

# 电子的韧致辐射光子谱计算

張貴山 黃正德

本文计算了能量直到  $50 m_0c^2$  的电子在一些介质中的韧致光子能谱及韧致光子数, 得到了满意的结果。为研究  $\gamma$  射线在闪烁中的响应函数提供了韧致辐射数据。

## 一、引 言

Zerby 和 Moran<sup>[1]</sup>使用连续慢化模型和 Born 近似计算了电子的韧致辐射光子谱。在他们的计算中考虑了电离碰撞的能量损失, 而忽略了辐射碰撞的能量损失。在入射电子能量  $T \leq 10 m_0c^2$  时, 对 NaI 来说结果是好的。Giannini<sup>[2]</sup>等考虑了辐射碰撞的能量损失, 计算了电子的韧致辐射光子谱。电子入射能量为  $10 m_0c^2$  时, 辐射碰撞的能量损失是总损失的 20%, 电子入射能量越高, 辐射碰撞损失能量的比重越大。他们给出了入射电子能量  $T < 30 m_0c^2$  的计算结果。后来, Grosswendt<sup>[3]</sup>进一步考虑了密度效应修正和韧致辐射截面公式修正, 计算了入射能量直到  $40 m_0c^2$  的电子在 NaI, CsI, Si 和 Ge 中的韧致辐射光子谱。本文考虑了上述物理条件, 计算了能量直到  $50 m_0c^2$  的电子在 NaI, SiO<sub>2</sub>, Al 和 Ge 中的韧致辐射光子谱。与 Grosswendt 的结果符合得很好, 可为计算  $\gamma$  射线在相应介质中的能量沉积谱提供韧致辐射光子谱及其韧致辐射光子总数的数据。

## 二、理 论

### 1. 韧致辐射截面

计算电子在核电场中韧致辐射所用的 Born 近似截面, 在无电子屏蔽的情况下为<sup>[4]</sup>:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{3BN}}{dK} = & \frac{r_0^2 z^2 N}{137} \frac{P_1}{K} \frac{P_1}{P} \left\{ \frac{4}{3} - 2 E E_1 \frac{P_1^2 + P^2}{P_1 P} + \left( \frac{\varepsilon E_1}{P^3} + \frac{\varepsilon_1 E}{P_1^3} - \frac{\varepsilon \varepsilon_1}{P P_1} \right) \right. \\ & + L \left[ \frac{8}{3} \frac{E E_1}{P P_1} + \frac{K^2}{P^3 P_1^3} (E^2 E_1^2 + P^2 P_1^2) + \frac{K}{2 P P_1} \left( \frac{E E_1 + P^2}{P^3} \varepsilon \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{E E_1 + P_1^2}{P_1^3} \varepsilon_1 + \frac{2 K E E_1}{P^2 P^2} \right) \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $E$  为电子相对论总能量 (以  $m_0c^2$  为单位);

$K$  为韧致辐射光子能量 (以  $m_0c^2$  为单位);

$E_1 = E - K$ , 为次级电子总能量;

$P^2 = E^2 - 1$ ,  $P$  为电子动量;  $P_1^2 = E_1^2 - 1$ ,  $P_1$  为次级电子动量;

$\varepsilon = 2 \ln(E + P)$ ;  $\varepsilon_1 = 2 \ln(E_1 + P_1)$ ;  $L = 2 \ln((E E_1 + P P_1 - 1)/K)$ ;

$r_0 = 2.81785 \times 10^{-13} \text{cm}$ , 为电子经典半径;

$N$  = 原子密度 (以  $\text{cm}^{-3}$  为单位);  $Z$  为原子序数;

$\frac{d\sigma^{3BN}}{dK}dK$  表示具有能量  $E$  的一个电子所产生一个韧致辐射光子能量在  $(K, K+dK)$  间的截面。

