqrt{n}) - (1/n)]$)，我们看到 $n^{1/n}$ 被迫收敛于 1。

7.6.1． 证明或否定所有正有理数集合能排列成一个无穷序列 $\{b_n\}$，使得 $\{b_n^{1/n}\}$ 收敛。

证　先如图7.2，把全体正有理数排成一个方形，通过这个方形的盘旋方向指出它们的顺序，这里略去后面那些没有化简的分数。于是，这个序列开始的一些项是：1，1/2，2，3，1/3，1/4，2/3，4，5，1/5，1/6，……。设b_n表示这个序列的第n项，我们将证明$\{b_n^{1/n}\}$收敛于1。

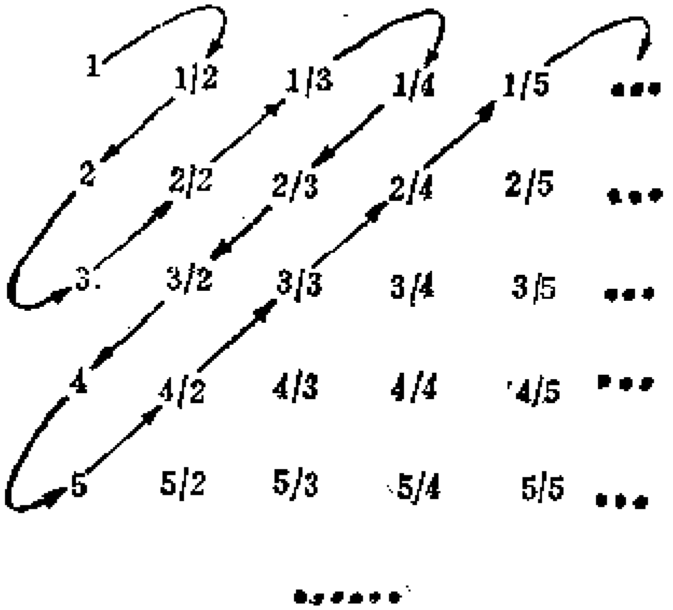


图 7.2

在图7.2中，显然，第n行的每个元素小于或等于n，而第n列的每个元素大于或等于$1/n$。若b_n出现在第i行及第j列，则$i\leqslant n$，$j\leqslant n$。所以，对任意n，$\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{j}\leqslant b_n\leqslant i\leqslant n$

从而

$$a_n=\frac{1}{n^{1/n}}=\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}\leqslant b_n^{1/n}\leqslant n^{1/n}=c_n\ .$$

现在，由两边夹原理，$\{b_n^{1/n}\}$收敛于1。

7.6.2. 设$f(x)$是定义在$-1<x<1$上的实值函数，$f'(0)$存在。又设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$是两个序列，满足条件：

$$-1<a_n<0<b_n<1,\quad \lim_{n\to\infty}a_n=0=\lim_{n\to\infty}b_n.$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=f'(0) .$$

证　商

$$\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}$$

在几何上是连接点$P_n(a_n, f(a_n))$及$Q_n(b_n,f(b_n))$的线段的斜率（图7.3）。

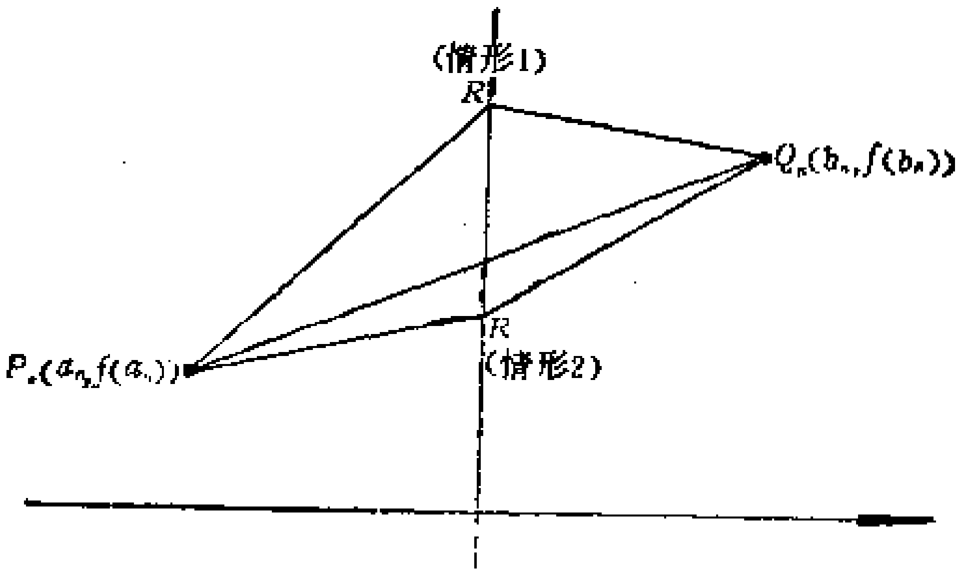


图 7.3

设R表示点$(0,f(0))$，线段P_nQ_n与y轴的交点是下面两种情形之一：大于或等于$f(0)$（情形 1 ）；小于$f(0)$（情形 2 ）。

在第一种情形，

RQ_n的斜率$\leqslant PQ_n$的斜率$\leqslant P_nR$的斜率，或等价的

$$\frac{f(b_n)-f(0)}{b_n-0}\leqslant\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}\leqslant\frac{f(a_n)-f(0)}{a_n-0}.$$

在第二种情形

P_nR的斜率$\leqslant P_nQ_n$的斜率$\leqslant RQ_n$的斜率，或等价地

$$\frac{f(a_n)-f(0)}{a_n-0}\leqslant\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}\leqslant\frac{f(b_n)-f(0)}{b_n-0}.$$

情形2的不等式恰好是情形1的不等式的方向改变，于是，我们定义两个新的数列$\{c_n\}$，$\{d_n\}$如下：

$c_n=b_n$，$d_n=a_n$。　　（情形1）

$c_n=a_n$，$d_n=b_n$。　　（情形2）

这样，对一切n，

$$\frac{f(c_n)-f(0)}{c_n-0}\leqslant\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}\leqslant\frac{f(d_n)-f(0)}{d_n-0}$$

因$f'(0)$存在，又$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0=\lim\limits_{n\to\infty}d_n$，故有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(c_n)-f(0)}{c_n-0}=f'(0)及\lim_{n\to\infty}\frac{f(d_n)-f(0)}{d_n-0}=0.$$

由两边夹原理即得要证结果。

另一个解法，也是建立在两边夹原理的基础上。这个解法用到这样一个事实：若a及b是实数，$a<b$则对任何两个和为1的正数r及s，有

$$a\leqslant ra+sb\leqslant b$$

（参看1.2.11）．在这个问题里，有

$$\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=\left[\frac{f(b_n)-f(0)}{b_n}\right]\left(\frac{b_n}{b_n-a_n}\right)+\left[\frac{f(a_n)-f(0)}{a_n}\right]\left(\frac{-a_n}{b_n-a_n}\right).$$

若令$r=b_n/(b_n-a_n)$及$s=-a_n/(b_n-a_n)$，则$r\geqslant0$，$s\geqslant0$且$r+s=1$．因而$[f(b_n)-f(a_n)]/(b_n-a_n)$位于$[f(b_n)-f(0)]/b_n$和$[f(a_n)-f(0)]/a_n$之间。因后两个商都收敛于$f'(0)$，由两边夹原理，$[f(b_n)-f(a_n)]/(b_n-a_n)$也收敛

于$f'(0)$。

7.6.3. 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+j^2}\ .$$

解 和式

$$\sum_{j=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+j^2}=\sum_{j=1}^{n^2}\left(\frac{1/n}{1+(j/n)^2}\right)$$

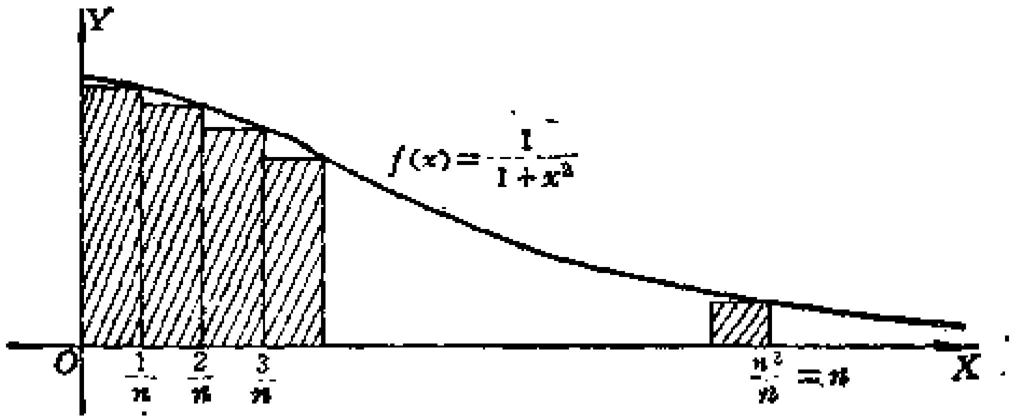


图 7.4

可以看作是函数$f(x)=1/(1+x^2)$在区间$[0, n]$内的Riemann和（图7.4），但是,由于上面的区间不是一个固定的区间，它还不是一个真正的Riemann和，这样，当$n\to\infty$时，我们不能获得定积分。但是，对每个n，我们有

$$\sum_{j=1}^{n^2}\left(\frac{n}{n^2+j^2}\right)\leqslant\int_0^{n^2}\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}n^2$$

为了获得这个和的下界,设k是一个固定的正整数,$[0, k]$是一个固定区间。于是，对任何大于k的n,

$$\sum_{j=1}^{kn}\frac{n}{n^2+j^2}=\sum_{j=1}^{kn}\frac{1/n}{1+(j/n)^2}$$

是函数$f(x)=1/(1+x^2)$在区间$[0, k]$上的一个 Riemann

和，且有

$$\sum_{j=1}^{kn}\frac{n}{n^2+j^2}<\sum_{j=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+j^2}.$$

把前面两个不等式放在一起，得

$$\sum_{j=1}^{kn}\frac{n}{n^2+j^2}<\sum_{j=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+j^2}<\operatorname{arctg}n^2$$

那么，由两边夹原理，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{kn}\frac{n}{n^2+j^2}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+j^2}\leqslant\lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg}n^2.$$

$$\int_0^k\frac{dx}{1+x^2}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+j^2}\leqslant\frac{\pi}{2}$$

但因k是任意正整数，我们必有

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{k\to\infty}\operatorname{arctg}k\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+j^2}\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

由此，要求的极限为1。

不等式在计算极限中的另一个应用是基于下述重要事实：

单调有界序列有极限。

也就是说，若$\{a_n\}$是一个实数列，对于充分大的n，有$a_{n+1}\geqslant a_n$（或对充分大的n，$a_{n+1}\leqslant a_n$），又设对某个常数K，$a_n\leqslant K$对所有n成立（或相应地$a_n\geqslant K$）。则序列$\{a_n\}$收敛。

例如，为证序列$(1+(1/n))^n$收敛，只要证明它单调(在这种情形是增加)且有界（上界为3，参看7.1.5）就足够了。

7.6.4. 设序列$\{a_n\}$，当$n\geqslant1$时，有

$$(2-a_n)a_{n+1}=1,$$

证明$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在且等于1.

证 首先我们证明，若序列收敛，则必收敛于1.当一个数列是用递归方式定义时，它的论证是规格化的。设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$,则在递归关系$(2-a_n)a_{n+1}=1$两边取极限，得$(2-L)L=1$，或等价地，$(L-1)^2=0$，由此得$L=1$.

为证这个序列收敛，我们将证它有界且“终于”成为单调（这个问题的另一个解法，参看1.1.11）。

设对某个a_n，$0<a_n<1$，那么

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2-a_n}-a_n=\frac{1-(2-a_n)a_n}{2-a_n}$$

$$=\frac{(1-a_n)^2}{2-a_n}>0.$$

且$a_{n+1}=1/(2-a_n)<1$.因而$a_n<a_{n+1}<a_{n+2}<\cdots\cdots<1$，即序列是单调有界的，从而它收敛。于是，只要证对某个n，$0<a_n<1$就足够了。分以下几种情形。

若$a_1<0$，那么$0<a_2=1/(2-a_1)<1$，由前面的讨论，问题已获解决.

若$a_1>2$，那么$a_2=1/(2-a_1)<0$，问题亦解决.

剩下考察$1<a_1\leqslant2$的情形，围绕下列特殊情形讨论（每一种情形都可由归纳法证明）.

