

费米-狄拉克分布的实验验证*

鲁从勋 程向明 李 正

(西安交通大学理学院实验物理中心 710049)

摘 要 通过理论推导,用理想二极管外加磁场的方法,验证了真空中热电子发射的电子动能分布也符合费米-狄拉克分布.使量子统计学中的费米-狄拉克分布得到了推广.经过适当的数据处理,使复杂的微观量较容易地通过宏观量得以测量.

关键词 费米-狄拉克分布 费米能级 理想二极管

1 理论分析

在金属内部电子的能量遵从费米-狄拉克分布,费米分布函数为

$$g(\epsilon) = \frac{1}{\exp\{(\epsilon - \epsilon_f)/kT\} + 1} \quad (1)$$

式中 ϵ 是电子的能量, ϵ_f 是费米能级, k 是玻尔兹曼常量, T 是 K 氏温度. 对 $g(\epsilon)$ 求导得

$$g'(\epsilon) = \frac{dg(\epsilon)}{d\epsilon} = \frac{-\exp\{(\epsilon - \epsilon_f)/kT\}}{kT\{\exp\{(\epsilon - \epsilon_f)/kT\} + 1\}^2} \quad (2)$$

$g(\epsilon)$, $g'(\epsilon)$ 的理论曲线如图 1 和图 2 所示.

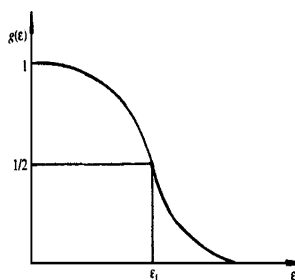


图 1

由于无法直接测量金属内部电子能量的分布,我们对真空中热电子发射的电子动能分布进行了测量.电子在金属内部的运动与电子刚脱离金属发射到真空中的运动条件是完全不同的.由于电子逸出金属表面时,要消耗一部分能量用作逸出功,因此从金属内部电子的能量 ϵ 减去其逸出功 A ,即可得到真空中热电子发射的动能 ϵ_k

$$\epsilon_k = \epsilon - A \quad (3)$$

另外,电子脱离金属之后,不再受到金属内部其他带电粒子的影响, ϵ_f 应该为零,但由于真空与金属表面接触处,存在有电子气形成的偶电层,而该偶电层所产生的电位降的值为 ϵ_f/e .也就是说这个偶电层的势垒值,等于该温度下的费米能级 ϵ_f .

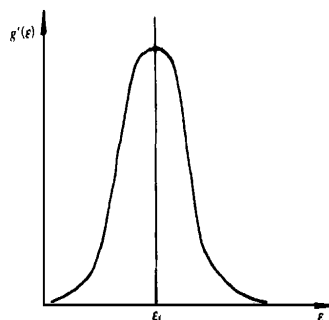


图 2

考虑到这两个因素之后,我们可得出:真空中热电子发射的电子在刚脱离金属表面后的动能分布应该遵从修正后的费米分布函数,即

$$g(\epsilon_k) = \frac{1}{\exp\{(\epsilon_k - \epsilon_f)/kT\} + 1} \quad (4)$$

对(4)式求导得

$$g'(\epsilon_k) = \frac{dg(\epsilon_k)}{d\epsilon_k} = \frac{-\exp\{(\epsilon_k - \epsilon_f)/kT\}}{kT\{\exp\{(\epsilon_k - \epsilon_f)/kT\} + 1\}^2} \quad (5)$$

从(4), (5)两式看出,真空中热电子发射的电子动能分布规律,与金属内部电子按能量分布的规律完全相同,都遵从费米-狄拉克分布.

2 实验方法及数据处理

用螺线管套在理想二极管的外面, 通以直流电流, 在理想二极管不加阳极电压的情况下, 直接测量阳极电流的变化情况. 其电路如图 3 所示.

由于理想二极管的特殊结构, 从灯丝发射出的电子沿半径方向飞向二极管的阳极. 因为阳极电压等于零, 所以电子不受外电场力的作用, 而保持着从金属表面逸出时的初动能, 飞向阳极形成饱和阳极电流. 因为电子从金属表面逸出时的初动能各不相同, 如何将它们按相等的动能间隔区分开来, 并且求出电子数目的相对值, 便成为该实验的关键.