考虑电子屏蔽,  $\gamma = 100 \frac{K}{E(E-K)Z^{1/3}}$  为物质的屏蔽效应, 当  $\gamma \gg 1$  时屏蔽可以忽略; 当  $\gamma = 0$  时屏蔽是完全的。对于中间情况, 方程(1)简化为 ( $E \gg 1$ )<sup>[5]</sup>:

$$\frac{d\sigma^{3BS(c)}}{dK} = \frac{4r_0^2 Z^2}{137} \cdot \frac{N}{K} \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{E-K}{E} \right)^2 \right] \left[ \frac{\phi_1(\gamma)}{4} - \frac{2}{3} \ln Z \right] - \frac{2}{3} \left( \frac{E-K}{E} \right) \left[ \frac{\phi_2(\gamma)}{4} - \frac{1}{3} \ln Z \right] \right\}, \quad (2)$$

$$\frac{d\sigma^{3BS(d)}}{dK} = \frac{4r_0^2 Z^2}{137} \frac{N}{K} \left[ 1 + \left( \frac{E-K}{E} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{E-K}{E} \right) \right] \times \left[ \ln \frac{2E(E-K)}{K} - \frac{1}{2} - c(\gamma) \right]. \quad (3)$$

其中,  $\phi_1(\gamma) = \phi_2(\gamma) + 0.5 \exp(-2.31\gamma) + 0.12 \exp(-19.8\gamma)$ ,  
 $\phi_2(\gamma) = 20.14 \exp(-0.151\gamma)$ ,  
 $c(\gamma) = 0.102 \exp(-0.151\gamma) + 0.47 \exp(-0.63\gamma)$ .

对于韧致辐射截面的修正, Fano<sup>[6]</sup>等人给出了与入射电子能量和其相互作用物质原子序数有关系的  $A(E)$  修正, 文献[3]上给出了  $Z=1, 11, 13, 32, 53$  和  $79$  (相应元素为 H, Na, Al, Ge, I 和 Au) 时的  $A(E)$  曲线值; Elwert<sup>[7]</sup>给出了库仑修正因子  $f(E)$ :

$$f(E) = \frac{\beta \{1 - \exp[-2\pi z / (137\beta)]\}}{\beta_1 \{1 - \exp[-2\pi z / (137\beta_1)]\}} \quad (4)$$

这里  $\beta = (E^2 - 1)^{1/2} / E$ ,  $\beta_1 = (E_1^2 - 1)^{1/2} / E_1$ 。最后我们给出的韧致辐射截面表达式为:

$$\left( \frac{d\sigma}{dK} \right)_E^i = \begin{cases} A(E)f(E) \frac{d\sigma^{3BN}}{dK}, & 0.04 < \frac{T}{m_0c^2} < 4, i=1, \\ A(E) \frac{d\sigma^{3BN}}{dK}, & 4 \leq \frac{T}{m_0c^2} < 30, 15 < \gamma, i=2, \\ A(E) \frac{d\sigma^{3BS(d)}}{dK}, & 4 \leq \frac{T}{m_0c^2} < 30, 2 < \gamma \leq 15, i=3, \\ A(E) \frac{d\sigma^{3BS(c)}}{dK}, & 4 \leq \frac{T}{m_0c^2} < 30, \gamma \leq 2, i=4, \\ \frac{d\sigma^{3BN}}{dK}, & 30 \leq \frac{T}{m_0c^2} < 100, 15 < \gamma, i=5, \\ A(E) \frac{d\sigma^{3BS(d)}}{dK}, & 30 \leq \frac{T}{m_0c^2} < 100, 2 < \gamma \leq 15, i=6, \\ A(E) \frac{d\sigma^{3BS(c)}}{dK}, & 30 \leq \frac{T}{m_0c^2} < 100, \gamma \leq 2, i=7. \end{cases} \quad (5)$$

这里  $T =$  入射电子动能。

## 2. 电子的阻止本领

根据电子在物质中的慢化理论, Rohreich 和 Carlson<sup>[8]</sup>给出了计算电子由于电离碰撞的能耗公式:

$$\left(-\frac{dE}{dX}\right)_I = \frac{2\pi r_0^2 Z N}{\beta} \left\{ \ln \left[ \frac{T^2(T+2)}{I^2} \right] + \frac{T^2/8 - (2T+1)\ln 2}{(T+1)^2} + 1 - \beta - \delta \right\}, \quad (6)$$