首先，若a_1是形如$(n+1)/n$的数，递归关系不可能对所有n成立.这是因为若$a_1=(n+1)/n$，则（可以证明）$a_n=2$，因而a_{n+1}不可能确定.其次，若a_1属于区间

$$\left(\frac{n+1}{n},\ \frac{n}{n-1}\right),\ n>1$$

则(可以证明)a_{n+1}位于区间(0，1)内，依前所证，证毕。

这样，所有情形的(此时序列都是确定的)序列收敛

7.6.5. 设$f(x)$是一函数，$f(1)=1$且当$x\geqslant 1$，有

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+f^2(x)} .$$

证明 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在且不超过$1+(\pi/4)$。

证 由微积分基本定理

$$f(x)-f(1)=\int_1^x f'(x)dx .$$

因$f(1)=1$及$f'(x)>0$，$f(x)$是增加的，且对所有$x\geqslant 1$，$f(x)\geqslant 1$。所以

$$f(x)-f(1)=\int_1^x\frac{dx}{x^2+f^2(x)}\leqslant\int_1^x\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\operatorname{arctg}x\Big|_1^x=\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}1$$

$$<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4} .$$

于是，$f(x)$是增加的且有上界$1+(\pi/4)$，因而，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在，且不超过$1+(\pi/4)$

7.6.6. 考虑在十进制系统中，其数码没有9的所有自然数。证明由这些数的倒数所构成的级数收敛。

证 设S_m表示这个级数的第m个部分和。序列$\{S_m\}$是单调增加的，因而，为证收敛性，只要证此序列有界。

对于给定的部分和S_m，设n表示整数m的位数。位数为n且在十进制系统中没有数码9的整数一共是$8\times 9^{n-1}$个(第一个数码不能为零)。所以，它们的倒数和小于$8\times 9^{n-1}/10^{n-1}$，于是

$$S_n<8+8\times\left(\frac{9}{10}\right)+8\times\left(\frac{9}{10}\right)^2+\cdots\cdots+8\times\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$$

$$<8\left[1+\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\cdots\cdots\right]=80$$

证毕．

问题

7.6.7．证明以下不等式，并用两边夹原理求极限：

(a) $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+i}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$．

(b) $b<(a^n+b^n)^{1/n}<b\sqrt[n]{2}$，$0<a<b$

(c) $e^{1-\frac{1}{2n}}<(1+\frac{1}{n})^n<e^{1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}}$．

7.6.8．证明下列序列收敛，并求其极限：

(a) $\sqrt{1}$，$\sqrt{1+\sqrt{1}}$，$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$，$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}$，…．

(b) $\sqrt{2}$，$\sqrt{2+\sqrt{2}}$，$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$，$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$，……．

7.6.9．证明：由

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}-\log n$$

确定的序列收敛。

7.6.10．证明：由

$$a_{n+1}=\frac{6(1+a_n)}{7+a_n}$$

所确定的数列收敛，并求其极限。

7.6.11．设a_1，b_1是任意两个正数，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$由下面两式确定

$$a_n=\frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}},\qquad b_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}\text{．}$$

证明序列$\{a_n\}$及$\{b_n\}$收敛，且有相同的极限。

7.6.12. 设$S_1=\log a, S_n=\sum_{i=1}^{n-1}\log(a-S_i)$，证明

$$\lim_{n\to\infty}S_n=a-1 .$$

（提示：注意$S_{n+1}=S_n+\log(a-S_n)$）

7.6.13. 设多项式序列$Q_n(x)$由下面方式确定

$$Q_1(x)=1+x,\quad Q_2(x)=1+2x,$$

且对$m\geqslant 1$，有

$$Q_{2m+1}(x)=Q_{2m}(x)+(m+1)xQ_{2m-1}(x),$$

$$Q_{2m+2}(x)=Q_{2m+1}(x)+(m+1)xQ_{2m}(x) .$$

设x_n是方程$Q_n(x)=0$的最大实根，证明$\{x_n\}$是一个增加的序列，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。

7.6.14. 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛，证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n/n)$也收敛 .

7.6.15. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^2\times4^2\times6^2\times\cdots\times(2n)^2}{(1\times3)(3\times5)\cdots((2n-1)(2n+1))}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^2\times4^2\times6^2\times\cdots\times(2n)^2}{1^2\times3^2\times5^2\times\cdots\times(2n-1)^2}\left(\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{\pi}{2} .$$

（提示：当$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$时，$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}\theta d\theta\leqslant\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}\theta d\theta$

$\leqslant\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1}\theta d\theta$，把2.5.14的结果和两边夹原理一起应用）.

补充例题

6.1.5, 6.3.7, 6.4.4, 6.6.2, 6.8节, 6.9.4. 还参看6.1中“反复对分“的例题 .

第八章　几　何

本章将要讲述一些求解欧氏几何问题很通用的技巧。除Euclid的经典综合方法外，我们还将看到代数、三角、分析、向量代数及复数怎样成为几何研究中有用的工具．

8.1　古典平面几何

在本节内，我们要回顾古典平面几何所特有的思想和方法，即研究在运动（平移、旋转、反射）下保持不变的三角形、四边形及圆的性质．我们将涉及到建立在对许多基本概念理解上的综合几何，这些基本概念是：全等、相似、比例、共点、圆的弧及弦、圆周角等等．此外，我们想要引起对代数和三角方法的重视；注意它们在证明传统的欧氏平面几何结果的重要性．

8.1.1.　一内接于圆的凸八边形，它有四个相邻的边长为3，其余的四边长为2．求它的面积（给一形如$r+s\sqrt{t}$的答案，r，s及t都是正数）．

本题我们将给出许多解法，以说明解几何问题的方法的多样性．

解法一　如图8.1所示，记八边形的顶点为A、B、C、D、E、F、G、H．这里$AB=BC=GH=HA=3$，$CD=DE=EF=FG=2$．令O为圆的中心．

首先求$\triangle OAB$及$\triangle ODE$的面积，为此只要找出高OK及OJ就足够了．

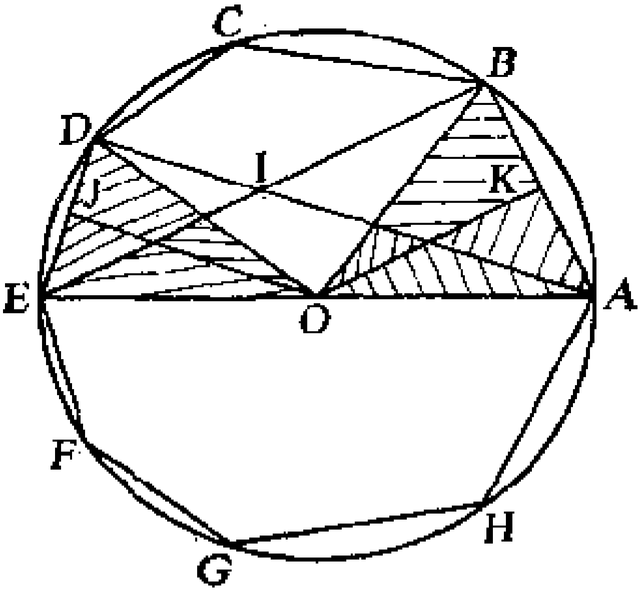


图8．1

注意到$OK=EB/2$，这是因为O是EA的中点及K是AB的中点．同样，$OJ=AD/2$．所以，只要求出DI、IA、EI及IB就可以了，这里I是AD和EB的交点。

易见$\triangle DBC\cong\triangle DBI$（$a$、$s$、$a$），从而$DI=2$，$IB=3$．此外，因$\triangle ADE$和$\triangle ABE$都内接于同一个半圆，$\angle ADE$及$\angle ABE$为直角．所以，$\triangle IBA$和$\triangle EDI$是等腰直角三角形．由此得$IA=3\sqrt{2}$，$EI=2\sqrt{2}$．

现在我们可以求出八边形的面积

$$\text{面积}=4\left[\frac{1}{2}\times 3\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\right)\right]+4\left[\frac{1}{2}\times 2\left(\frac{2+3\sqrt{2}}{2}\right)\right]=13+12\sqrt{2}.$$

解法二 基于辨别出已给八边形的面积和图8.2所示的，边长交替为2及3的八边形面积相等，或许也能求解．后一个八边形的面积可以按下面两种方式计算：从一个正方形减去四个直角三角形；或把一个正方形、四个矩形及四个直角三角形的面积相加．于是，对于右边的图形，我们有

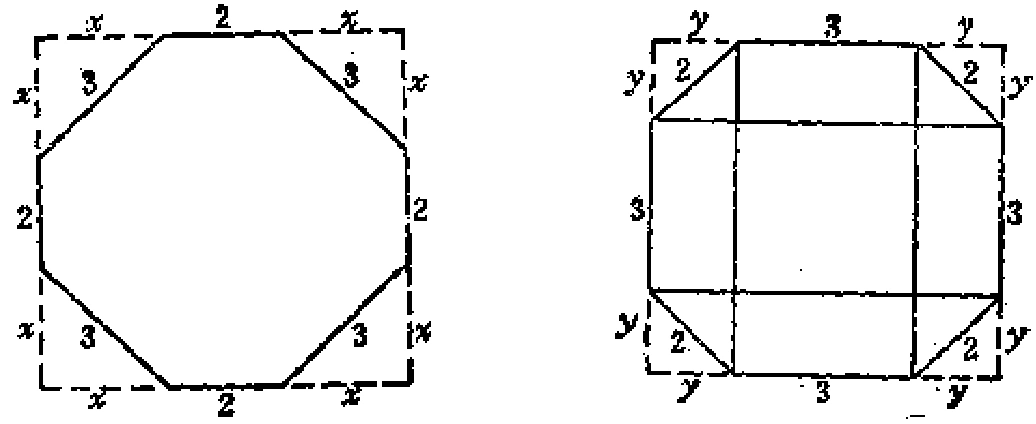


图8.2

($x=3\sqrt{2}/2$)

$$\begin{aligned}\text{八边形面积}&=(2x+2)^2-4(x^2/2)\\&=2x^2+8x+4\\&=2(3\sqrt{2}/2)^2+8\times(3\sqrt{2}/2)+4\\&=13+12\sqrt{2}\ .\end{aligned}$$

或者依右边的图形从内部计算($y=\sqrt{2}$)

$$\begin{aligned}\text{八边形面积}&=9+4(3y)+4(y^2/2)\\&=9+12\sqrt{2}+2\times2\\&=13+12\sqrt{2}\ .\end{aligned}$$

解法三 令R表示圆的半径．八边形面积等于四边形$OABC$(图8.3)面积的四倍．显然

$OABC$面积$=$ $\triangle OAC$面积$+\triangle ABC$面积

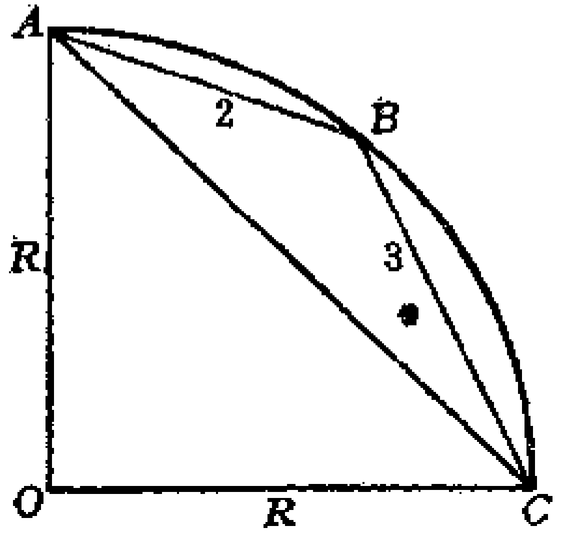


图8.3

由关于三角形面积

的Heron's公式

$$\triangle ABC\text{面积}=\sqrt{s(s-2)(s-3)(s-\sqrt{2}R)}$$

这里 $s=\frac{1}{2}(2+3+\sqrt{2}R)=\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}R$．因而

$$OABC\text{面积}=\frac{1}{2}R^2+\sqrt{(\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}R)(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}R)(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}R)(\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}R)}$$

$$=\frac{1}{2}R^2+\sqrt{(\frac{25}{4}-\frac{1}{2}R^2)(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}R^2)}.$$

由余弦定理（在$\triangle ABC$内应用于$\angle B$），得

$$2R^2=4+9-2\times2\times3\cos135^\circ$$

$$=13+12\times\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

从而 $R^2=\frac{13}{2}+3\sqrt{2}$．

把R^2的值代入前面关于$OABC$面积的等式，即可算得要求结果．

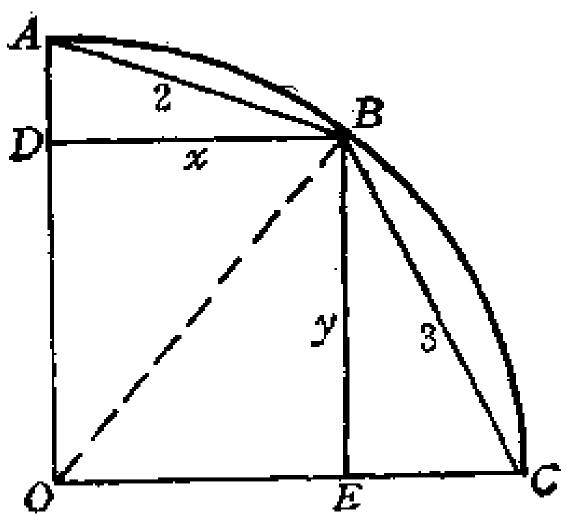


图8.4

解法四 在图8.4内，D及E分别是从B向OA及OC作垂线的垂足．令$x=OE$、$y=OD$，且令R为圆的半径．于是

八边形的面积$=4$(四边形$OABC$的面积)

$=4(\triangle OAB\text{面积}+\triangle OCB\text{面积})$

$$=4(\frac{1}{2}Rx+\frac{1}{2}Ry)$$

$=2R(x+y)$.

