

# 小提琴发声原理及泛音规律的探究

刘盖特, 陈祎璇

(复旦大学 物理学系)

**摘要:** 本文主要介绍小提琴的结构, 以及部分部件的声学作用, 最后利用傅立叶变换对一些音的频率进行研究。

**关键词:** 小提琴; 低音梁; 傅立叶变换; 泛音; 十二平均率。

## 引言

小提琴属于弓弦乐器, 是现代管弦乐团弦乐组中最重要的乐器。小提琴主要的特点在于其辉煌的声音、高度的演奏技巧和丰富、广泛的表现力。又被称作为乐器中的女王。

## 实验原理

### 1. 小提琴的构造

小提琴的构造纷繁复杂, 主要分为拉弦系统和共振箱系统, 这里着重介绍几个对小提琴发声起着决定性因素的部件。

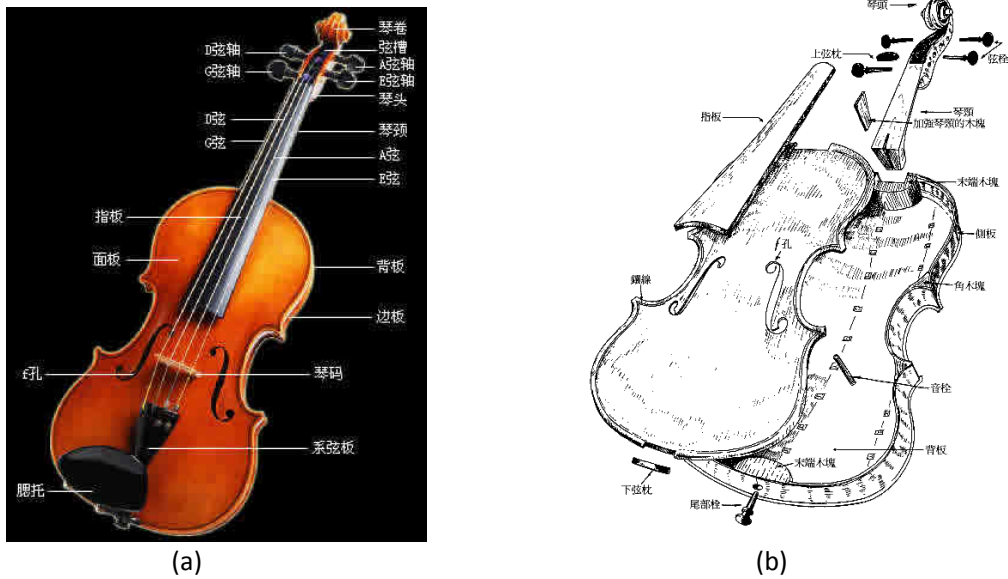


图 1.1.1 小提琴构造图 (a)外部构造 (b)内部构造

如图 1.1(a)所示, 拉弦系统主要由弦轴、琴弦、琴码组成。弦轴是呈圆锥形的四根硬木

栓，位置在琴头部分，通过弦轴箱侧面的锥形孔予以固定，四根琴弦分别缠绕弦轴，转动弦轴可以调整琴弦所需的张力，以便调音。琴码是一块薄的木片，安放在两个 f 孔之间的面板上，用于支撑琴弦。这是小提琴中最复杂的部分，它的厚薄、材质、形状、弦的间隔、高度、弧度、洞的大小以及所处的位置都会影响琴的音色。

如图 1.1(b)所示，共振箱内最重要的两个部件是音柱和低音梁。音柱，指共鸣箱内部支撑在面板和背板之间的圆柱形木柱，位于琴马高音脚的一边，既支撑住面板，又将面板的震动传递到背板。它的长短、位置都会影响小提琴的音色。低音梁，指共鸣箱内部粘在面板上的长木条，位于琴马低音脚的一侧，用于传递四根琴弦的振动。低音梁的存在，加大了振动幅度，而又不增加面板的厚度与重量。