其伊  $T=E-1$ ,  $I=(9.76Z+58.8Z^{-0.19})\text{ev}$ ,  $\delta$  为密度效应引起的修正量, 由 Sternheimer 和 Peierls<sup>[9]</sup>给出。

Bethe 和 Heirler<sup>[10]</sup>给出了电子辐射碰撞的能耗公式:

$$\left(-\frac{dE}{dX}\right)_R = \int_0^T K \left(\frac{d\sigma}{dK}\right)_E dK. \quad (7)$$

电子在化合物中的阻止本领是把各种元素的阻止本领按其在化合物中所占重量百分比加起来, 由于电子波函数的影响, 这样的处理会产生误差的, 但在许多情况下这个误差是可以忽略的。

### 3. 韧致辐射光子谱及其韧致辐射光子数目

定义  $\left(\frac{dn}{dK}\right)_{E_0} dK$  表示初始能量为  $E_0$  的一个电子在物质中慢化而产生的能量在  $(K, K+dK)$  间的光子数, 于是初始能量为  $E_0$  的电子在化合物中慢化产生的韧致辐射光子谱为:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dn}{dK}\right)_{E_0} &= \int_{K+m_0c^2}^{E_0} \left(\frac{d\sigma}{dK}\right)_E / \left(-\frac{dE}{dX}\right)_E dE \\ &= \sum_{i=1}^7 \int_{g_{i-1}}^{g_i} \sum_{j=1} \left(\frac{d\sigma}{dK}\right)_{ij} / \sum_{j=1} \left(-\frac{dE}{dX}\right)_j dE. \end{aligned} \quad (8)$$

其中  $j$  表示化合物中的第  $j$  种元素,

$$\left(-\frac{dE}{dX}\right) = \left(-\frac{dE}{dX}\right)_I + \left(-\frac{dE}{dX}\right)_R, \quad (9)$$

$$g_0 = K + m_0c^2,$$

$$g_1 = 4 + m_0c^2,$$

$$g_2 = \frac{K}{2} + \frac{1}{2} \left( K^2 + \frac{400K}{15Z^{1/3}} \right)^{1/2}, \quad 4 \leq \frac{T}{m_0c^2} < 30,$$

$$g_3 = \frac{K}{2} + \frac{1}{2} \left( K^2 + \frac{400K}{2Z^{1/3}} \right)^{1/2}, \quad 4 \leq \frac{T}{m_0c^2} < 30,$$

$$g_4 = 30 + m_0c^2,$$

$$g_5 = \frac{K}{2} + \frac{1}{2} \left( K^2 + \frac{400K}{15Z^{1/3}} \right)^{1/2}, \quad 30 \leq \frac{T}{m_0c^2} < 100,$$

$$g_6 = \frac{K}{2} + \frac{1}{2} \left( K^2 + \frac{400K}{2Z^{1/3}} \right)^{1/2}, \quad 30 \leq \frac{T}{m_0c^2} < 100,$$

$$g_7 = E_0. \quad (10)$$

我们假定了  $g_0 < g_1 < g_2 < g_3 < g_4 < g_5 < g_6 < g_7$ , 当该条件不满足时, 方程(5)中只有一部分表达式出现在方程(8)中, 因而方程(8)被简化(见附录)。我们以  $K/T_0$  为光子能量单位, 则方程(8)写成:

$$\left(\frac{dn}{d(K/T_0)}\right)_{E_0} = \int_{K+m_0c^2}^{E_0} T_0 \left(\frac{d\sigma}{dK}\right)_E / \left(-\frac{dE}{dX}\right)_E dE. \quad (11)$$

初始能量为  $E_0$  的电子，在能量  $(K_{\min}, T_0)$  区间所发射的韧致辐射光子数目：

$$n(E_0, K_{\min}) = \int_{K_{\min}}^{T_0} dK \int_{K+m_0c^2}^{E_0} \left( \frac{d\sigma}{dK} \right)_E / \left( -\frac{dE}{dX} \right)_E dE. \quad (12)$$