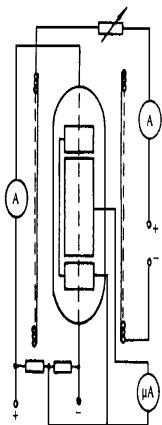


图 3

由图 3 可知, 从理想二极管发射出的电子, 沿半径方向飞向二极管的阳极, 在螺线管所产生的磁感应强度 B 的作用下, 电子将受到洛伦兹力 $F = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, 而作匀速圆周运动, 洛伦兹力是向心力. 由于 $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$, 洛伦兹力可用标积表示

$$f_{\perp} = Bev = mv^2/R \quad (6)$$

式中 v 是电子在二极管的半径方向的速度, 或者电子的速度在半径方向上的分量为

$$v = \frac{BeR}{m} \quad (7)$$

(7) 式中 R 是电子作匀速圆周运动的半径, m 是电子的质量, B 是螺线管中间部分的磁感应强度, 其表达式为

$$B = \frac{\mu_0 N I_B}{L + D} \quad (8)$$

(8) 式中 μ_0 是真空中磁导率, N 是螺线管的总匝数, L 和 D 分别是螺线管的长度和直径, I_B 是通过螺线管的电流强度. 将 (7), (8) 式代入 (6) 式得真空中电子的动能为

$$\epsilon_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\mu_0^2 N^2}{2(L^2 + D^2)} R^2 \left(\frac{e}{m}\right)^2 I_B^2 \quad (9)$$

由图 4 可看出, 若 R 大于 $d/4$ (d 是圆柱面阳极的直径), 电子就能到达阳极, 形成阳极电流. 若 R 小于 $d/4$, 电子就不能到达阳极, 这一部分电子对阳极电流无贡献. 可见电子作匀速圆周运动的半径 (决定于 I_B) 直接影响阳极电流的大小. 将 $R = d/4$ 代入 (9) 式得

$$\epsilon_k = K I_B^2 \quad (10)$$

其中

$$K = \frac{\pi^2 \times 10^{-14} N^2 d^2 m}{2(L^2 + D^2)} \left(\frac{e}{m}\right)^2$$

为一常量.

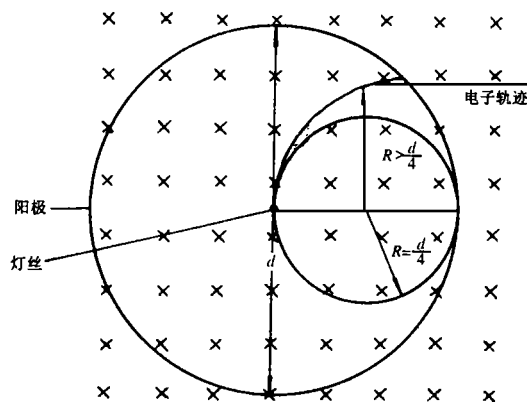


图 4

可见真空中热电子发射的电子动能与螺线管中的电流强度的平方成正比, 而洛伦兹力不改变电子的动能, 它只影响电子作匀速圆周运动的半径大小. 对于动能一定的电子, 向心力越大匀速圆周运动的半径越小. 当动能增加 $\Delta\epsilon_k$ 时, 将有相应数量的电子, 因其圆周运动的半径小于 $d/4$ 而不能到达阳极, 所以阳极电流将减小 ΔI_P . 又因为 ϵ_k 与 I_B^2 成正比, 所以可以用 I_B^2 代替变量 ϵ_k 进行实验及数据处理.

