教学研究

带电导体系的电场能量

冀 敏 蒋 平
（复旦大学物理系，上海 200433）

摘 要 为清晰、透彻地理解静电学中涉及的各种能量的基本概念，本文从场的观点和电荷的观点分析讨论了该问题，并选择了几个熟悉的例子来说明本文认识的合理性. 依照场的观点，真空中两个体积足够小的电荷的静电场能量密度为：$\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_1^2+\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_2^2+\varepsilon_0 \boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2$. 其中，$\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_1^2$ 和 $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_2^2$ 分别为两个电荷单独存在时的电场能量密度，而交叉项 $\varepsilon_0 \boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2$ 则为两个电荷电场的相互作用能量密度；它们的空间积分分别为两个电荷单独存在时的静电场能量和两个电荷电场之间的相互作用能量. 而从电荷观点出发，此3个静电场的能量分别为两个电荷的固有能和彼此之间的静电相互作用势能. 推广到有限体积的孤立带电导体以及带电导体系的情形，可知孤立带电导体的固有能就是其上所有无限小电荷元间的相互作用势能之和，而带电导体系的电场能也就是体系所包含的所有电荷元间的相互作用势能的总和.

关键词 电场能；电势能；固有能

ENERGIES OF ELECTRIC FIELD OF CHARGED CONDUCTORS

Ji Min Jiang Ping
(Department of Physics, Fudan University, Shanghai 200433)

Abstract Different energies involved in electrostatics are discussed based on the electric field and charge. Accordingly, the related basic concepts could be understood more thoroughly and clearly. It has been shown that the energy of the electrostatic field of two changes, each of which has small volume, could be expressed either as the integral of the density of field energy with the point of view of electric field or as the sum of the intrinsic energies of these two individual charges and the electric potential energy between them. Then the intrinsic energy of an isolated changed conductor could be shown as just the sum of the electric potential energies between any pair of infinitesimal charge elements on the conductor. Also the total energy of the electric field of a system consisting of charged conductors could also be shown as just the sum of the electric potential energies among all the infinitesimal charge elements within the system. Several familiar examples are selected to show the reasonability of the present understanding.

Key words energy of electric field; electric potential energy; intrinsic energy

高等院校基础物理课程中静电学是极重要的一部分，而其中涉及能量的章节更是不可或缺的内容. 在一些教材中经常出现电场能、电势能、电荷之间的相互作用能以及静电能等等的术语不一而足. 但是这些术语涉及的物理意义以及相关的

收稿日期：2015-03-26

作者简介：冀敏，女，副教授，主要从事物理教学与研究，科研方向为医学物理. jimin01@fudan.edu.cn
通讯作者：蒋平，男，教授，主要从事物理教学与研究，科研方向为凝聚态物理.

基本概念有的并不很清晰，或者理解不够深刻. 本文旨在将同静电相关的能量统一于场的观点或电荷的观点之中，以便对其有更为透彻的认识.

先从最简单的真空中两个体积足够小的荷电导体的电场出发，设荷电量分别为 q_1 和 q_2. 空间位矢为 $\boldsymbol{r}$ 的任意一场点 P 的电场强度 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ 为 q_1 与 q_2 的场强 $\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r})$ 和 $\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r})$ 的叠加，即

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r}) \tag{1}$$

其中，

$$\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}) = \frac{q_1 \boldsymbol{e}_1}{4\pi\varepsilon_0 \mid \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1 \mid^2} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r}) = \frac{q_2 \boldsymbol{e}_2}{4\pi\varepsilon_0 \mid \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2 \mid^2} \tag{3}$$

$\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 为 q_1 和 q_2 的位矢，$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 为从 q_1、q_2 指向 P 点的单位矢量. 下面为简单计将略去式(1)中的矢量 $\boldsymbol{r}$，即取

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$$

空间电场能量密度为

$$\rho_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mid \boldsymbol{E} \mid^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mid \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 \mid^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_1^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_2^2 + \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2 \tag{4}$$

式(4)对全空间积分即得电场能量. 式(4)右边第一项 $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_1^2$ 与第二项 $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_2^2$ 正是 q_1 与 q_2 各自单独存在时的电场能量密度 ρ_1 与 ρ_2；其全空间积分即为 q_1 的电场能 W_1 与 q_2 的电场能 W_2. 第三项 $\varepsilon_0 \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2$ 为交叉项 ρ_{12}. 可以证明这一项的全空间积分 W_{12} 为[1]

$$W_{12} = \varepsilon_0 \int \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2 \mathrm{d}\tau = q_1 \phi_1 = q_2 \phi_2 \tag{5}$$