我们的想法是用R表示 $x+y$，然后利用已知事实$R^2=(13/2)+3\sqrt{2}$(参看解法3)。

把Pythagoras定理应于$\triangle ABD$，得$x^2+(R-y)^2=4$，或等价地，$2R(R-y)=4$（注意：$x^2+y^2=R^2$）。类似地，从$\triangle EBC$，有$y^2=9-(R-x)^2$，或等价地，$2R(R-x)=9$。把$R-y=4/(2R)$和$R-x=9/(2R)$相加，得$2R-(x+y)=13/(2R)$，即：$x+y=(4R^2-13)/2R$ 。把此式及R的值代入前面的等式，得

$$八边形的面积=2R\left(\frac{4R^2-13}{2R}\right)=4R^2-13$$

$$=4\left(\frac{13}{2}+3\sqrt{2}\right)-13=13+12\sqrt{2} .$$

解法五 八边形可以切成八个等腰三角形，其腰长为R（等于外接圆的半径），而底边长分别为2及3。如图8.5所示，令H及h分别表示这些三角形的高。那么

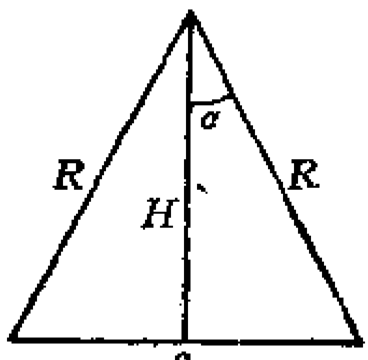
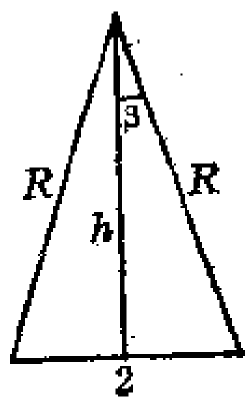


图8.5



$$八边形的面积=4\left(\frac{3}{2}H\right)+4\left(\frac{2}{2}h\right)$$

$$=6H+4h .$$

角α及β如图8.5所示，我们有下列关系：$\alpha+\beta=\pi/4$，

$\sin\alpha=3/2R$, $\cos\alpha=H/R$, $\sin\beta=1/R$, $\cos\beta=h/R$.
从这些关系，得

$$R=\frac{1}{\sin\beta}=\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\cos\alpha-\sin\alpha}\right)=\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{H/R-3/2R}\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{2R}{2H-3}\right).$$

由此

$$1=\frac{4}{\sqrt{2}(2H-3)}.$$

或 $$H=\frac{3}{2}+\sqrt{2}.$$

又 $$h=R\cos\beta=R\left[\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)\right]$$

$$=R\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}R\left(\frac{H}{R}+\frac{3}{2R}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}(2H+3)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\left[2(\frac{3}{2}+\sqrt{2})+3\right]=1+\frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

代入后，得

$$\text{八边形的面积}=6(\frac{3}{2}+\sqrt{2})+4(1+\frac{3}{2}\sqrt{2})$$

$$=13+12\sqrt{2}.$$

8.1.2. 设A、B是定圆上的两定点，XY是这个圆的一个变动的直径，确定AX和BY的交点的轨迹（可假定AB不是直径）.

解 如图8.6，A、B是定圆周上的两固定点. 令B'是在圆的直径上和B相对的点. 当AX和BY的交点在圆内或圆外时

(依赖于点X落在直线BB'的那边，参看图形)，此交点分别用P及P'表示．

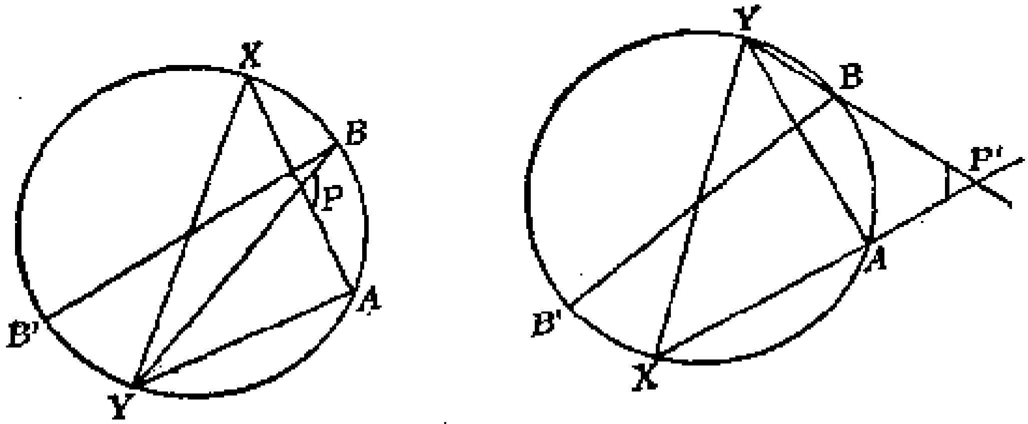


图8.6

在第一种情形，由于点P在圆内，对所有直径，$\angle APB=90^\circ+\frac{1}{2}\widehat{AB}$是一定角。于是，$P$点在一圆弧上，这个圆弧对弦$AB$张成定角（即$90^\circ+\frac{1}{2}\widehat{AB}$）．

在第二种情形，由于P点在圆外，对所有直径，$\angle AP'B=90^\circ-\frac{1}{2}\widehat{AB}$是一定角。于是，$P'$点在一过$A$及$B$的圆弧上。此外，$\angle APB$和$\angle AP'B$互为补角（$\angle APB+\angle AP'B=90^\circ+\frac{1}{2}\widehat{AB}+90^\circ-\frac{1}{2}\widehat{AB}=180^\circ$），因而$APBP'$是一个圆的内接四边形，也就是说，$P$和$P'$在同一个过$A$及$B$的圆上．

8.1.3．设P点在以射线OA及OB为边的角内．在OA上确定X点，在OB上确定Y点，使线段XY包含P点，且距离的乘积$(PX)(PY)$为最小。

解　这个问题在6.4.2中，曾用分析方法解决。这里，我们用几何方法求解。

设OC是$\angle AOB$的分角线，L是过P点且垂直于OC的直线，X及Y分别是L和OA及OB的交点（图8.7）．

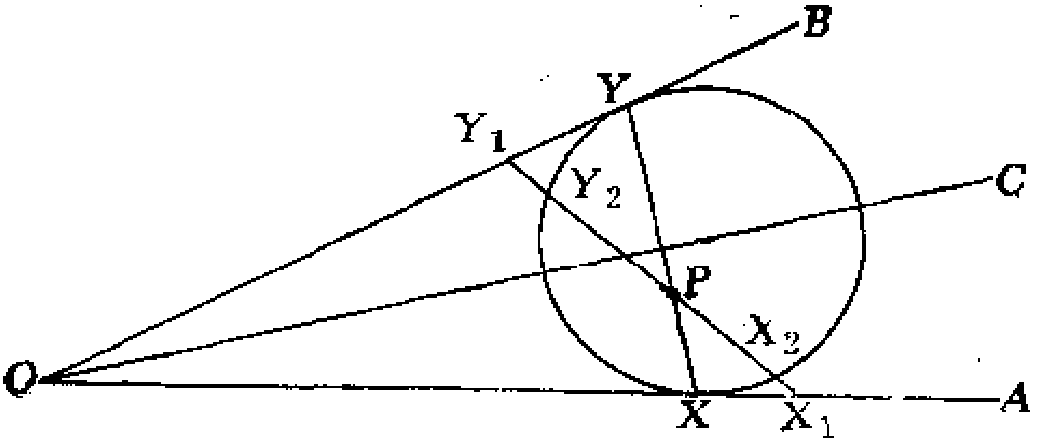


图8.7

因$OX=OY$，故存在一圆，它与OA相切于X且与OB相切于Y。设X_1Y_1是另一包含P的线段，分别与OA及OB交于X_1及Y_1。令X_2及Y_2是X_1Y_1与上圆的交点．于是，$(PX)(PY)=(PX_2)(PY_2)<(PX_1)(PY_1)$，所以，$(PX)(PY)$是最小值．

8.1.4 设P是$\triangle ABC$的一内点，令x、y及z分别表示P到BC、AC及AB的距离。当P位于何处时乘积xyz最大？

解　令a、b及c分别表示三边BC、AC及AB的长（图8.8）．由算术平均一几何平均不等式，

$$\sqrt[3]{(ax)(by)(cz)}\leqslant\frac{ax+by+cz}{3}.$$

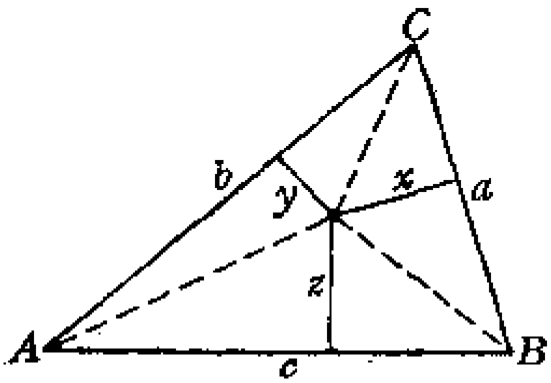


图8.8

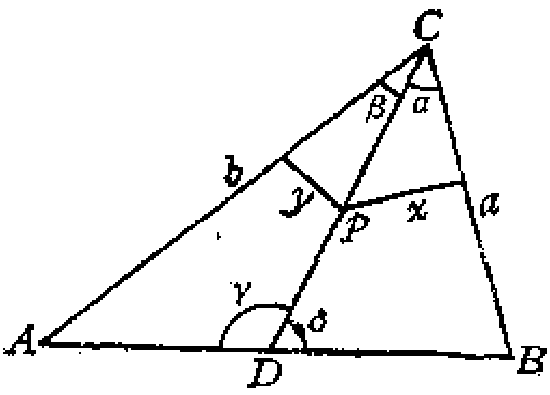


图8.9

但$ax+by+cz=2A$，这里A是三角形的面积。于是，当且仅当$ax=by=cz$，xyz取得最大值$8A^3/(27abc)$。

我们将证明当且仅当P是$\triangle ABC$的重心时，$ax=by=cz$。为此，设CP交AB于D。令α、β、γ、δ是图8.9中所示各角。熟知

$$\frac{b\sin\beta}{a\sin\alpha}=\frac{AD}{DB}.$$

（这一关系在许多问题里是有用的。为了看出它是对的，把正弦定理分别应用于$\triangle ADC$及$\triangle CDB$，得

$$\frac{AD}{\sin\beta}=\frac{b}{\sin\gamma} \quad 及 \quad \frac{DB}{\sin\alpha}=\frac{a}{\sin\delta}.$$

利用这些关系，又得

$$\frac{b\sin\beta}{a\sin\alpha}=\frac{AD\sin\gamma}{DB\sin\delta}=\frac{AD}{DB}$$

后一等式是因为γ、δ显然互为补角）。

由上等式，有

$$\frac{AD}{DB}=\frac{b\sin\beta}{a\sin\alpha}=\frac{by/(CP)}{ax/(CP)}=\frac{by}{ax}.$$

由此知，当且仅当$by=ax$时，$AD=DB$。于是，当且仅当P在从C引出的中线上时，$ax=by$。

同理，当且仅当P在从B引出的中线上时，$ax=cz$。综上知，当且仅当P是$\triangle ABC$的重心时，$ax=by=cz$。

问题

8.1.5. 证明：当且仅当一三角形的下列中心：内心、外心、重心、垂心中任意两个重合时，此三角形为等边三角形。

8.1.6. 已给一圆的内接锐角三角形。把三角形的三边所对的劣弧作关于对应边的反射（即$\overset{\frown}{AB}$关于AB边反射，等等，

图8.10）.所得三条反射弧是否交于一点？

8.1.7. 设C_1及C_2是两个半径为1的相切圆，且都与x轴相切，C_1的圆心在y轴上。现在构造一圆的序列C_n，使C_{n+1}与C_1、C_n相切，与x轴也相切。

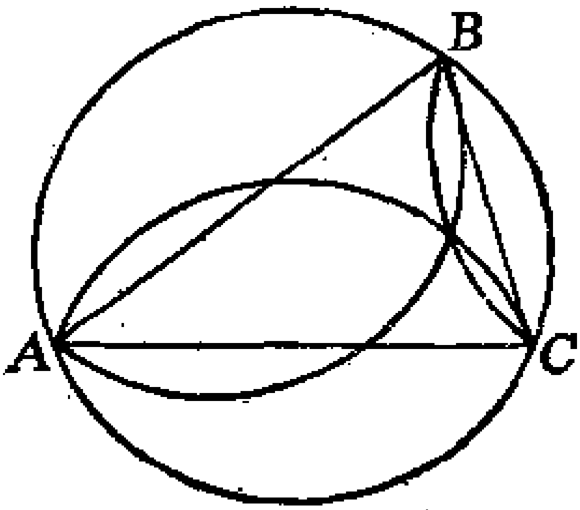


图8.10

(a) 求C_n的半径r_n。

(b) 证明：两个相邻圆C_{n-1}及C_n的包含在切点之间的公切线长为$\binom{n}{2}^{-1}$。

(c) 对(b)及问题的几何意义，证明

$$\sum_{n=2}^{\infty}\binom{n}{2}^{-1}=2$$

8.1.8. 设a、b、c是$\triangle ABC$的边，I_a、I_b、I_c是分角线，而T_a、T_b、T_c是把相应分角线延长所得的$\triangle ABC$的外接圆的弦，证明

$$abc=\sqrt{T_aT_bT_cI_aI_bI_c}$$

（提示：证，$T_aI_a=bc$，等等）

8.1.9.