当琴弓在琴弦上施加一个连续的力，琴弦的振动首先传给琴码，再由琴码传给音柱，引起整个共振腔以相同频率振动，增大的音量，美化了音色。

## 2. 小提琴发声原理

(1) 小提琴拉弦部分的构成是在 2 个固定点间张紧着的琴弦，当演奏者用琴弓摩擦琴弦时，弦受激产生振动，弦振动频率满足弦振动定律。

$$f_T = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{2L} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

其中， $L$  为琴弦长度， $\mu$  为琴弦线密度， $F$  为弦的张力。

事实上，琴弦受激产生振动时，并不仅仅只产生频率为  $f$  的振动，实际上所得的振动是标准振荡方式的结合。当我们在大约五分之一处波动琴弦时，会产生频率分别为  $f_1, 2f_1, 3f_1$  等等的波，而其振幅也将有不同程度的衰减，如图 1.2.1 所示：

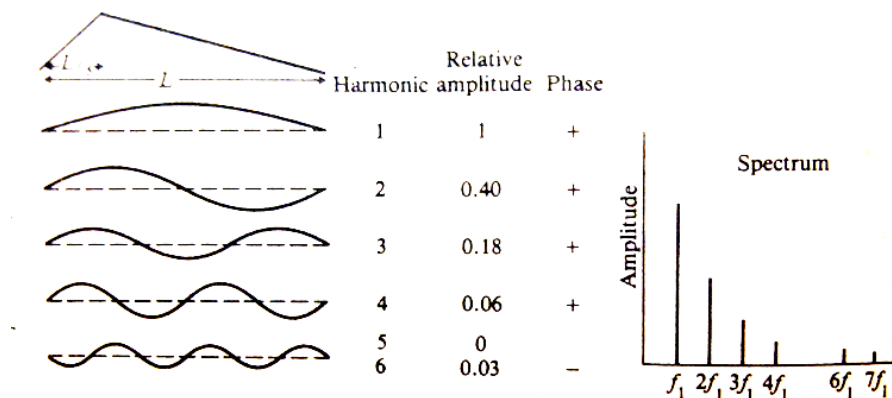


图 1.2.1 拨弦的频率与振幅

所以在测量时，我们并不仅仅只会得到单一频率的波，但由于  $f_1$  频率下的强度是最大的，

所以人耳在聆听单音时很难听出更高频率的音夹杂其中。

(2) 事实上，小提琴的演奏是由琴弓和琴弦共同完成的，在演奏者用琴弓摩擦琴弦时，琴弦呈现的其实完全是另一种形状的波形。

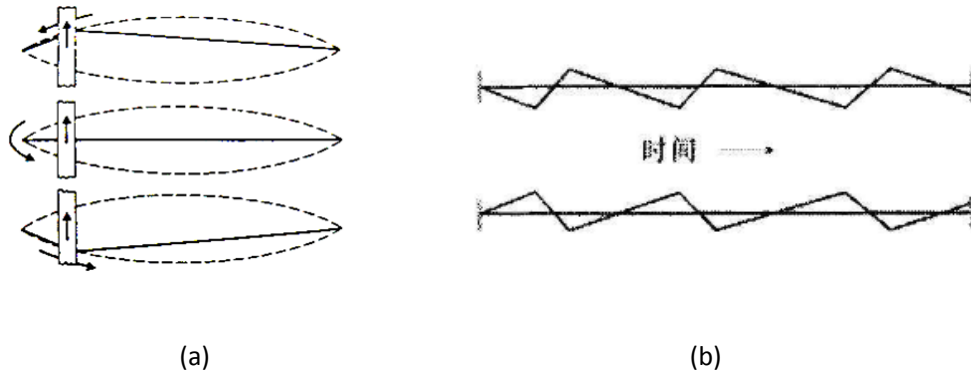


图 1.2.2. 拉弦的波形

如 1.2.2 所示，当一个弓子拉过弦的时候，琴弦震动呈凸透镜状，如一条光滑的带子，实际弓子下面的琴弦很接近折线状。这种现象不连续性从琴码处被反射回来，这并不是擦有松香的结果，而是由于运弓中弓毛与琴弦之间不断的扭结和放松。产生三角波状曲线。