一般地取  $K_{\min} = 0.04 m_0c^2$ 。

### 三、结 果

按上述计算公式，在 DJS-21 机上用 ALGOL 语言编制计算程序，对 NaI, SiO<sub>2</sub>, Al 和 Ge 四种物质作了计算。计算中，由于考虑  $f(E)$  效应，方程(8)在点  $E = K + 1$  积分发散，我们作了截断处理。计算固定能量的入射电子的韧致辐射光子谱上的每一点的韧致辐射光子计数，要对辐射碰撞的能量损失方程(7)求积分，为减少计算量，在对 NaI 作计算时，我们使用多项式拟合曲线做近似<sup>[2]</sup>：

$$-\left( \frac{dE}{dX} \right)_R = \begin{cases} 0.19838064 + 0.12668936 T + 0.033887377 T^2 - \\ - 2.7091189 \times 10^{-3} T^3 + 8.3158437 \times 10^{-5} T^4, \\ \quad \text{当 } 0.5 \leq T < 12.5 \text{ MeV}; \\ -1.0055797 \times 10^{-3} + 0.25698194 T - \\ 5.4409797 \times 10^{-3} T^2 - 1.5137426 \times 10^{-4} T^3 + \\ + 1.821316 \times 10^{-6} T^4, \\ \quad \text{当 } 12.5 \leq T < 22 \text{ MeV}. \end{cases} \quad (13)$$

并由此式外推到 25 MeV ( $T/m_0c^2 = 50$ )。为更方便和精确起见，电子的阻止本领皆使用了 Pages<sup>[1]</sup>等人的数据，用三点插值求其值。

计算的部分结果在图 1-5 和表 1 中给出。图 1 给出了 NaI 中电子慢化所产生的韧致辐射光子谱，电子入射动能为  $T_0 = 0.1, 0.5, 1, 5, 10, 20, 30, 50 m_0c^2$ ，虚线是没有考虑  $A(E)$  修正、 $f(E)$  和  $\delta$  因子以及电子的屏蔽影响分得不细，即象用公式(1)和(2)代入(11)式情形下计算的结果。虚线和实线所表示的韧致辐射光子谱分别与参考文献<sup>[2]</sup>和<sup>[3]</sup>符合得很好。从图中可见，当  $T_0 = 10, 20, 30 m_0c^2$  时，虚线与实线符合得较好； $T_0$  过低或过高时，符合得较差，部分原因是使用方程(13)代替方程(7)所引起的误差造成的，主要原因是由于对

表 1 NaI 中电子慢化所产生的能量在  $0.04m_0c^2$  以上的韧致辐射光子总数

初始电子能量, $m_0c^2$	韧致辐射光子总数			
	本文结果	[3]	本文结果*	[12]
0.1	0.0017	0.0021	0.0007	0.0009
0.5	0.0556	0.055	0.0333	0.0325
1	0.1591	0.156	0.0982	0.0972
5	1.1777	1.15	0.8095	0.8434
10	2.2226	2.17	1.8381	1.9770
15	3.2136	3.20	2.8913	3.1359
20	4.1256	4.10	3.9234	4.4144
30	5.7802	5.72	6.0758	/
50	8.5568	/	9.7325	/