(a) 在任意角XOY内给定一点P，设AB是过P的线段，使$AP=PB$，又设MN是任何另一条过P的直线，分别交OX及OY于M及N。证明$\triangle MON$的面积大于或等于$\triangle AOB$的面积。

(*b*) 设AD及AE是一圆的切线，P是劣弧上的任一点，过P点的切线分别交AD、AE于B、C 。证明：对劣弧上的所有点P，$\triangle ABC$的周长为常数 。

(*c*) 在(*b*)的条件下，再设MN是任何另一条过P的直线，分别交AE及AD于M及N 。证明$\triangle ABC$的周长小于$\triangle AMN$的周长 。

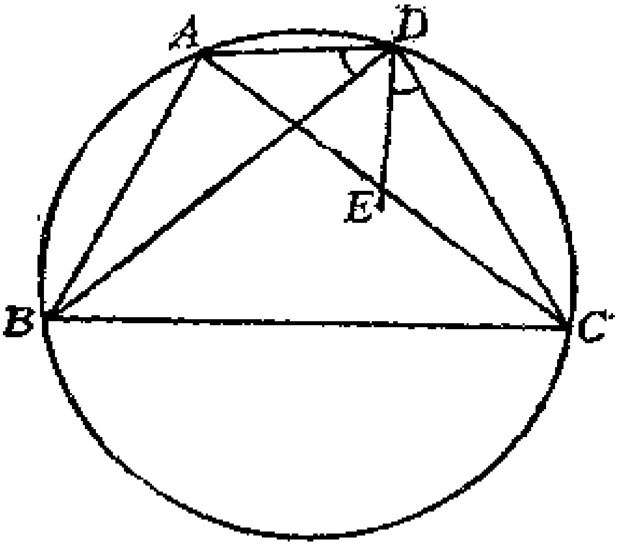


图8.11

8.1.10. 有圆内接四边形$ABCD$（图8.11）。设 $x=BD$，$y=AC$，且a、b、c、d表示四边长 。作 $\angle CDE$ 等于 $\angle ADB$.*)

(*a*) 证明 $\triangle CDE\sim\triangle ADB$，从而$EC\cdot x=ac$ 。

(*b*) 证明$\triangle ADE\sim\triangle BCD$，从而$AE\cdot x=bd$

(*c*) 从(*a*)及(*b*)，证明Ptolemy定理（关于圆内接四边形的一个重要事实）：圆内接四边形两对角线乘积等于两对边乘积的和。

8.1.11.

(*a*) 从等边$\triangle ABC$一顶点A作直线，交对边BC于P，且交外接圆于Q，证明

$$\frac{1}{PQ}=\frac{1}{BQ}+\frac{1}{CQ}.$$

---

*) 译者注：原书似误为$\angle ABD$.

(b) 利用(a)的记号，证明：对劣弧$\overset{\frown}{BC}$上的所有点Q，$AQ^4+BQ^4+CQ^4$为常数。(提示：令$x=AQ$，$y=BQ$，$z=CQ$，$\theta=\angle BAQ$，用三角方法证明$x=(2/\sqrt{3})\sin\theta$，$z=(1/\sqrt{3})(\cos\theta-\sin\theta)$，$y=x-z$.参看8.4.6)

8.1.12. 如图8.12，给定一圆的内接$\triangle ABC$，设R表示外接圆半径，h_a表示高AD .

(a) 证明 $\triangle ABC\sim\triangle ALD$. 从而$2h_aR=bc$.*)

(b) 证明 $\triangle ABC$的面积为$abc/4R$.

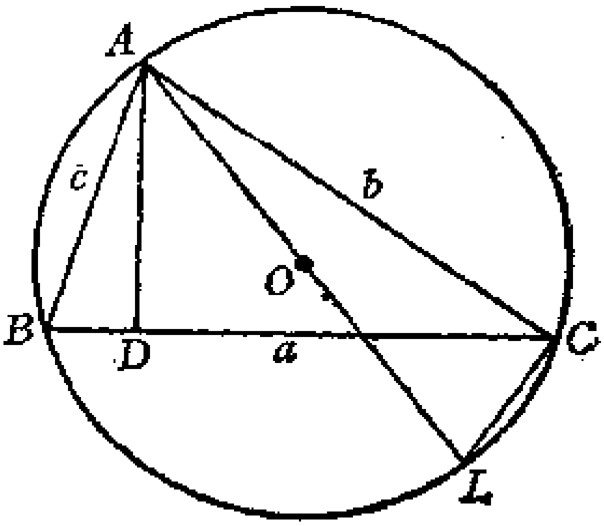


图8.12

8.1.13. 一三角形的内切圆半径为 4，且一边被切点分成的两线段长分别为 6 和 8，求另两边长 .

8.1.14. $\triangle ABC$和$\triangle DEF$内接于同一个圆，证明：当且仅当这两三角形的周长相等时，有

$$\sin A+\sin B+\sin C=\sin D+\sin E+\sin F\ .$$

8.1.15. 如图8.13，CD是垂直于中心为O的半圆的直径AB的半弦 .一中心为P圆如图方式内切，切AB于E，且切$\overset{\frown}{BD}$于F，证明$\triangle AED$为等腰三角形.(提示：描述图中的某些关系并灵活运用Pythagorean定理)。

---

*)译者注，原书误为$h_a=2R=bc$。

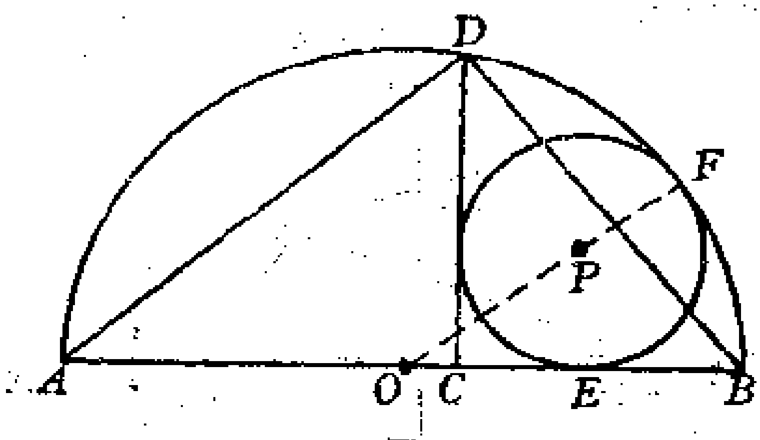


图8.13

8.1.16. 已知等边三角形一内点到三顶点的距离是5、7及8，求此等边三角形的边长 .

补充例题

1.2.1，1.3.14，1.4.2，1.6.1，1.6.10，1.8.3，1.8.7 .

8.2 解析几何

坐标系的引入提供了用代数和分析方法解决许多几何问题的可能性 .

8.2.1. 设P是以F_1及F_2为焦点的椭圆上一点，d表示从椭圆的中心到椭圆在P点的切线的距离（图8.14）.证明：当P在椭圆上运动时，$(PF_1)(PF_2)d^2$为常数.

证 在平面上建立座标系，使该椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ 0<b\leqslant a .$$

下面所用的方法是简明的：计算出PF_1、PF_2及d（作为P点的x一坐标的函数），然后验证乘积为常数 .

令P的坐标为(α,β)，焦点F_1及F_2的坐标为$(\pm c,\ 0)$，

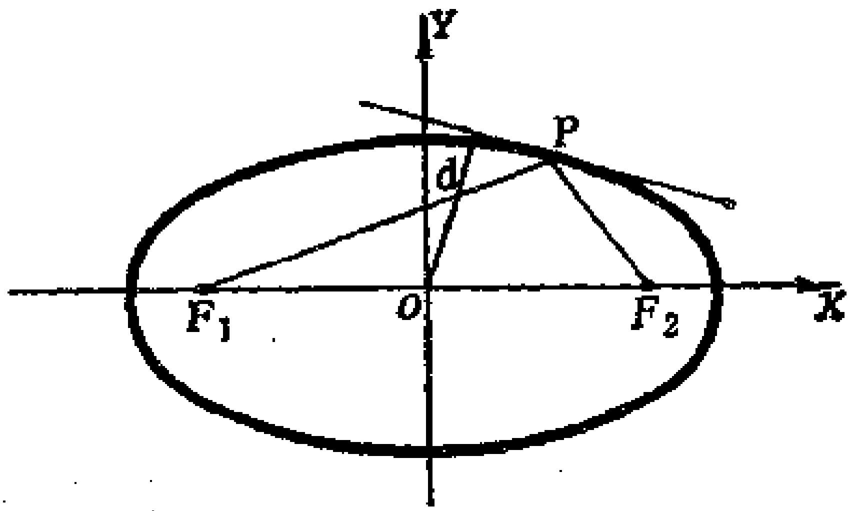


图8.14

这里$c^2=a^2-b^2$．于是，有

$$PF_1=\sqrt{\beta^2+(\alpha+c)^2},$$

$$PF_2=\sqrt{\beta^2+(\alpha-c)^2}\ .$$

为求d^2，必须写出椭圆在$P(\alpha,\ \beta)$点的切线方程．为找到在P的切线的斜率，先求导数：

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}y'=0$$

所以

$$y'=\frac{-2x/a^2}{2y/b^2}=-\frac{b^2x}{a^2y}\ .$$

由此得在$P(\alpha,\ \beta)$点的切线方程是

$$y-\beta=-\frac{b^2\alpha}{a^2\beta}(x-\alpha)$$

或等价的

$$a^2\beta y+b^2\alpha x=b^2\alpha^2+a^2\beta^2$$

因$P(\alpha,\ \beta)$是椭圆上一点，故$(\alpha^2/a^2)+(\beta^2/b^2)=1$，即$\alpha^2b^2+a^2\beta^2=a^2b^2$．于是在$P(\alpha,\ \beta)$的切线方程成为

$$\alpha b^2 x + \beta a^2 y - a^2 b^2 = 0 .$$

回顾从点$Q(c, d)$到直线$Ax+By+C=0$的距离D的公式：

$$D = \frac{|Ac+Bd+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} .$$

在此情形下，从原点到切线的距离d为

$$d = \frac{a^2b^2}{\sqrt{\alpha^2b^4+\beta^2a^4}} .$$

现在考察乘积$d^2(PF_1)(PF_2)$，利用

$$\beta^2 = \frac{a^2b^2-\alpha^2b^2}{a^2},$$

可先把乘积的每个因子中的β消去，得

$$d^2 = \frac{a^4b^4}{\alpha^2b^4+((a^2b^2-\alpha^2b^2)/a^2)a^4}$$

$$= \frac{a^4b^4}{\alpha^2b^4+a^4b^2-\alpha^2a^2b^2}$$

$$= \frac{a^4b^4}{b^2(\alpha^2b^2-\alpha^2a^2)+a^4b^2}$$

$$= \frac{a^4b^4}{b^2(-c^2\alpha^2)+a^4b^2} = \frac{a^4b^2}{a^4-c^2\alpha^2} .$$

及　　$$PF_1^2 = \beta^2+(\alpha+c)^2$$

$$= \frac{a^2b^2-\alpha^2b^2}{a^2}+\alpha^2+2\alpha c+c^2$$

$$= \frac{a^2b^2-\alpha^2b^2+a^2\alpha^2+2a^2\alpha c+a^2c^2}{a^2}$$

$$= \frac{a^2(b^2+c^2)+\alpha^2(a^2-b^2)+2a^2c\alpha}{a^2}$$

$$= \frac{a^4+2a^2c\alpha+c^2\alpha^2}{a^2}$$

$$=\frac{(a^2+c\alpha)^2}{a^2}.$$

类似地 $$PF_2^2=\frac{(a^2-c\alpha)^2}{a^2}.$$

于是 $$d^2(PF_1)(PF_2)=\left(\frac{a^4b^2}{a^4-c^2\alpha^2}\right)\left(\frac{a^2+c\alpha}{a}\right)\left(\frac{a^2-c\alpha}{a}\right)=a^2b^2.$$