实验中, 设灯丝电流稳定不变, 阳极电压等于零, 理想二极管的阳极饱和电流为

式中的 n_0 以及下面的 n_1, n_2, n_3, \dots , 均为单位时间内到达阳极的电子数目. 当 I_B^2 以相等的改变量依次增加下去, 将得到一组方程

$$\begin{cases} I_{P_1} = n_1 e \\ I_{P_2} = n_2 e \\ \dots \end{cases} \quad (12)$$

由 (11), (12) 式可得

$$\begin{cases} \Delta I_{P_1} = I_{P_0} - I_{P_1} = (n_0 - n_1)e = \Delta n_1 e \\ \Delta I_{P_2} = I_{P_1} - I_{P_2} = (n_1 - n_2)e = \Delta n_2 e \\ \dots \end{cases} \quad (13)$$

方程组 (12) 中各式除 (11) 式得

$$\begin{cases} I_{P_1}/I_{P_0} = n_1/n_0 \\ I_{P_2}/I_{P_0} = n_2/n_0 \\ \dots \end{cases} \quad (14)$$

方程组 (13) 中各式除 (11) 式得

$$\begin{cases} \Delta I_{P_1}/I_{P_0} = \Delta n_1/n_0 \\ \Delta I_{P_2}/I_{P_0} = \Delta n_2/n_0 \\ \dots \end{cases} \quad (15)$$

为了适应理论上的要求, 在操作上我们事先选好 I_B^2 的值, 使其等间隔的增加, 然后以其平方根的值, 作为实际测量时的电流值, 进行实验测量.

3 实验结果与讨论

实验数据见表 1. 以 I_{P_i}/I_{P_0} 为 Y 轴, I_B^2 的值为 X 轴, 作图可得到费米分布函数 $g(\epsilon) \sim \epsilon$ 的曲线, 如图 5 所示. 以 $\Delta I_{P_i}/I_{P_0}$ 为 Y 轴, 相应的 I_B^2 的值为 X 轴, 作图可得到 $g(\epsilon) \sim \epsilon$ 的曲线图和直方图, 如图 6 所示.

表 1 一组实验数据

I_B^2	0.000	0.040	0.080	0.120	0.160	0.200	0.240	0.280	0.320
I_B	0.000	0.200	0.283	0.346	0.400	0.447	0.490	0.529	0.566
I_{P_i}	92.6	92.1	91.3	89.1	83.8	72.0	54.3	36.0	20.3
I_{P_i}/I_{P_0}	1.000	0.995	0.986	0.962	0.905	0.778	0.586	0.389	0.219
$I_{P_i} - I_{P_{i+1}}$	0.5	0.8	2.2	5.3	11.8	17.7	18.3	15.7	9.6
$\Delta I_{P_i}/I_{P_0}$	0.00540	0.00864	0.0238	0.0572	0.127	0.191	0.198	0.169	0.104
I_B^2	0.360	0.400	0.440	0.480	0.520	0.560	0.600	0.640	0.680
I_B	0.600	0.632	0.663	0.693	0.721	0.748	0.774	0.800	0.825
I_{P_i}	10.7	6.0	3.5	2.4	1.8	1.3	1.1	1.0	0.9
I_{P_i}/I_{P_0}	0.116	0.0648	0.0378	0.0259	0.0194	0.0140	0.0119	0.0108	0.00972
$I_{P_i} - I_{P_{i+1}}$	4.7	2.5	1.1	0.6	0.5	0.2	0.1	0.1	0.1
$\Delta I_{P_i}/I_{P_0}$	0.0508	0.0270	0.0119	0.00648	0.00540	0.00216	0.00108	0.00108	0.00108
I_B^2	0.720	0.760	0.800	0.840	0.880	0.920	0.960	1.000	
I_B	0.848	0.872	0.894	0.916	0.938	0.959	0.980	1.000	
I_{P_i}	0.8	0.5	0.5	0.4	0.3	0.3	0.3	0.2	
I_{P_i}/I_{P_0}	0.00864	0.00540	0.00540	0.00432	0.00324	0.00324	0.00324	0.00216	
$I_{P_i} - I_{P_{i+1}}$	0.3	0.0	0.1	0.0	0.0	0.1			
$\Delta I_{P_i}/I_{P_0}$	0.00324	0.00	0.00108	0.00	0.00	0.00108			

经多次测量重复性较好. 从实验得到的两条费米统计分布曲线与理论曲线相一致. 归一化的程度也较高, 实验值为 0.996, 误差只有 0.4%. 从两条实验曲线上都可看出: 热电子发

射的电子能量的最可几值在 $1/2$ 附近, 且与理论相符. 而且在 $g(\epsilon) = 1/2$ 处所对应的 ϵ_k 应该是该材料在实验温度下的费米能级. 本实验所测钨的费米能级 $\epsilon_F = 2.06\text{eV}$. (下转 12 页)

未修正前的测量值计算出的 ϵ_0 随间距 d 的增加而增加. 说明当平行板的实际电容量较大而分布电容又较小时, 分布电容的影响较小. 随平行板实际电容量的减少, 分布电容的影响则越显突出.