\* 没有考虑修正因子  $A(D)$ ,  $f(E)$  和  $\delta$ ，以及电子屏蔽分得不细情况下的计算结果。

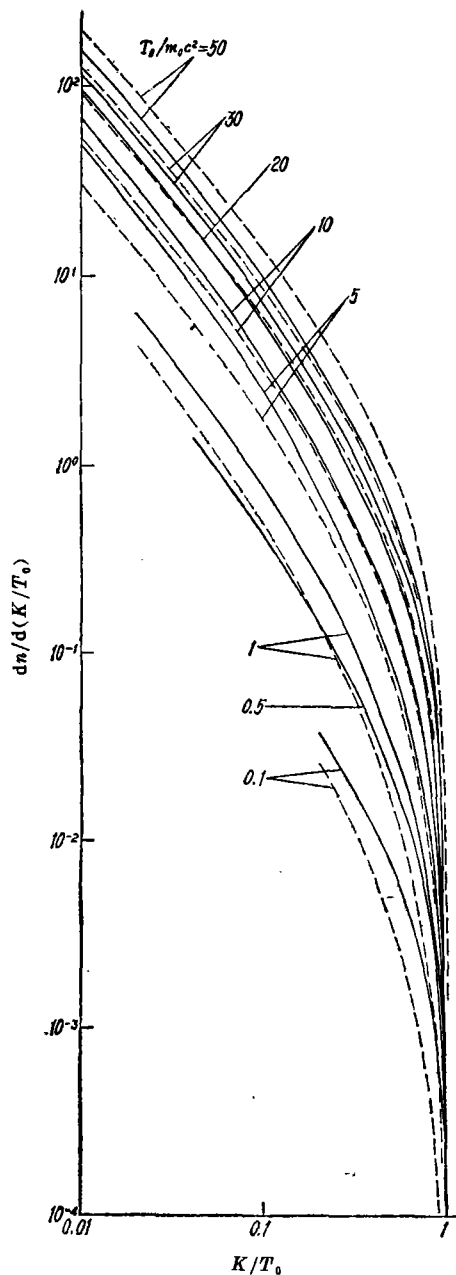


图 1 NaI 中电子慢化所产生的  
韧致辐射光子谱  
曲线是用初始能量标记的,  $T_0$  为入射电子动能  
( $m_0c^2$ ),  $K$  为光子能量( $m_0c^2$ )。

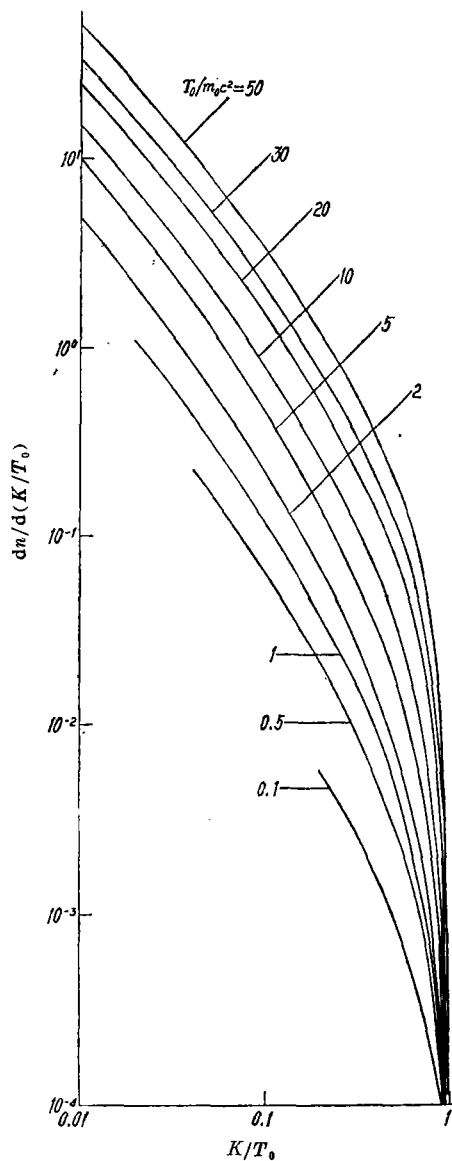


图 2 Al 中电子慢化所产生的  
韧致辐射光子谱  
(图注同图 1)

电子屏蔽情况考虑的不细所致。因而求高能入射电子的韧致辐射光子谱时, 需要用对屏蔽考虑分段较细的韧致辐射截面公式。图 2, 图 3 和图 4 分别给出了 Al,  $\text{SiO}_2$  和 Ge 中电子慢化所产生的韧致辐射光子谱, 电子初始入射能量  $T_0 = 0.1, 0.5, 1, 2, 5, 10, 20, 30, 50 m_0c^2$ 。图 4 中虚线为只考虑电离碰撞损失能量而忽略辐射碰撞损失能量的计算结果。从图 4 可见, 当  $T_0 < 5 m_0c^2$  时, 虚线与实线符合得较好; 当  $T_0 = 10 m_0c^2$  时, 实线比虚线低