(3)和弦频率：我们常常注意到，当我们同时听到两个音调的音时，往往也会听到第三个更低的音。这是因为如果有两种不同频率分别为  $f_1$ ,  $f_2$  的声波，会激发产生频率为  $f_2-f_1$  (或  $f_1-f_2$ ) 的波，这就是为什么会听到更低的音的原因。

另外，还有一些不易被察觉到的频率的叠加波  $f_2-2f_1$ 、 $2f_2-3f_1$ 、 $f_2+2f_1$  等等，两个频率的相互作用同样会产生这些组合频率的声波，但由于强度非常低，无法被人耳察觉到。如图 1.2.3 所示

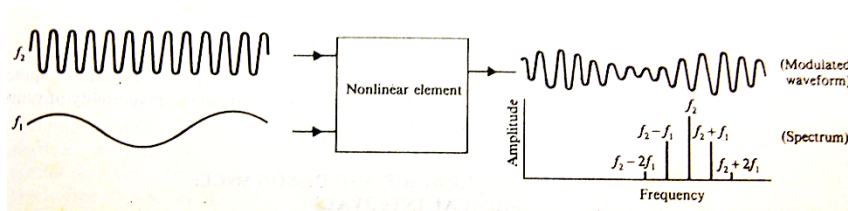


图 1.2.3. 和弦的频率

## 实验内容

1. 利用压电陶瓷、音频线与真空泥制作信号采集设备；
2. 编写可以对采集好的 wav 文件进行傅立叶分析的代码；
3. 利用已知频率为 440Hz 的国际标准音 a1（即 A 弦空弦的音）对数据处理代码进行验证；
4. 利用验证过的代码对和弦以及泛音进行傅立叶分析；
5. 拆解一个废弃的小提琴仔细观察低音梁、音栓。

## 实验现象及分析

### 1. 音频采集设备的制作



图 3.1.1 自制的音频采集设备

音频采集设备如图 3.1.1 所示，我们将一根普通音频弦的一端剥开，令其中红蓝两根接线柱分别接压电陶瓷的正负极，然后将压电陶瓷利用真空泥黏到小提琴琴身上，再把音频线另一端接入计算机，于是就制作出了一个简易的音频采集设备。

这套设备的优点是简单易做，而且实验发现，在计算机的内置麦克风关掉后采集到的信号中几乎没有外界的杂音；缺点是灵敏度过高，使得信号经常超出信号采集软件量程，使得波峰波谷的特征不太明显。这个缺点使得波形趋同，导致周期变短，在后续实验中我们无法得到真正的振幅频谱图，只能根据频谱图的一个峰得到乐音的频率。

## 2. 利用 A 弦空弦的音检验信号处理代码

由于采集到的信号是强度在时间域内的变化，为了得到信号的频率，我们需要对信号做傅立叶变化，将其变换至频率域，给出频谱图，然后对其最主要的成分进行判断。我们知道，小提琴 A 弦空弦的音即为 440Hz 的国际标准音 a2，所以我们可以利用校好音的小提琴来演奏这个音，并对其进行分析，检验编好的程序给出的频率是否是 440Hz。程序给出的频谱图如图 3.2.1 所示。