证毕．

8.2.2. 设(x_1, y_1)、(x_2, y_2)、(x_3, y_3)是抛物线$y^2=ax$上三点，且抛物线在这三点的法线交于一点，证明$y_1+y_2+y_3=0$．

证 本题解法是由下面分析得到的副产品。令(α, β)是三条法线的交点的坐标（图8.15），(x, y)是抛物线上任一点。过点(x, y)及(α, β)的直线的斜率是$(y-\beta)/(x-\alpha)$．抛物线在点(x, y)的切线的斜率是$y'=a/(2y)$．因而在(x, y)的法线的斜率是$-2y/a$．由此可见，(x_1, y_1)、(x_2, y_2)、(x_3, y_3)都满足方程

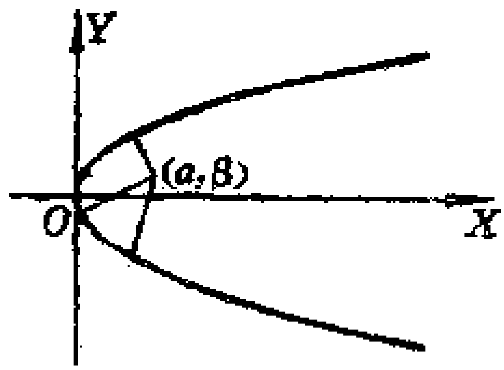


图8.15

$$\frac{y-\beta}{x-\alpha}=-\left(\frac{2y}{a}\right).$$

用y^2/a代替x，得

$$y-\beta=-\left(\frac{2y}{a}\right)\left(\frac{y^2}{a}-\alpha\right)$$

$$a^2(y-\beta)=-2y^3+2a\alpha y,$$

于是，y_1、y_2、y_3是三次方程

$$2y^3+a(a-2\alpha)y-a^2\beta=0$$

的三个根．由三次方程的系数和根是的关系（看4.3节），我们有$y_1+y_2+y_3=0$（y^2的系数为零）。

8.2.3． 一直线交双曲线于P及Q，交它的渐近线于A及B．证明$AP=BQ$．

证 可设双曲线和直线的方程分别是

$$xy=1$$

及 $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

（采用适当的比例再经旋转后，双曲线的方程可以有这种形式，并且这些变换把直线仍变为直线，同时保持线段的比例不变．）

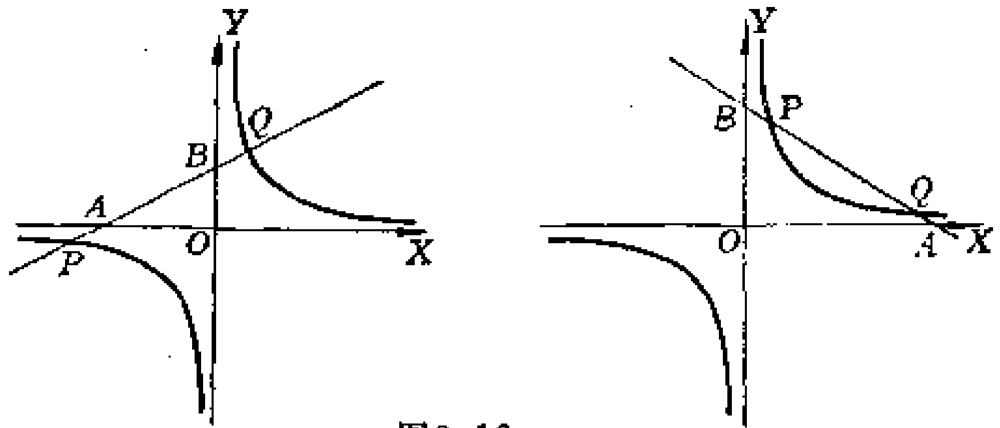


图8.16

此双曲线的渐近线就是x轴和y轴（图8.16），因而A点是该直线和x轴的交点，B点是它和y轴的交点．令(x_1, y_1)及(x_2, y_2)是P及Q点的坐标。把$y=1/x$代入(2)式，得

$$x^2-ax+\frac{a}{b}=0$$

因而x_1、x_2是此方程的根，故

$$x_1+x_2=a\ .$$

类似地，把 $x=1/y$ 代入(2)式，得

$$y^2-by+\frac{b}{a}=0,$$

因而 $\quad y_1+y_2=b\ .$

从而 $\quad AP^2=(x_1-a)^2+y_1^2$

$$=(a-x_2-a)^2+(b-y_2)^2$$

$$=x_2^2+(b-y_2)^2=BQ^2\ .$$

由此得证．

8.2.4. 求曲面 $z=xy$ 上的所有直线．

解 通过点 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ 且方向为 $(d_1,\ d_2,\ d_3)$ 的直线的参数方程是

$$x=a_1+d_1t,$$

$$y=a_2+d_2t,$$

$$z=a_3+d_3t\ .$$

因直线在曲面 $z=xy$ 上的必要充分条件是：对一切 t，有

$$a_3+d_3t=(a_1+d_1t)(a_2+d_2t)$$

$$=a_1a_2+(a_2d_1+a_1d_2)t+d_1d_2t^2,$$

由此得 $d_1d_2=0$，且 d_1、d_2 不能都为零，否则有 $d_1=d_2=d_3=0$，这与所设矛盾．

若 $d_2=0$，则

$$a_3+d_3t=a_2(a_1+d_1t),$$

或 $\quad z=a_2x\ .$

若 $d_1=0$ 则

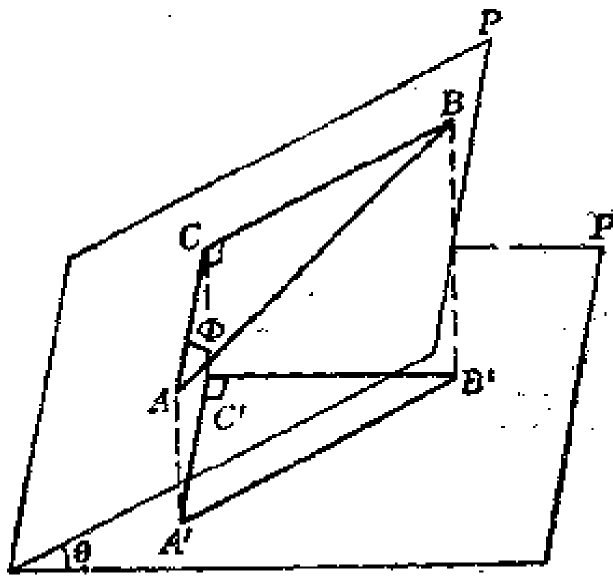
$$a_3+a_3t=a_1(a_2+d_2t) \text{或} z=a_1y.$$

于是，只有形如 $z=ax$，$y=a$ 或形如 $z=ay$，$x=a$ 的直线在

曲面上，a是任意常数。

8.2.5. 把平面P上的等边$\triangle ABC$正交投影到另一平面P'。证明：投影所得$\triangle A'B'C'$的边长的平方和不依赖于$\triangle ABC$在P上的位置（图8.17）。

证 首先，考察在投影下长度如何变化。设AB是平面P上的长为1的线段，它与P和P'的交线L成角φ。又设θ是两平面的夹角。在P上作$\triangle ABC$，使C为直角，AC平行于L(看图)。$\triangle ABC$投影为一直角$\triangle A'B'C'$。且$AC=A'C'$，$B'C'=BC\cos\theta$。因$AC=\cos\varphi$，$BC=\sin\varphi$。所以



8.17

$$A'B'=\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\cos^2\theta}$$

现设ABC是平面P上的的任一等边三角形。可设它的边长为1。又设AB与L成角φ。于是BC及CA分别与L成角$\varphi+(\pi/3)$及$\varphi+(2\pi/3)$。应用上面结果，得$\triangle A'B'C'$的边长的平方和是

$$(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\cos^2\theta)+\left(\cos^2\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)\cos^2\theta\right)+\left(\cos^2\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin^2\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)\cos^2\theta\right),$$

化简后，得

$$3\cos^2\theta+\frac{3}{2}\sin^2\theta\ .$$

这个结果不依赖于φ。

问题

8.2.6. 设P是$\triangle ABC$的重心，O是它的外接圆圆心。A、B、C的坐标分别是$(0, 0)$、$(a, 0)$、(b, c)。

(a) 用a、b、c表示P及O的坐标。

(b) 延长线段AP、BP及CP分别交此圆于D、E及F。证明

$$\frac{AP}{PD}+\frac{BP}{PE}+\frac{CP}{PF}=3.$$

(提示：按下面的方法进行：令x表示OP，R表示外接圆半径，于是

$$\frac{AP}{PD}+\frac{BP}{PE}+\frac{CP}{PF}=\frac{AP^2+BP^2+CP^2}{R^2-x^2}.$$

再把右边每项用a、b、c表示(利用(a)的结果。))

8.2.7. 为使直线$(x/a)+(y/b)=1$是圆$x^2+y^2=c^2$的切线，求参数a、b、c所应满足的关系。

8.2.8. 设有无穷多个边长分别是1、3、5、7、……的等边三角形，它们的底边在同一直线上，且按大小从左至右角靠角紧密排列。证明这些等边三角形的顶点在一条抛物线上，且各顶点至抛物线焦点的距离为整数。

8.2.9.

(a) 过抛物线$y=x^2$上的两点(a, b)及(c, d)作切线，求两切线交点的坐标。

(b) 从一点T作抛物线的两条切线L_1及L_2，令P及Q分别表示L_1及L_2的切点，又设L是抛物线的任何另外一条切线，且L分别交L_1及L_2于R与S，证明

$$\frac{TR}{TP}+\frac{TS}{TQ}=1.$$

8.2.10. 抛物线$y^2=ax$与圆$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$有四个交点，求此四点到抛物线的轴的距离的乘积。

8.2.11. 设b、c是固定实数，且在抛物线$y=x^2+bx+c$上有十个点(j, y_j)，$j=1, 2, \cdots, 10$.对$j=1, 2, \cdots, 9$，设I_j是给定的抛物线在(j, y_j)及$(j+1, y_{j+1})$点的切线的交点。确定次数最低的多项式函数$y=g(x)$，使它的图形过九个点I_j.

8.2.12. 证明或否定：至少存在一条直线与曲线$y=\mathrm{ch}x$在点$(a, \mathrm{ch}a)$正交，同时也与曲线$y=\mathrm{sh}x$在点$(c, \mathrm{sh}c)$正交。

8.2.13. (a) 证明：椭圆$(x^2/a^2)+(y^2/b^2)=1$的切线方程有下面形式

$$y=\alpha x\pm(a^2\alpha^2+b^2)^{1/2}.$$

且随着参数α的不同而改变位置(由于这种形式的重大作用，特别是对不含切点坐标的切线问题．它被称为切线的魔术方程．)

(b) 求椭圆$3x^2+y^2=3$的切线方程，使它的斜率为1.

(c) 求由椭圆的切线(斜率为m)及两坐标轴所成三角形的面积.

8.2.14.