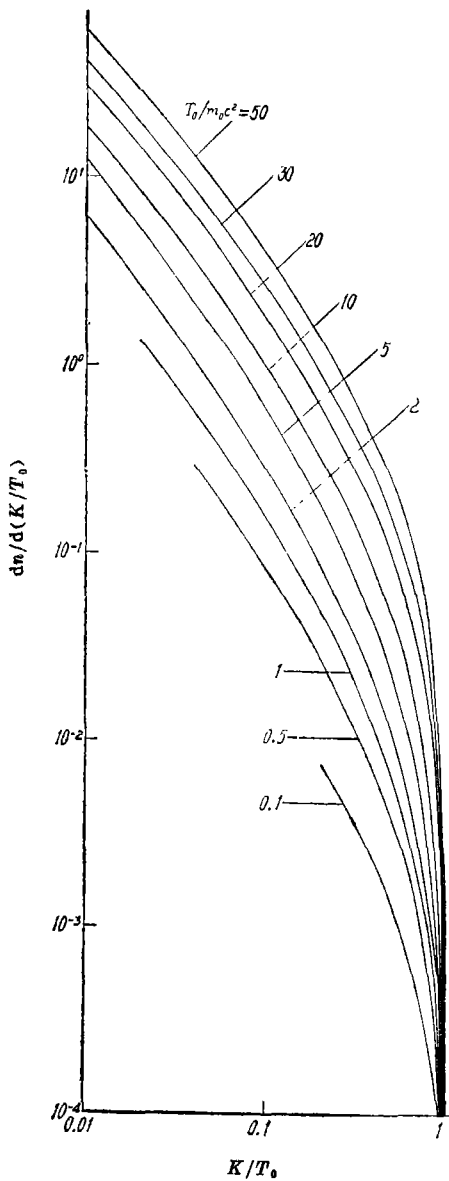


图 3 SiO<sub>2</sub> 中电子慢化所产生的韧致辐射光子谱

曲线是用电子初始能量标记的,  $T_0$  为电子入射能量( $m_0c^2$ ),  $K$  为光子能量( $m_0c^2$ )。

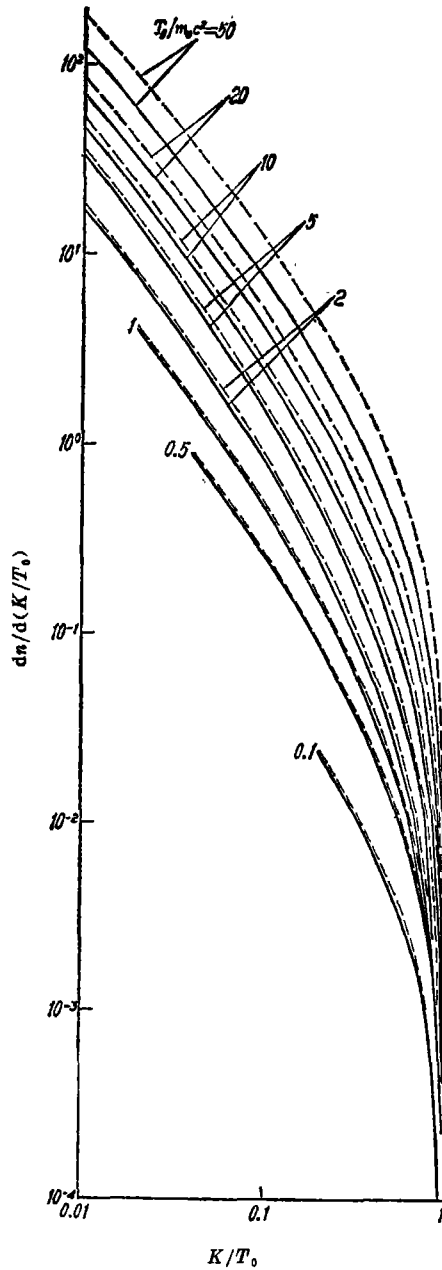


图 4 Ge 中电子慢化所产生的韧致辐射光子谱

(图注同图 3)