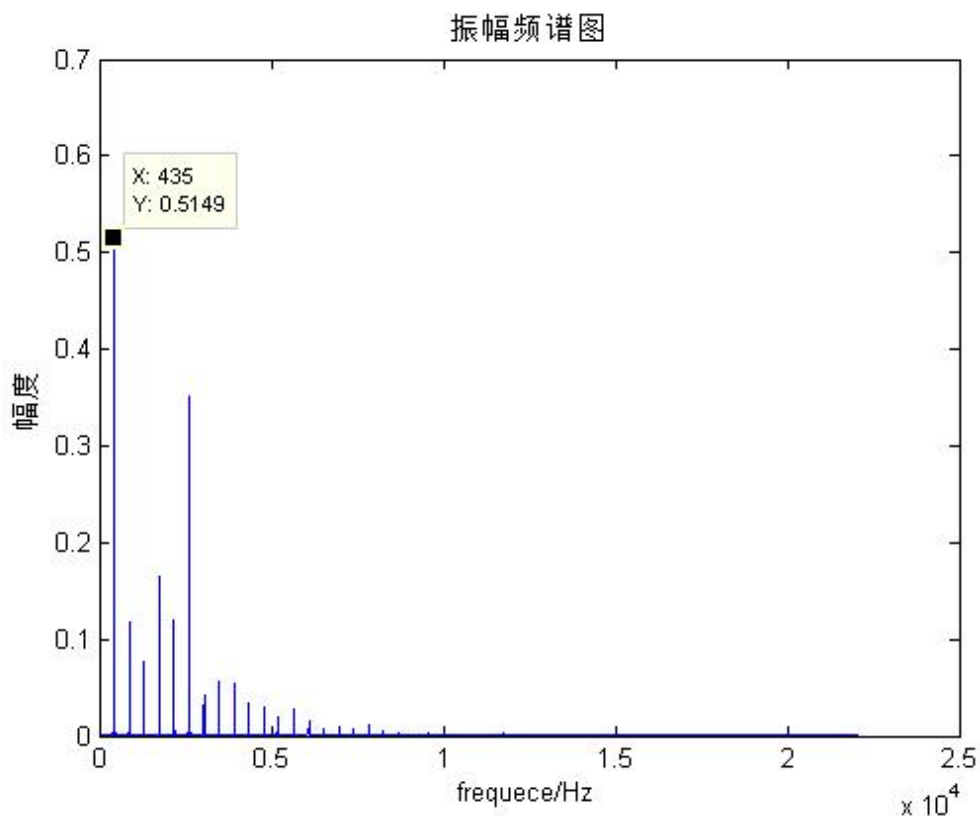


图 3.2.1 A 弦空弦的振幅频谱图

可以发现，最主要的频率为 435Hz，相对误差 1.1%，考虑到校音不够准确，这个误差是可以接受的。记  $f = 435\text{Hz}$ ，那么图中其他的峰值分别为  $2f, 3f, 4f \dots$  这也就验证了小提琴的弦和普通的弦一样，产生驻波时存在高频成分。

## 3. 泛音的频谱分析

需要注意的是，泛音有两个截然不同的含义，在英语中分别为 overtone 和 harmonics，前者是指弦振动时  $2f, 3f, 4f \dots$  成分，而后者是指弦乐器中的一种特殊演奏技法，其音响优美奇特，音色晶莹剔透，也被称为钟声或钟音奏法。下面我们将要着重分析的就是后一种泛音，这种泛音又分为自然泛音与人工泛音。

我们先来看看自然泛音，所谓自然即指这些泛音都是基于空弦的振动。以黎国荃改编的古曲《渔舟唱晚》为例，第三部分的最后两个小节的乐谱如图 3.3.1(a)所示，而经过正确的演奏，实际发出的音的音高却与如图 3.3.2(b)所示的乐谱等效。



图 3.3.2 《渔舟唱晚》第三部分最后二小节

不仅是具体的音高变了，连音高的变化趋势也发生了变化。

下面我们将具体地分析一下为什么会出现这种情况。考虑到 D 弦空弦时的音为  $d_1$ ，频率  $f_{d_1} = 293.7\text{Hz}$ ，图 3.3.1(a)中第一个音所在位置的基音为  $g_1$ ， $f_{g_1} = 392.0\text{Hz}$ ，根据弦振动公式  $f_T = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{2L} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ ，我们可以得到  $L_{g_1}/L_{d_1} = f_{d_1}/f_{g_1} = 293.7\text{Hz}/392.0\text{Hz} \approx 3/4$ ，所以演奏  $g_1$  时手指大概处于 D 弦靠近琴头的四等分点的位置。于是我们猜想，在这个位置利用泛音进行演奏就相当于在空弦振动的基础上在四分之一长度的地方强制加入一个波节，使得振动频率变为空弦的四倍，即实际音为  $d_3$ 。对这个音进行傅里叶分析得到如图 3.3.2 所示的频谱图， $1178\text{Hz}$  与  $f_{d_3} = 1174.600749\text{Hz}$  十分接近，这也就验证了我们之前的猜想。