(a) 设D是一圆盘$x^2+y^2<1$，A点的坐标是$(r, 0)$，$0<r<1$.描述D内的这样的P点的集合，它使以AP的中点为圆心，$AP/2$为半径的开圆是D的一个子集；

(b) 设D是一圆盘$x^2+y^2<1$.A及B是在D内任意选定

的两点．求以AB的中点为圆心，$AB/2$为半径的开圆是D的子集的概率。

8.2.15．给定一椭圆$(x^2/a^2)+(y^2/b^2)=1$，求一切这样的点集的方程，从每点都可向椭圆作两条斜率互为倒数的切线。

8.2.16．设一圆锥曲线有两条弦互相平分，证明此圆锥曲线不可能是抛物线．

8.2.17．证明：三次方程的图形关于它的拐点对称。（提示：设三次方程为$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，则拐点的x坐标为$-b/3a$）．

补充例题

1.3.11，1.5.3，1.5.8，1.6.4，3.1.4，4.3.6，4.3.7．

8.3 向量几何

在本节内我们考虑向量，这是一种既有大小又有方向的量．力、速度及加速度都是向量的例子．我们将看到在几何问题里使用向量是很方便的．

在欧氏平面内我们用一个箭号（即有向线段）描写向量．箭号的方向指示向量的方向，而箭号的长度表示向量的大小．

若两个向量有相同的长度及相同的大小，则它们相等，理解两个不共线的向量可以相等是很重要的．

若P及Q是两个点，从P到Q的向量用$\overrightarrow{PQ}$表示．$\overrightarrow{PQ}$的长度或大小则用$|\overrightarrow{PQ}|$表示。

向量$\overrightarrow{A}$及$\overrightarrow{B}$的和$\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}$可用平行四边形法则绘出（图

8.18），或等价地，如图8.19用三角形法则。向量$\vec{A}$及$\vec{B}$的差$\vec{A}-\vec{B}$，在几何上用图8.20显示。

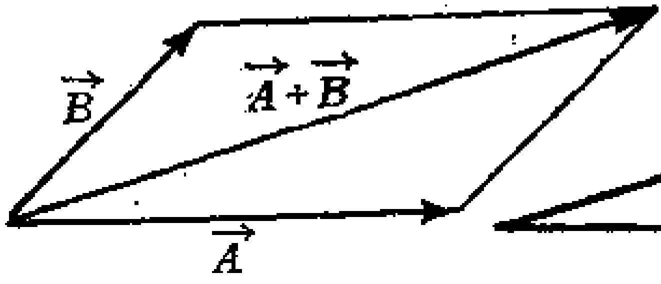


图8.18

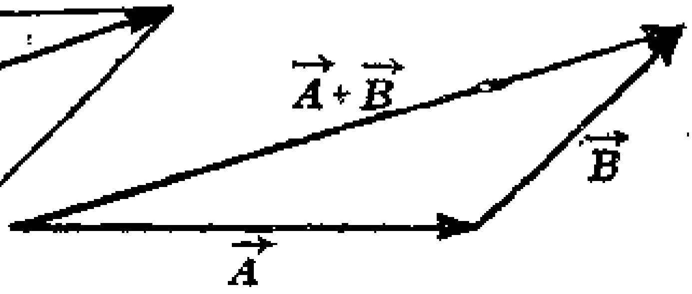


图8.19

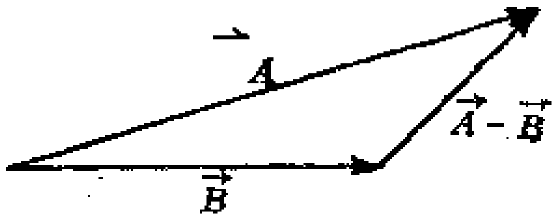


图8.20

在平面上建立坐标，且用O表示原点。平面上的每一点P，唯一地确定一个向量$\overrightarrow{OP}$，它称为P点的位置向量，以后我们将简单地用$\vec{P}$（代替$\overrightarrow{OP}$）表示这个向量。

设$\vec{P}$及$\vec{Q}$是两点P及Q的位置向量（图8.21）。设R是有向线段PQ上一点，它分PQ成比例$m:n$（图8.22）.则位置向量R由下式给出：

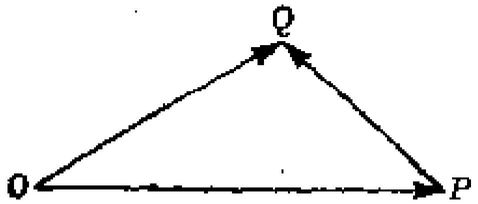


图8.21

图8.22

$$\vec{R}=\vec{P}+\frac{m}{m+n}(\vec{Q}-\vec{P})$$

$$=\frac{(m+n)\vec{P}+m(\vec{Q}-\vec{P})}{m+n}$$

$$=\left(\frac{n}{m+n}\right)\vec{P}+\frac{m}{m+n}\vec{Q}.$$

依下面的方式从物理方面考虑$\vec{R}$是有启发意义的：设想一根很轻的杆子，在P点有质量$n/(m+n)$，且在Q点有质量$m/(m+n)$。设这个系统的质量中心在PQ上的点X，在这里将有"跷跷板平衡"。其意思是，在X点有

$$\left(\frac{n}{m+n}\right)PX=\frac{m}{m+n}XQ$$

即 $$\frac{PX}{XQ}=\frac{m}{n}.$$

于是，X分PQ成比例$m:n$。换句话说，$\vec{X}=\vec{R}=[n/(m+n)]\vec{P}+[m/(m+n)]\vec{Q}$。系数$n/(m+n)$及$m/(m+n)$可以看做是"重量因子"。增加在$P$点的"重量"的比例，点$R$将向$P$运动且减少比值$m:n$。

8.3.1. 设D、E、F三等分$\triangle ABC$的各边，即$BC=3BD$、$CA=3CE$及$AB=3AF$（图8.23）。证明$\triangle ABC$和$\triangle DEF$有相同的重心。

证 我们先证明任一$\triangle PQR$的重心的位置向量是$\frac{1}{3}\vec{P}+\frac{1}{3}\vec{Q}+\frac{1}{3}\vec{R}$。为此，回想起$\triangle PQR$的重心是在从$P$到$QR$中点的2/3处。从前面对这个问题的讨论，我们知道，QR的中点的位置是量$\frac{1}{2}\vec{Q}+\frac{1}{2}\vec{R}$。因此，$\triangle PQR$的重心的位置向量是

$$\frac{1}{3}\vec{P}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{Q}+\frac{1}{2}\vec{R}\right)=\frac{1}{3}\vec{P}+\frac{1}{3}\vec{Q}+\frac{1}{3}\vec{R}.$$

由D、E、F的确定方式，有

$$\vec{D}=\frac{2}{3}\vec{B}+\frac{1}{3}\vec{C},$$

$$\vec{E}=\frac{2}{3}\vec{C}+\frac{1}{3}\vec{A},$$

$$\vec{F}=\frac{2}{3}\vec{A}+\frac{1}{3}\vec{B},$$

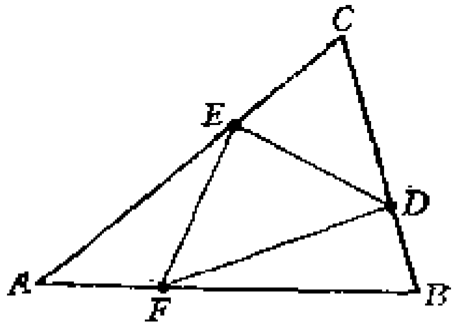


图8.23

所以

$$\triangle DEF\text{的重心}=\frac{1}{3}\vec{D}+\frac{1}{3}\vec{E}+\frac{1}{3}\vec{F}$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}\vec{B}+\frac{1}{3}\vec{C}\right]+\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}\vec{C}+\frac{1}{3}\vec{A}\right]+\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}\vec{A}+\frac{1}{3}\vec{B}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\vec{A}+\frac{1}{3}\vec{B}+\frac{1}{3}\vec{C}=\triangle ABC\text{的重心。}$$

8.3.2. 证明：可以作一个三角形，使它的边平行且等于给定的三角形的中线.

证 已给$\triangle ABC$，设D、E、F分别是边BC、AC及AB的中点（图8.24）.则

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA},$$

$$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

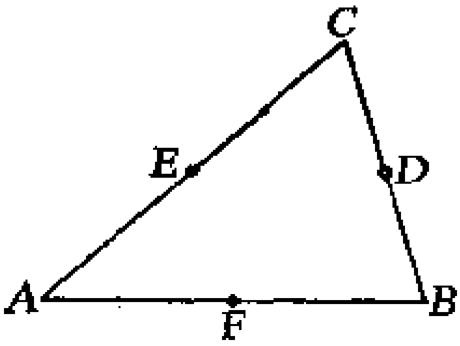


图8.24

上式相加，得$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\frac{3}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=0$.由此知，向量$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{BE}$及$\overrightarrow{CF}$形成一个三角形，且$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{BE}$及$\overrightarrow{CF}$的大小和方向都和$\triangle ABC$的中线向量（以

顶点为起点）相等。

在研究后面的例题前，我们提出下面的基本原则：设P、Q、R是不共线的三点（图8.25）。若$a\overrightarrow{PQ}+b\overrightarrow{PR}=c\overrightarrow{PQ}+d\overrightarrow{PR}$，那末$a=b$，$c=d$。事实上，若$a\neq c$，由所设条件

$$\overrightarrow{PQ}=\left(\frac{d-b}{a-c}\right)\overrightarrow{PR}$$

由此推得，P、Q、R共线(向量$\overrightarrow{PQ}$及$\overrightarrow{PR}$有公共点P)。与所设矛盾。同理$b=d$。

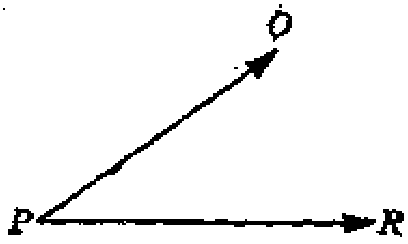


图8.25

8.3.3. 证明：平行四边形一顶点和对边中点的连结线，三等分此平行四边形的一对角线。

证　如图8.26所示，记此平行四边形的顶点为A、B、C、D。F是DC的中点，E是AF及BD的交点。注意$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$及$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，这是因为，作为向量它们有相同的大小和方向。

点E是两条直线的交点，我们可以从代数上表示这一事实：即存在常数a及b，使得

$$\overrightarrow{AE}=a\overrightarrow{AF},$$

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{BD},$$

所以　$$\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{BD}=a\overrightarrow{AF}\ .$$

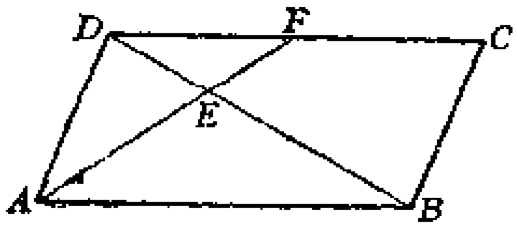


图8.26

以下的想法是把后一等式中的每个向量都用$\overrightarrow{AB}$及$\overrightarrow{AD}$表示，从而我们可以把前面陈述的原则应用到这个问题的讨论。于是，有

$$\overrightarrow{AB}+b(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=a(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}),$$

$$(1-b)\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}a\overrightarrow{AB}+a\overrightarrow{AD}.$$

由此得

$$1-b=\frac{1}{2}a,$$

$$b=a.$$

解这些方程，得$a=b=2/3$.因而得到要证的结果.

8.3.4. 在$\triangle ABC$内（图8.27），设D及E是BC的三等分点，D在B和E之间，F是AC的中点，G是AB的中点.又设H是线段EG和DF的交点.求比值$EH:HG$.

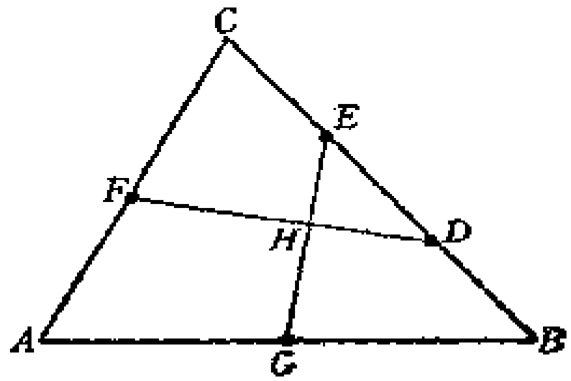


图8.27

解 本题的解法类似于前题. 存在常数a及b，使得

$$\overrightarrow{AG}+a\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{AF}+b\overrightarrow{FD}$$

现在把上式中的每一个向量用$\overrightarrow{AB}$及$\overrightarrow{AC}$表示：

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC},$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$$

$$=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$$

$$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

$$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$$

$$=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\text{.}$$

把这些式子代入前面的等式，我们有

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+a\left(-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+b\left(-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)\text{.}$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}a\right)\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}a\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{2}{3}b\overrightarrow{AB}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}b\right)\overrightarrow{AC}\text{.}$$

由此得

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{6}a=\frac{2}{3}b,$$

$$\frac{2}{3}a=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}b\text{.}$$

或等价地，

$$a+4b=3,$$

$$4a+b=3\text{.}$$

此方程组的解是$a=b=3/5$．从而得$EH:HG=2:3$。

8.3.5．给定一$\triangle ABC$，分别以AB及AC为底向外作等腰$\triangle ABC'$及等腰$\triangle ACB'$，又以BC为底向内作等腰$\triangle BCA'$，并使这三个三角形相似（图8.28），证明$AB'A'C'$是一平行四边形。

证　在向量的形式下，我们的问题是要证明$\overrightarrow{AB'}+$

$\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AA'}$.