约 10.6%；当  $T_0=20 m_0c^2$  时，为 18.9%；当  $T_0=50 m_0c^2$  时，为 46.8%。这表明随着入射电子能量增加，辐射碰撞损失能量在总的损失能量中占的比重越大，因而在电子入射能量较高的情况下，不能忽略辐射碰撞的能量损失。表 1 给出了 NaI 中电子慢化所产生的能量在  $0.04 m_0c^2$  以上的韧致辐射光子总数，分别与 Grosswendt 和 Zerby 的结果符合得较好。

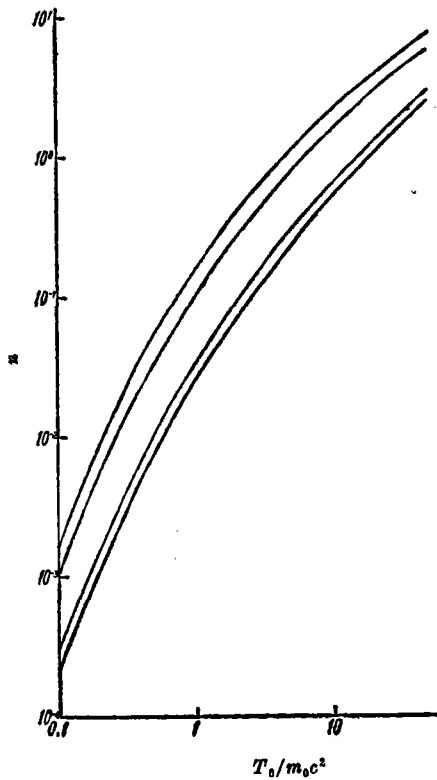


图 5 NaI, Ge, Al 和 SiO<sub>2</sub> 中电子慢化所产生的能量在 0.04~m<sub>0</sub>c<sup>2</sup> 以上韧致辐射光子总数曲线  
1—NaI; 2—Ge; 3—Al; 4—SiO<sub>2</sub>。

感谢丁大钊同志对本工作的指导。

### 附录

方程(8)的简化式。首先把方程(4)改写成:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\sigma}\right)_E^i = \begin{cases} A(E)f(E)\frac{d\sigma^{3BN}}{dK}, & 0.04 < \frac{T}{m_0c^2} < 4, i=1 \\ A(E)\frac{d\sigma^{3BN}}{dK}, & 4 \leq \frac{T}{m_0c^2} < 30, 15 < \gamma, i=2 \\ \frac{d\sigma^{3BN}}{dK}, & 30 \leq \frac{T}{m_0c^2} < 100, 15 < \gamma, i=2 \\ A(E)\frac{d\sigma^{3BS}}{dK}, & 4 \leq \frac{T}{m_0c^2} < 100, 2 < \gamma < 15, i=3 \\ A(E)\frac{d\sigma^{3BS(e)}}{dK}, & 4 \leq \frac{T}{m_0c^2} < 100, \gamma \leq 2, i=4. \end{cases} \quad (4')$$

对给定的人射电子能量  $E_0$  和韧致辐射光子能量  $K$ , 求出  $g_i (i=0, 1, \dots, 4)$ , 把方程(4')代入方程(8), 依据  $g_i$  间的大小关系给出方程(8)的简化式