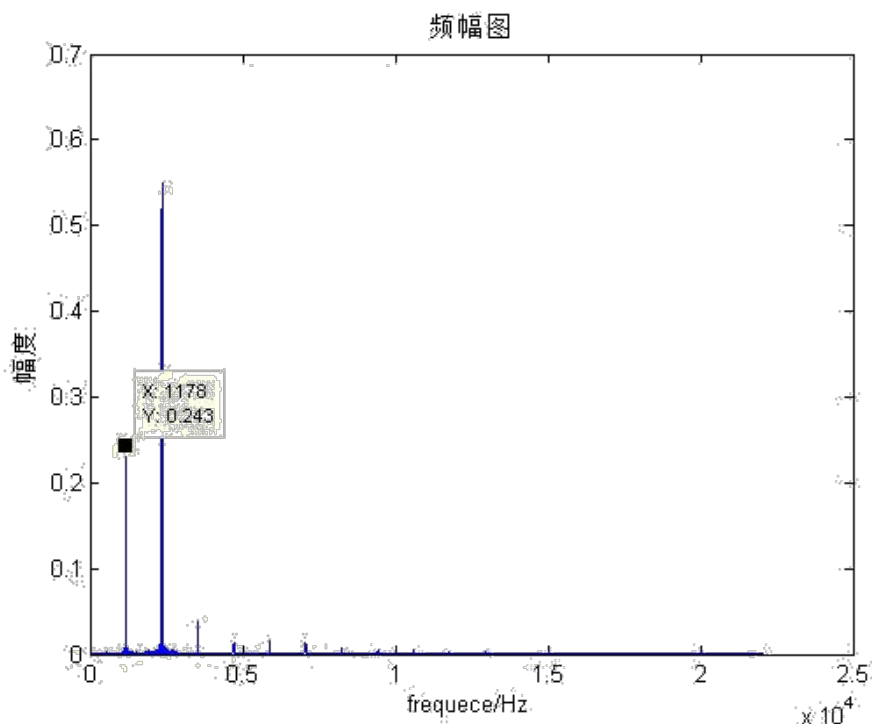


图 3.3.2 D 弦上  $g_1$  泛音的频谱图

根据与之前类似的方法，我们对第二个音，即 A 弦上  $e_2$  进行分析，发现它大概处于 A

弦靠近琴头的三等分点的位置，为了形成稳定的驻波，振动频率应为空弦振动频率的三倍。故利用泛音的技巧进行演奏得到的实际的音频率应是在这个位置利用基音进行演奏的三倍，实际的音就是 e3。第三个音，即 D 弦上的 b1，发现它大概处于 D 弦靠近琴头的第二个五等分点，形成稳定驻波时，振动频率应为空弦振动频率的五倍。故利用泛音的技巧进行演奏得到的实际的音频率应是在这个位置利用基音进行演奏的三倍，实际的音就是 #f3。所以才出现图 3.3.2 所示的差异。

下面再来看看人工泛音，人工泛音与自然泛音的区别就是需要食指与小指一起进行演奏，食指紧按琴弦，起到自然泛音时琴头处的固定波节的作用，然后小指轻放在琴弦上提供另外一个波节。以黎国荃改编的古曲《渔舟唱晚》第三部分的第一个音为例，乐谱中的音如图 3.3.3(a) 所示，而经过正确的演奏，实际发出的音的音高却与如图 3.3.3(b) 所示的音等效。



图 3.3.3 《渔舟唱晚》第三部分第一个音

我们发现 #f1 与 b1 之间差 5 个半音，与 d1 与 g1 之间的差异相同，于是我们猜想 b1 的位置应该也是一个用食指按住 #f1 形成的“等效弦”的四等分点。计算得到  $L_{b1}/L_{\#f1} = f_{\#f1}/f_{b1} = 369.99/493.88\text{Hz} \approx 3/4$ ，于是根据之前的分析，此处泛音得到的音应该是“等效弦”空弦四倍，即 1479.89 的 #f3。频谱分析的结果如图 3.3.4 所示，佐证了我们的猜想。