其中，ϕ_1 为电荷 q_2 的电场 $\boldsymbol{E}_2$ 在 q_1 处的电势，因而 $q_1\phi_1$ 即为 q_1 在 q_2 的电场中的电势能；而 ϕ_2 为电荷 q_1 的电场 $\boldsymbol{E}_1$ 在 q_2 处的电势，$q_2\phi_2$ 即为 q_2 在 q_1 的电场中的电势能. 一个电荷在另一电荷电场中的电势能正是彼此间的相互作用能. 就是说 ρ_{12} 的全空间积分正是 q_1 与 q_2 的相互作用能 W_{12}. 亦可写成

$$W_{12} = \frac{1}{2}(q_1\phi_1 + q_2\phi_2) \tag{6}$$

式(4) 可推广至 n 个分别带电荷 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 的导体组成的体系的电场能量密度

$$\rho_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_1^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_2^2 + \cdots + \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_n^2 + \varepsilon_0 \sum_i \sum_{j\neq i} \boldsymbol{E}_i \cdot \boldsymbol{E}_j$$

$$\rho_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\sum_i E_i^2 + 2\sum_i \sum_{j\neq i} \boldsymbol{E}_i \cdot \boldsymbol{E}_j \right) \tag{7}$$

式中，$\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_i^2 (i=1,2,\cdots,n)$ 为第 i 个电荷 q_i 单独存在时的电场能量密度；而 $\varepsilon_0 \boldsymbol{E}_i \cdot \boldsymbol{E}_j$ 的全空间积分为 q_i 在 q_j 的电场中的电势能. 就是说上式第二项为所有电荷之间相互作用的场能密度. 令这一项的全空间积分为 W_I，则

$$W_I = \frac{1}{2}\sum_i q_i \phi_i \tag{8}$$

其中，ϕ_i 为除 q_i 自身之外其他所有电荷的电场在 q_i 处的电势.

由此可见场能密度交叉项的空间积分就是电荷间的相互作用势能，各个电荷电场强度的交叉项代表相互作用的能量密度. 对比式(7)的第二项和式(8)已可看到静电相互作用势能——电势能既可从场的观点也可从电荷的观点理解；而这二者之间的联系正在于电荷之间的相互作用通过电场传递，电荷间的相互作用就是电场的相互作用.

应该说明的是，虽然式(4)或式(7)在基础物理教学实践中不常使用，却包含着丰富的物理内涵. 事实上式(4)原则上适用于任意两个荷电导体构成的体系. 以带正电的无限大金属薄板与一个带电量不大的正电荷 q 的金属小球为例. 设板面与纸面垂直，取 x 轴在纸面上沿板的法线向右，原点在极板上. $x>0$ 处板的电场沿 x 轴正向，$x<0$ 处沿 x 轴负向. 设小球的位置用 x_0 代表，其电场以小球为中心径向辐射. 令板的电场为 $\boldsymbol{E}_1$，小球电场为 $\boldsymbol{E}_2$. 注意在板上与球上电荷分布不变的情形下式(4)的第一项和第二项的全空间积分不因小球的位置而变化，只有交叉项及其全空间积分即势能受小球位置的影响. 因此电场能的变化就只是相互作用能即势能的变化. 电场能量变化表示电场做功，因而必有电场力存在. 本例即属此情形. 设板的位置固定，由于体系具有平行于板面的平移对称性，当小球沿平行于板平面移动时电场能量不变，说明电场力并无平行于板面的分量. 体系能量只同 x_0 有关. 设 $x_0>0$，则在小球右边 $\boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2>0$，在平板左边同样有 $\boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2>0$，而在板与球之间 $\boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2<0$. 如球的位置向右移动，则球右边 $\varepsilon_0 \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2$ 的空间积分不变，而板-球之间 $\varepsilon_0 \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2$ 空间积分的绝对值增加，板左边 $\varepsilon_0 \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2$ 的空间积分减少；以致板-球相互作用的能量即势能下降. 而且，相对于其他方向小球沿 x 轴方向移动时势能变化率最大；换言之小球在板的电场中的势

物理与工程 Vol.25 No.3 2015

能梯度沿 x 轴负向. 小球势能的负梯度就是板对球的静电作用力，显然此时板对球的电场力应沿板的法向指向右方，与熟知的常识相符.

值得注意的是式(7)和式(8)同样适用于单个的带电导体，只要将其中的 q_i 视为分布在导体表面的任一电荷元 Δq_i. 于是带电总量为 Q 的导体的电场能 W_t 可写成

$$W_t=\frac{1}{2}\varepsilon_0\sum_i\int|\Delta\boldsymbol{E}_i|^2\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2}\sum_i\phi_i\Delta q_i \quad (9)$$

其中，$\Delta\boldsymbol{E}_i$ 为电荷元 Δq_i 的场强，ϕ_i 为除 Δq_i 之外所有其他电荷元 Δq_j 在 Δq_i 处的电势，而 $\sum\limits_i\Delta q_i=Q$. 其实，$\phi_i$ 再加上 Δq_i 自身对电势的贡献 $\Delta\phi_i$ 就是导体的电势 ϕ

$$\phi=\phi_i+\Delta\phi_i \quad (10)$$

因为导体的电势就是分布在其表面上的所有电荷的贡献之和.