令D、E、F分别是AB、BC、CA的中点，则

$$\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FB'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{FB'},$$

$$\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC'}.$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA'}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EA'}\\&=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{EA'}\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{EA'}\end{aligned}$$

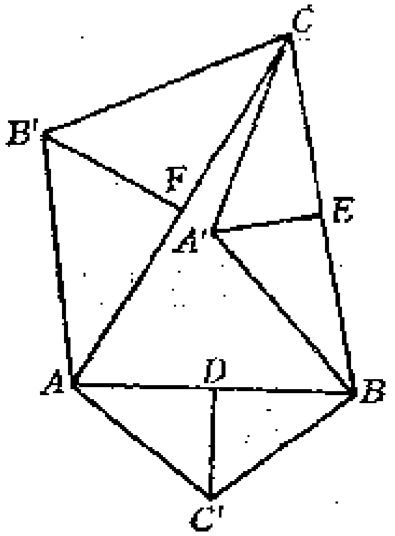


图8.28

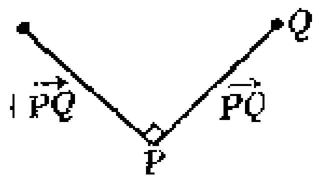


图8.29

为用$\overrightarrow{AB}$及$\overrightarrow{AC}$表示$\overrightarrow{FB'}$、$\overrightarrow{DC'}$及$\overrightarrow{EA'}$，我们引入下面的记号（还将应用在其它的问题里）．如图8.29所示，给定P及Q点，令$\mid\overrightarrow{PQ}$表示把$\overrightarrow{PQ}$依正方向旋转一直角，并保持大小不变而得的向量．现在，设在$\triangle ABC$的边上作的等腰三角形的高与底的比为k，即$FB'/AC=DC'/AB=EA'/BC=k$，于是

$$\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{FB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + k|\overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - k|\overrightarrow{AB},$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA'} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EA'} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + k|\overrightarrow{BC}, \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + k|(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}). \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + k\left|\overrightarrow{AC} - k\right|\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

（注意$|(\vec{P}+\vec{Q}) = |\vec{P} + |\vec{Q}$ 及$|a\vec{P} = a|\vec{P}$，a为任意常数）。从$\overrightarrow{AB'}$、$\overrightarrow{AC'}$及$\overrightarrow{AA'}$的表达式，即得$\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'}$．证毕。

给定向量$\overrightarrow{PQ}$及$\overrightarrow{RS}$，点乘积$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{RS}$是用下面公式定义的

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{RS} = |\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{RS}|\cos\theta,$$

这里θ是两向量的夹角，$0 \leqslant \theta \leqslant 180°$。

可以证明对任意向量$\vec{A}$、$\vec{B}$、$\vec{C}$，有

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A},$$

及
$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}.$$

注意，若$\vec{A}$与$\vec{B}$垂直，则$\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$．反之，若$\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$，那末，或者$\vec{A} = 0$与$\vec{B} = 0$中任一个成立，或者$\vec{A}$与$\vec{B}$垂直，还注意$\vec{A}\cdot\vec{A} = |\vec{A}|^2$．

8.3.6. 在$\triangle ABC$中（图8.30），$AB=AC$，D是BC的中点，E是从D作AC的垂线的垂足，F是DE的中点，证明AF垂直于BE.

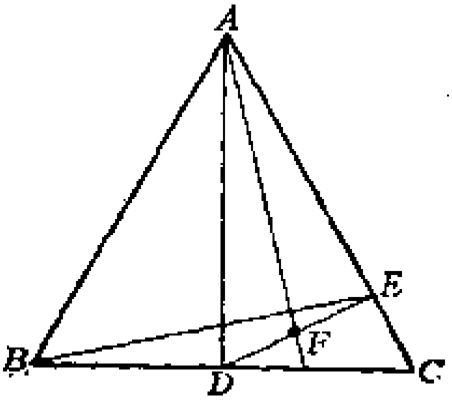


图 8.30

证 本题与1.5.3是同一个问题，我们将用向量的方法给出证明.

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BE}\\
&=(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF})\cdot(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE})\\
&=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DE}\\
&=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE})\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BD}\\
&\quad+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DE}\\
&=\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DE}\\
&=\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DE}\\
&=\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DE}\\
&=\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DE})\\
&=\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}\cdot EC=0.
\end{aligned}
$$

正如在欧氏平面的讨论一样，向量的概念在三维欧氏空间里也有意义。与平面的情形相同，向量有长度和方向且用箭号或有向线段表示（但现在是在三维空间）．向量的加法仍用平行四边形法则，并可用来巧妙地证明立体几何的结果.

8.3.7. 若四面体的两条高共面，证明：连结这两条高所含

顶点的棱垂直于此四面体和它相对的棱。

证　设AP和BH分别是从A及B所引的高，它们相交于H（图8.31.）.

$\overrightarrow{AH}$垂直于$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CD}$及$\overrightarrow{BD}$、$\overrightarrow{BH}$垂直于$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{AD}$及$\overrightarrow{AC}$. 我们希望证明$\overrightarrow{AB}$垂直于$\overrightarrow{CD}$，为此，计算点乘积

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{HA})\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{CD}$$

$$-\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{CD}=0-0=0.$$

证毕.

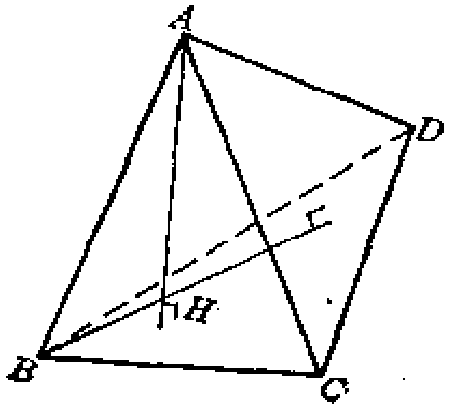


图 8.31

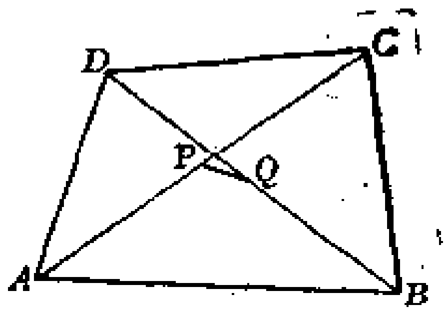


图 8.32

8.3.8. 若一挠（非平面）四边形对边长相等，证明两对角线中点的连线垂直于两对角线.

证　设A、B、C、D是此四边形的顶点，P及Q分别是AC及BD的中点（图8.32）. 已知$|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BC}|$及$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$. 两式平方，并转换成点乘积，有

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC},$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CD}.$$

或等价地，

$$\begin{gathered}(\vec{D}-\vec{A})\cdot(\vec{D}-\vec{A})=(\vec{C}-\vec{B})\cdot(\vec{C}-\vec{B}),\\ (\vec{B}-\vec{A})\cdot(\vec{B}-\vec{A})=(\vec{D}-\vec{C})\cdot(\vec{D}-\vec{C}).\end{gathered}\tag{1}$$

我们希望证明$\overrightarrow{PQ}$垂直于$\overrightarrow{AC}$及$\overrightarrow{BD}$，在向量的形式下就是要证明

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AC}=0,$$

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BD}= \ .$$

或等价地，

$$(\vec{Q}-\vec{P})\cdot(\vec{C}-\vec{A})=0,$$

$$(\vec{Q}-\vec{P})\cdot(\vec{D}-\vec{B})=0.$$

把$\vec{P}=(\vec{A}+\vec{C})/2$ 及$\vec{Q}=(\vec{B}+\vec{D})/2$代入上面两式，得

$$\begin{gathered}(\vec{B}+\vec{D}-\vec{A}-\vec{C})\cdot(\vec{C}-\vec{A})=0,\\ (\vec{B}+\vec{D}-\vec{A}-\vec{C})\cdot(\vec{D}-\vec{B})=0 .\end{gathered}\tag{2}$$

问题等价于证明从(1)式可以推出(2)式。

(1)式展开，有

$$\vec{D}\cdot\vec{D}-2\vec{A}\cdot\vec{D}+\vec{A}\cdot\vec{A}$$

$$=\vec{C}\cdot\vec{C}-2\vec{B}\cdot\vec{C}+\vec{B}\cdot\vec{B},$$

$$\vec{B}\cdot\vec{B}-2\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{A}$$

$$=\vec{D}\cdot\vec{D}-2\vec{C}\cdot\vec{D}+\vec{C}\cdot\vec{C} .$$

两正相加，得

$$-2\vec{A}\cdot\vec{D}-2\vec{A}\cdot\vec{B}+2\vec{A}\cdot\vec{A}$$

$$=2\vec{C}\cdot\vec{C}-2\vec{B}\vec{C}-2\vec{C}\cdot\vec{D},$$

$$-(\vec{B}+\vec{D})\cdot\vec{A}+\vec{A}\cdot\vec{A}=\vec{C}\cdot\vec{C}-\vec{C}\cdot(\vec{B}+\vec{D}),$$

$$(\vec{B}+\vec{D})\cdot(\vec{C}-\vec{A})-(\vec{C}\cdot\vec{C}-\vec{A}\cdot\vec{A})=0,$$

$$(\vec{B}+\vec{D})\cdot(\vec{C}-\vec{A})-(\vec{C}+\vec{A})\cdot(\vec{C}-\vec{A})=0,$$

$$(\vec{B}+\vec{D}-\vec{C}-\vec{A})\cdot(\vec{C}-\vec{A})=0.$$

这就是(2)中两个等式中的头一个，为了得到(2)中的第二个等式，只要把(1)的两个式子展开后取其差，具体细节与前面的计算相同。

用类似的方法，把(2)中的等式相加及相减可以得出(1)式。这意味着逆定理成立：若挠四边形的两对边中点的连线垂直于这两条对角线，则此四边形对边相等。

问题

8.3.9. 在$\triangle ABC$内，D、E、F点分别三等分各边，即使得$BC=3BD$，$CA=3CE$及$AB=3AF$。类似地，G、H、I分别三等分$\triangle DEF$的各边，即使得$EF=3EG$，$FD=3FH$及$DE=3DI$.证明$\triangle GHI$的边分别平行于$\triangle ABC$的边，且小三角形的每边至多是大三角形中与之平行的边的1/3。

8.3.10. 四边形$ABCD$的边AD、AB、CB、CD依次被E、F、G、H分割，使$AE:ED=AF:FB=CG:GB=CH:HD$.证明$EFGH$是一平行四边形。

8.3.11.

(a) 在$\triangle ABC$内（图8.33），D及E点分割BC及AC，

使$BD/DC=3$及$AE/EC=3/2$。设P表示AD及BE的交点，

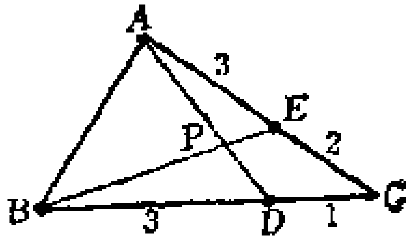


图 8.33

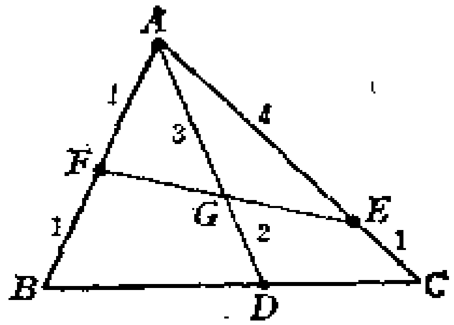


图 8.34

求比例$BP:PE$。

(b) 在$\triangle ABC$内（图8.34），E及F点分别分AC及AB，使得$AE/EC=4$及$AF/FB=1$。设D是BC边上的一点，G是EF和AD的交点，并设D位于使$AG/GD=3/2$处，求比例BD/DC。

8.3.12. 在任意平行四边形的边上，向外作四个正方形，证明这四个正方形的中心M_1、M_2、M_3、M_4是一正方形的顶点。

8.3.13. 在任意凸四边形的边上，作四个等边三角形ABM_1、BCM_2、CDM_3、及DAM_4。它们中第一及第三个位于四边形之外。而第二及第四个位于四边形的边BC及DA的同一侧。证明四边形$M_1M_2M_3M_4$是平行四边形

8.3.14. 在任意凸四边形$ABCD$的边上，向外作四个正方向，它们的中心依次是M_1、M_2、M_3、M_4。证明$M_1M_3=M_2M_4$，且M_1M_3垂直于M_2M_4。

8.3.15. 在$\triangle ABC$的边上，向外作等边三角形BCX，CAY及ABZ，证明$\triangle ABC$和$\triangle XYZ$有相同的重心。