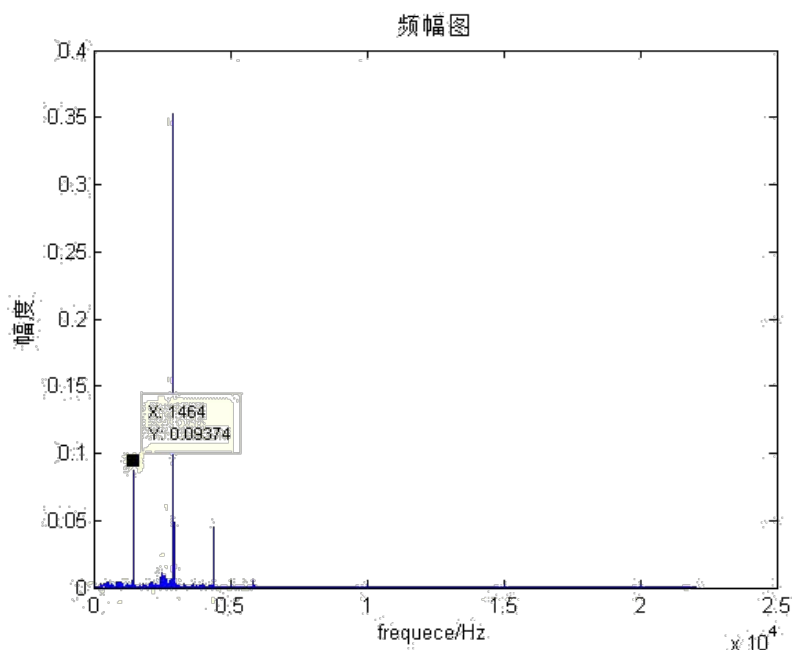


图 3.3.4 #f1, b1 人工泛音的频谱图

#### 4. 十二平均律

在之前的实验中，我们发现不同音之间的频率比常常出现  $3/4$ ， $2/3$ ， $2/5$  等看起来很有规律的数字，这不是一个巧合，而是隐藏在现代乐音划分中的十二平均率的必然结果。

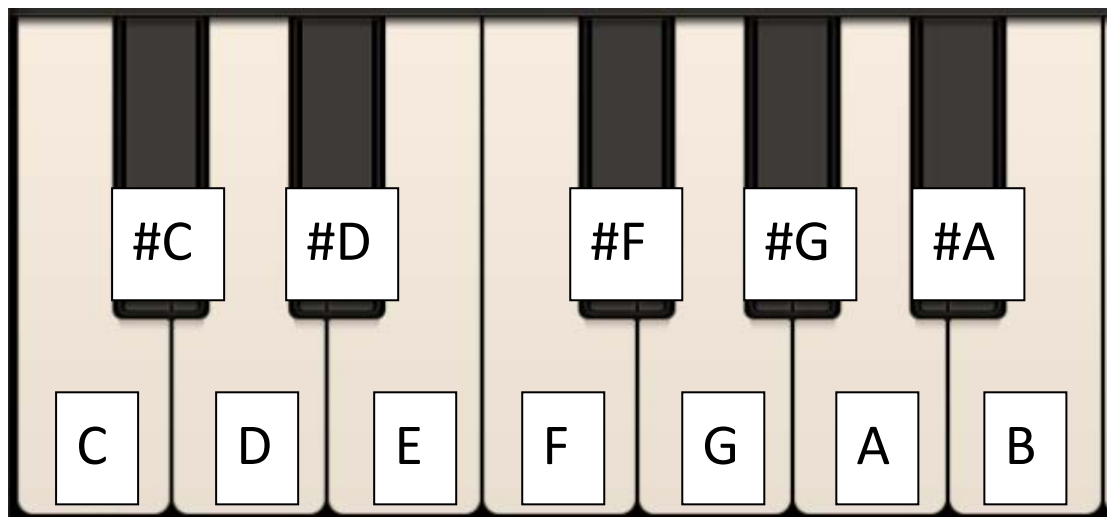


图 3.4.1 钢琴一个八度内十二个音

钢琴一个八度内的键如图 3.4.1 所示，共有十二个键，即十二个音，每个音之间的差为一个半音。相差一个八度的音频率相差一倍，而为了达到十二平均或者十二等程，即相邻半音频率之比相同，显然，相邻半音之间的频率比为 $\sqrt[12]{2}$ 。