$$\left(\frac{dn}{dK}\right)_{g_0} = \begin{cases} S_1(g_0, g_4, f_1), g_0 < g_4 < g_1, \\ S_2(g_0, g_4, f_2), g_1 < g_0 < g_4 < g_2, \\ S_3(g_0, g_4, f_3), g_1(g_2) < g_0 < g_4 < g_3, \\ S_4(g_0, g_4, f_4), g_1(g_2, g_3) < g_0 < g_4, \\ S_1(g_0, g_1, f_1) + S_2(g_1, g_4, f_2), g_0 < g_1 < g_4 < g_2, \\ S_1(g_0, g_1, f_1) + S_3(g_1, g_4, f_3), g_0(g_2) < g_1 < g_4 < g_3, \\ S_1(g_0, g_1, f_1) + S_4(g_1, g_4, f_4), g_0(g_2, g_3) < g_1 < g_4, \\ S_2(g_0, g_2, f_2) + S_3(g_2, g_4, f_3), g_1 < g_0 < g_2 < g_4 < g_3, \\ S_2(g_0, g_2, f_2) + S_4(g_2, g_4, f_4), g_1 < g_0 < g_2 < g_4, g_3 < g_2, \\ S_3(g_0, g_3, f_3) + S_4(g_3, g_4, f_4), g_1(g_2) < g_0 < g_3 < g_4, \\ S_1(g_0, g_1, f_1) + S_2(g_1, g_2, f_2) + S_3(g_2, g_4, g_3), g_0 < g_1 < g_2 < g_4 < g_3, \\ S_1(g_0, g_1, f_1) + S_2(g_1, g_2, f_2) + S_4(g_2, g_4, f_4), g_1(g_3) < g_2 < g_4, g_0 < g_1, \\ S_1(g_0, g_1, f_1) + S_3(g_1, g_3, f_3) + S_4(g_3, g_4, f_4), g_2 < g_1 < g_3 < g_4, g_0 < g_1, \\ S_2(g_0, g_2, f_2) + S_3(g_2, g_3, f_3) + S_4(g_3, g_4, f_4), g_1 < g_0 < g_2 < g_3 < g_4, \\ S_1(g_0, g_1, f_1) + S_2(g_1, g_2, f_2) + S_3(g_2, g_3, f_3) + S_4(g_3, g_4, f_4), \\ g_0 < g_1 < g_2 < g_3 < g_4. \end{cases}$$

其中

$$S_i(g_m, g_n, f_i) = \begin{cases} \int_{g_m}^{g_n} \sum_{j=1}^i \left(\frac{d\sigma}{dK}\right)_{ij} / \sum_{j=1}^i \left(\frac{dE}{dX}\right)_j dE, i=2 \\ \int_{g_m}^{g_n} \sum_{j=1}^i \left(\frac{d\sigma}{dK}\right)_{ij} / \sum_{j=1}^i \left(-\frac{dE}{dX}\right)_j dE, g_n < 31, i=2, \\ \int_{g_n}^{31} \sum_{j=1}^i \left(\frac{d\sigma}{dK}\right)_{ij} / \sum_{j=1}^i \left(-\frac{dE}{dX}\right)_j dE + \int_{31}^{g_n} \sum_{j=1}^{g_n} \left(\frac{d\sigma}{dK}\right)_{ij} / \sum_{j=1}^i \left(-\frac{dE}{dX}\right)_j dE, \\ g_m < 31 < g_n, i=2, \\ \int_{g_m}^{g_n} \sum_{j=1}^{g_n} \left(\frac{d\sigma}{dK}\right)_{ij} / \sum_{j=1}^i \left(-\frac{dE}{dK}\right)_j dE, g_m < 31, i=2. \end{cases}$$

### 参 考 文 献

[1] C. D. Zerby & H. S. Moran, ORNL-2454 (1958).  
 [2] M. Giannini et al., RT/FI (1969).  
 [3] B. Grosswendt, *Nucl. Instrum. Methods*, **116**, 97 (1974).  
 [4] W. Heitler, *The Quantum Theory of Radiation* (3rd ed.), Oxford Press, 1954, p. 245.  
 [5] H. W. Koch & J. W. Motz, *Rev. Mod. Phys.*, **31**, 920 (1959).  
 [6] U. Fano et al., *Phys. Rev.*, **112**, 1679 (1958).  
 [7] G. Elwert, *Ann. Physik*, **34**, 178 (1939).  
 [8] F. Röhrlich & B. C. Carlson, *Phys. Rev.*, **93**, 38 (1954).  
 [9] R. M. Sternheimer & R. F. Peierls, *Phys. Rev.*, **B 3**, 3681 (1971).  
 [10] H. Bethe & W. Heitler, *Proc. Roy. Soc.*, **A 146**, 83 (1934).  
 [11] L. Pages et al., *Atomic Data*, **4**, 1 (1972).  
 [12] C. D. Zerby, *Methods in Computational Physics* (Ed. B. Aloler et al.), Vol. 1, Academic Press, New York, 1963, p. 90.