8.3.16. 分别延长$\triangle ABC$的三条高到点A'、B'及C'，使得$AA'=k/h_a$，$BB'=k/h_b$，$CC'=k/h_c$。这里，k是常数，

h_a表示$\triangle ABC$从A点引出的高的长度，余类似．证明$\triangle ABC$的重心与$\triangle A'B'C'$的重心相同．

8.3.17． 设ABC是一个锐角三角形，在三边上向外作正方形。分别延长从三个顶点引出的高，直到与在对边上作的正方形的较远的边相交为止，这样每个正方形都被分成二个矩形，证明在不同正方形内的"相邻近的矩形"面积相等．即证明：面积i=面积i'，$i=1,2,3$（图8.35）。

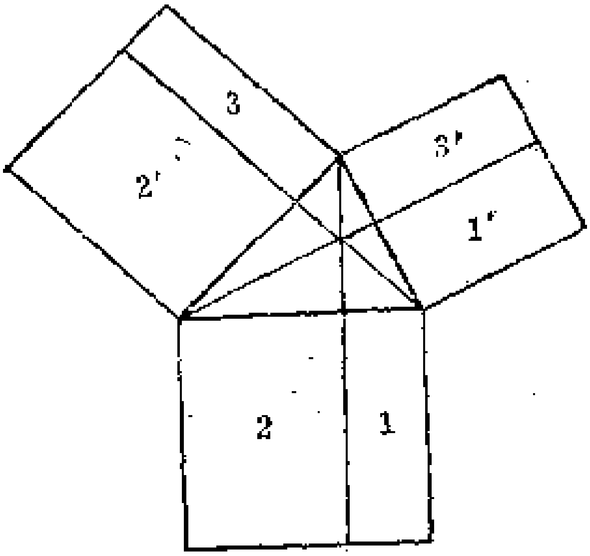


图 8.35

（利用内积给出一个简单的证明）又ABC是直角三角形时，情况如何？

8.3.18． 在一四面体内，有两对相对的棱垂直．证明第三对相对棱也垂直．

8.3.19． 设O是一给定的点，P_1、P_2、…、p_n是一正n边形的顶点，$n\geqslant 7$，且Q_1、Q_2、…、Q_n由下式确定：

$$\overrightarrow{OQ_i}=\overrightarrow{OP_i}+\overrightarrow{P_{i+1}P_{i+2}},\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

（$P_{n+1}=P_1$，$p_{n+2}=p_2$）．证明Q_1、Q_2、…、Q_n是一正n边形的顶点．

8.4 利用复数解几何题

在本节内，我们将利用在节3.5中引入的复数的几何意

义来解几何题。

8.4.1. 设$A_1A_2\cdots A_n$是一个正n边形，它内接于半径为r中心为O的圆，P是在A_1那边的OA_1的延长线上一点，证明

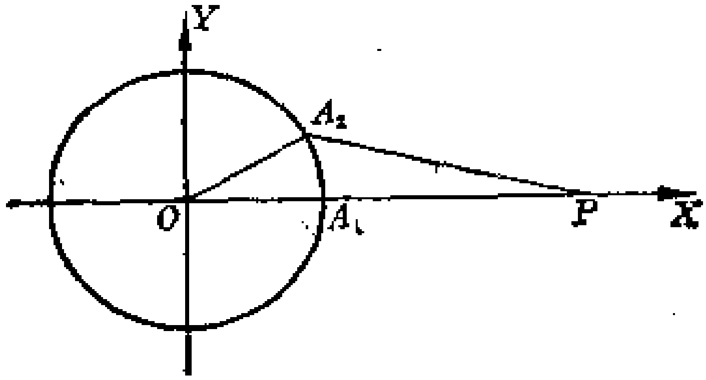


图 8.36

$$\prod_{k=1}^{n} PA_k = OP^n - r^n.$$

证 图 8.36 表示复平面，所给圆的圆心在原点，顶点A_i落在$z^n-r^n=0$的n个根处。特别地，我们令A_k的指标是$z_k=re^{2\pi(k-1)i/n}$（平面上一点Q的指标是Q所对应的复数）P的坐标是一个实数，用z表示，于是

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n} PA_k &= \prod_{k=1}^{n} |z-z_k| = \left|\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)\right| \\ &= |z^n-r^n| \\ &= z^n-r^n \qquad (z\text{及}r\text{为实数}) \\ &= OP^n-r^n.\end{aligned}$$

8.4.2. 在单位周围上给定一点P，A_1、A_2、…、A_n是其内接正n边形的顶点，证明$PA_1^2+PA_2^2+\cdots+PA_n^2$是一常数。

证 仍令A_1、$A_2\cdots$、A_n对应于n次单位根，A_k的指标是$z_k=e^{2\pi ki/n}$，$k=1, 2, \cdots, n$。又设P的指标是z。于是

$$\sum_{k=1}^{n} PA_k^2 = \sum_{k=1}^{n} |z-z_k|^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (z-z_k)(\overline{z}-\overline{z_k}) \qquad (w^2 = w\overline{w})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (z\overline{z} - z_k\overline{z} - z\overline{z_k} + z_k\overline{z_k})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} z\overline{z} - \left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)\overline{z} - z\left(\sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}\right)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} z_k\overline{z_k}.$$

但 $\sum_{k=1}^{n} z_k = 0$，这是因为z_k是方程$z^n-1=0$的根，且z^{n-1}的系数为零。所以

$$\sum_{k=1}^{n} PA_k^2 = \sum_{k=1}^{n} z\overline{z} + \sum_{k=1}^{n} z_k\overline{z_k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |z|^2 + \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2$$

$$= n+n \qquad (|z|=1,\ |z_k|=1)$$

$$= 2n.$$

8.4.3. 若一等边三角形的两个顶点所对应的复数是z_1及z_2。证明第三个顶点对应于复数$-\omega z_1-\omega^2 z_2$。这里ω是1的虚立方根。

证 当且仅当$z_3-z_1=(z_2-z_1)e^{\pm\pi i/3}$时，$z_1$、$z_2$、$z_3$构成一个等边三角形。于是，给定$z_1$及$z_2$，$z_3$必有下面形式。

$$z_3=(1-e^{\pm\pi i/3})z_1+e^{\pm\pi i/3}z_2$$

$$=-[-1+e^{\pm\pi i/3}]z_1-[-e^{\pm\pi i/3}]z_2.$$

从这些量的几何意义（图8.37），我们所以看出$-1+e^{\pm\pi i/3}$

及$-e^{\pm\pi i/3}$是 1 的虚立根。这也可以从代数上证明：

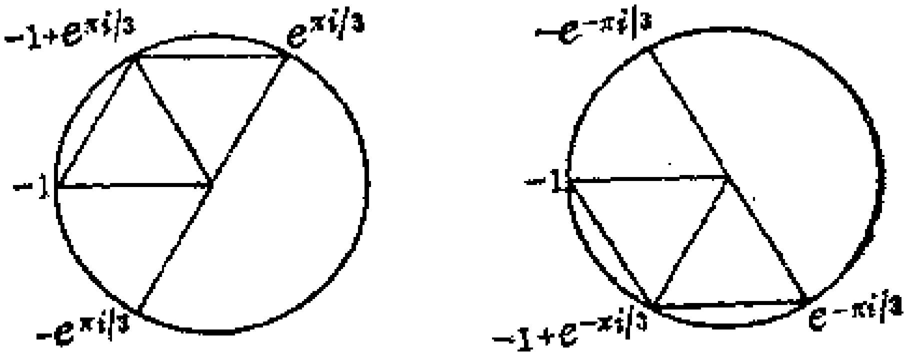


图 8 .37

$$
\begin{aligned}
-1+e^{\pm\pi i/3} &= -1+\cos\left(\pm\frac{1}{3}\pi\right)+i\sin\left(\pm\frac{1}{3}\pi\right) \\
&= -1+\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i \\
&= -\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i.
\end{aligned}
$$

及

$$
\begin{aligned}
-e^{\pm\pi i/3} &= -\left\{\cos\left(\pm\frac{1}{3}\pi\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\} \\
&= -\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i.
\end{aligned}
$$

反之，令$z_3=-\omega z_1-\omega^2 z_2$，这里$\omega$是 1 的虚立方根。那末

$$\omega=-1+e^{\pi i/3} \quad 及 \quad \omega^2=-e^{\pi i/3}$$

或

$$\omega=-1+e^{-\pi i/3} \quad 及 \quad \omega^2=-e^{-\pi i/3},$$

并且由前面的讨论断定z_1、z_2、z_3形成一个等边三角形。

8.4.4. 在任意$\triangle ABC$的边上向外作等边三角形，证明这三个等边三角形的中心（重心）形成一等边三角形。

证 令a、b、c分别是A、B、C的指标（在复平面内），x，y，z是如图8.38所示的等边三角形的重心的指标。令$\omega=e^{2\pi i/3}$，则$\omega^2+\omega+1=0$(ω是单位立方根，故 $0=$

$\omega^3-1=(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)$. 此外，有 $e^{\pi i/3}=-\omega^2$ 及 $e^{-\pi i/3}=-\omega$.

△ABC的重心的指标是$(a+b+c)/3$. 类似地，x、y、z由下面式子给出

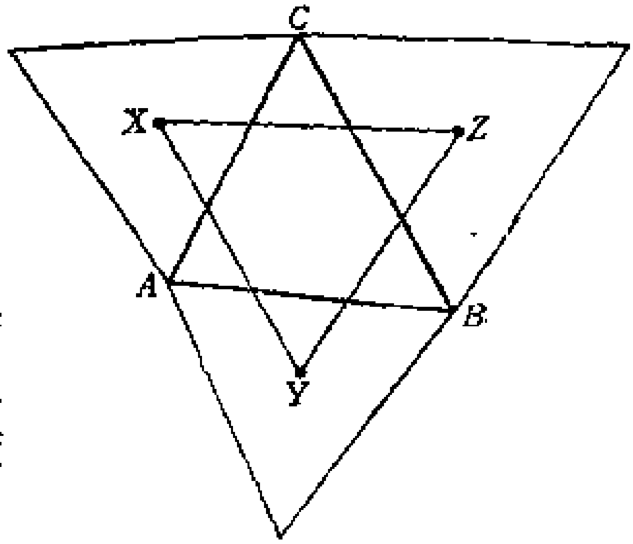


图 8.38

$$x=\frac{1}{3}\{a+c+[a-\omega^2(c-a)]\}$$
$$=\frac{1}{3}[(2+\omega^2)a+(1-\omega^2)c],$$
$$y=\frac{1}{3}\{a+b+[a-\omega(b-a)]\}$$
$$=\frac{1}{3}[(2+\omega)a+(1-\omega)b],$$
$$z=\frac{1}{3}\{b+c+[b-\omega(c-b)]\}$$
$$=\frac{1}{3}[(2+\omega)b+(1-\omega)c].$$

为证明x，y，z形成一个等边三角形，只要证明

$$z-x=-\omega^2(y-x)$$

就可以了. 我们有

$$3(z-x)=-(2+\omega^2)a+(2+\omega)b+(-\omega+\omega^2)c,$$
$$-3\omega^2(y-x)=3\omega^2(x-y)$$
$$=(\omega^4-\omega^3)a-(\omega^2-\omega^3)b+(\omega^2-\omega^4)c$$

但 $\omega^4-\omega^3=\omega-1=(-1-\omega^2)-1=-(2+\omega^2)$,

$$-(\omega^2-\omega^3)=-\omega^2+1=(1+\omega)+1=2+\omega,$$

$$\omega^2-\omega^4=\omega^2-\omega.$$

所以，上面关于$z-x$及$-\omega^2(y-x)$的表达式中，a、b、c的系数相等.由此知x，y，z形成一等边三角形.

问题

8.4.5. 设A_0、A_1、A_2、A_3、A_4分单位圆成五个相等的部分，证明弦A_0A_1、A_0A_2满足等式

$$(A_0A_1\cdot A_0A_2)^2=5.$$

8.4.6. 在单位圆周上任给一点P，且A_1、A_2、$\cdots$、A_n是内接正n边形的顶点，证明$PA_1^4+PA_2^4+\cdots+PA_n^4$是一常数（即不依赖于$P$点的位置）.

8.4.7. 设G是$\triangle ABC$的重心，证明

$$3(GA^2+GB^2+GC^2)=AB^2+BC^2+BA^2.$$

8.4.8. 设六边形$ABCDEF$内接于半径为r的圆.证明：若$AB=CD=EF=r$，则BC、DE及FA的中点是一等边三角形的顶点.

8.4.9. 设z_1、z_2、z_3满足条件：$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$及$z_1+z_2+z_3=0$，证明z_1、z_2、z_3是一内接于单位圆的等边三角形的顶点.

8.4.10. 证明：当且仅当

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$$

时，z_1、z_2、z_3构成一等边三角形.

8.4.11. 若在复平面内对应于方程

$$z^3-3pz^2+3qz-r=0$$

的三个点，是一三角形的顶点.

(a) 证明此三角形的重心是一个对应于p的点.

(b) 证明：当且仅当$p^2=q$时，它是一等边三角形.