我们来回顾一下上一部分泛音中讨论的那几个泛音。D 弦上的  $g_1$ 、 $b_1$ ，A 弦上的  $e_2$ ，与空弦的之间分别有 5、9、7 个音，对应频率比分别为 $\sqrt[12]{2^5} = 1.334840$ 、 $\sqrt[12]{2^9} = 1.681793$ 、 $\sqrt[12]{2^7} = 1.498307$ ，差不多刚好就是  $4/3$ 、 $5/3$ ， $3/2$ ，于是根据形成稳定驻波的条件，才能在这几个位置出现频率稳定的波即稳定的乐音。人工泛音的出现的规律与此类似，因此为何相差 5 个半音的位置进行人工泛音恰好也使频率翻 4 倍就显得很好理解了。

### 实验感想与建议

经过这一学期的实验，首先学习到了电焊的技术，之后对小提琴以及十二平均律的认识更加深入。科学与艺术是相辅相成的，人们对波的研究就起源于乐器，而随着对波认识的加深，对乐器的理解也更加深入。原来演奏时只是机械地模仿老师，而现在能够理解为什么那些位置就有那些音，有些音为什么按的稍微偏差一点就出不来，演奏时为何要对左手手指的力度有精确的控制。也知道了小提琴为什么离不开低音梁，材质不同薄厚不同的琴马为何提



琴的音色影响十分严重。通过对泛音的研究我终于明白了之前学琴时为什么总有四个音无法演奏正确，现在能够把它们演绎出来真是太开心了！

这一学期的实验也培养了我们实验的自主性和动手能力。自己焊制的信号采集设备，自己设计的实验步骤，自己编写的代码。虽然还是略显稚嫩，有些山寨，但这已经足以给我们带来很大的成就感，真真正正地体会到了实验的快乐。

我们也意识到想要做出结果离不开大家的帮助。感谢吕景林老师在我们纠结于如何能采集到琴发出的声音而又能不被外界干扰时提示我们可以用压电陶瓷；感谢潘笃武老师多次来给我们鼓励并借给我们一本很宝贵的书，说句题外话，真希望我老的时候也能有他那样的活力；感谢杨凯鸣同学在期中报告时提的一个关于泛音的问题给了我很大的启发；感谢杨煜同学在我们拆解提琴遇到困难时给我们展示了锯木头的技巧……

不过也有三个遗憾。一个是采集设备太山寨导致波峰波谷的很多细节被掩盖掉，本来相对不同琴弦以及左手揉弦非揉弦以及右手顿弓与非顿弓的波形差异进行些比较，但是没有成功。还有一个是课时还是有点短，还没来得及仔细研究共振腔上孔的大小对音色有何影响。最后一个遗憾是找不到大型的全息成像设备，无法对演奏时共振腔的振动情况进行观测。

总而言之，这绝对是我大学以来修的最有意思的实验课！

## 参考文献

- [1]. The science of sound, Thomas D. Rossing; Addison Wesley; 2001-12-28
- [2]. Waves (Berkeley Physics Course, Vol. 3), Frank S. Crawford Jr.; McGraw-Hill; 1968-6-1
- [3]. Wikipedia 音高 <http://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%9F%B3%E9%AB%98>
- [4]. Wikipedia overtone <http://en.wikipedia.org/wiki/Overtone>
- [5]. 电子小提琴与常规小提琴的无线载波传输演示, 祝孝正; 物理实验 2006,26(3)
- [6]. 渔舟唱晚, 黎国荃; 中国小提琴名曲荟萃 1, 上海音乐出版社, 2001-8-1