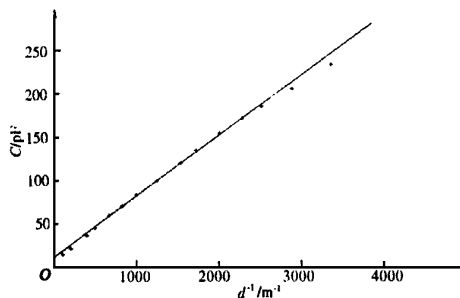


图 2

其次, 可以看出, 由平行板电容修正后的测量值计算的电容率 ϵ_0 , 在 d 小于 2mm (或 D/d 大于 50) 时基本上为一常量. 当 d 大于 2mm (或 D/d 小于 50) 时, 由于边缘效应的影响, ϵ_0 渐渐远离公认值, 这既符合电磁学理论, 也与上

面提到的数据取值范围是一致的. 以上分析还证实, 在保持接线分布不变的情况下, 测量过程中, 只改变平行板电容器的间距 d , 可近似认为分布电容为一常量.

为保证测量数据准确, 实验中还应注意接线长度应尽可能短, 并在测量过程中保持布线位置不变, 以减小分布电容的变化所带来的影响. 在用交流电桥测量电容的过程中, 手不能接触电容的任何部位, 人体也应尽量远离电容, 以减少人体感应所引起的误差. 图 1 的实验装置与交流电桥配合还可以用来测量固体电介质的介电系数^[2].

4 参考文献

- 1 Tyler F. A laboratory manual of physics. Edward Arnold Limited, 1977. 107~108
- 2 王良才等. 介电系数的测量. 物理实验, 1988, 8 (3) 110

(2000-01-31 收稿, 2000-07-14 收修改稿)

(上接 9 页)

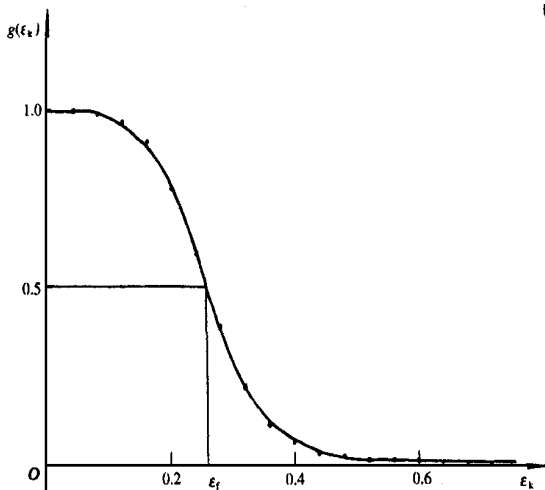


图 5

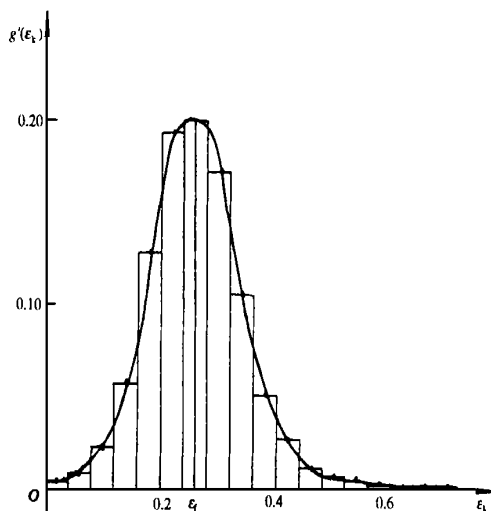


图 6

4 参考文献

- 1 基泰尔. 固体物理学导论. 北京: 科学出版社, 1979

- 2 黄昆, 谢希德. 半导体物理学. 北京: 科学出版社, 1958
- 3 梅逸 J 等. 统计力学. 北京: 高等教育出版社, 1957

(2000-07-03 收稿)