不难看出，式(10)中 $\Delta\phi_i$ 的绝对值远比 ϕ_i 的绝对值小. 事实上 ϕ_i 为将单位正电荷从导体表面移至无穷远处时 Δq_i 之外所有电荷元 Δq_j 共同产生的电场所做的功. 若将这一电场记为 $\boldsymbol{E}'$，则

$$\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{E}-\frac{\Delta q_i}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^2}\boldsymbol{r}_i^0 \quad (11)$$

$\boldsymbol{E}$ 为导体在场点 $\boldsymbol{r}$ 处的电场强度，而式(11)第二项则为 Δq_i 在该场点处的场强 $\Delta\boldsymbol{E}_i$，$\Delta\boldsymbol{E}_i=\frac{\Delta q_i}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^2}\boldsymbol{r}_i^0$，式中，$\boldsymbol{r}_i$ 为 Δq_i 的位矢，而 $\boldsymbol{r}_i^0$ 为从 Δq_i 指向该场点的单位矢量. 这一项对应的电场力所做的功与 Δq_i 成正比，为一小量，在极限情形为零. 因此，在极限情形

$$\int_A^\infty\boldsymbol{E}'\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\rightarrow\int_A^\infty\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\phi \quad (12)$$

A 为导体所在的位置. 从而在极限情形 ϕ_i 无限趋近 ϕ，即 $\phi_i\rightarrow\phi$. 注意在静电平衡时导体应为等势体，于是式(9)第二项可化为

$$\frac{1}{2}\sum_i\phi\Delta q_i=\frac{1}{2}\phi Q \quad (13)$$

其中，ϕ 即为导体的电势，是其上所有电荷的总贡献. 进一步可以看出，由于 $\Delta\boldsymbol{E}_i$ 与 Δq_i 成正比，式(9)第一项和 Δq_i 的平方成比例，相对于第二项为高级小量. 因此在极限情形可略去第一项而将单个荷总电量 Q 导体的电场能写为

$$W_t=\frac{1}{2}\phi Q \quad (14)$$

从上面的分析可以看出单个导体的电场能就是其上各个电荷元间相互作用势能的总和. 因此，有的作者称这一能量为固有能或“自能”.

既然式(14)代表单个导体的电场能，当同时存在多个导体，各自带电量为 Q_i 的情形，$\frac{1}{2}\phi_iQ_i$ 就是第 i 个带电导体的电场能，对所有导体累加的总和即为式(7)第一项的全空间积分. 于是带电导体系的总电场能 W_T 便可写成

$$W_T=\frac{1}{2}\sum_i\phi_iQ_i+\frac{1}{2}\sum_i\phi_i{}'Q_i$$

式中，ϕ_i'为除去 Q_i 外其他所有导体上的电荷的电场在第 i 个导体处的电势，从而可将上式化为

$$W_T=\frac{1}{2}\sum_i\Phi_iQ_i \quad (15)$$

式中

$$\Phi_i=\phi_i+\phi_i' \quad (16)$$

则为所有电荷，包括 Q_i 自身在第 i 个导体处对电势贡献的总和.

以上用不太严格的办法得出式(15)，其实这一公式可以严格推导得出[1]. 式(15)提供一种从电荷观点计算荷电导体系总电场能量的方法，只需记得式中 Φ_i 为所有电荷，包括 Q_i 自身对第 i 个导体电势的贡献；而其物理意义可以理解为电场能量可视为体系中所有电荷元相互作用势能的总和.

在式(15)中，虽然形式上只出现各个导体上的总电荷 Q_i，并不意味着电荷在导体上的分布对电场能全无影响. 例如，设想两个相距不远的金属球 A 与 B，A 球带正电荷 Q，而 B 球不带电. 当只有 A 球时，根据式(14)电场能为$\frac{1}{2}\phi Q$，ϕ 为 A 球自身的电势. 当有 B 球时，在 A 球电场影响下 B 球上要出现感应电荷. 在靠近 A 球的近端出现感应负电荷，而在远端出现等量的正电荷. 此时，由于 B 球的总电荷仍为零，按照式(15)空间总电场能为$\frac{1}{2}\phi'Q$. ϕ'为 A、B 两球上的电荷对 A 球电势贡献的总和，由于 B 球近端为负电荷，易见 $\phi'<\phi$，即感应电荷虽不改变 B 球上的总电荷量，却使 A 球电势因而总电场能下降. 其原因是感应电荷的出现是由于 B 球中的电子在 A 球电场力作用下由远端向近端输运. 这一过程电场力做正功导致电场能下降.

必须看到，虽然形式上式(8)和式(15)类似，其实含义迥异. 式(8)中的 ϕ_i 为除 q_i 以外所有其他电荷对其所处位置电势的贡献，该式只代表电荷之间的总相互作用能，只是电场能的一部分，不包括单个电荷对电场能的贡献，即不包括固有能.

至于式(15)则是带电导体系的总电场能,既包括固有能,也包括相互作用能;其中 Φ_i 是所有电荷对第 i 个导体电势贡献的总和.将式(7)与式(15)相比,在计算电场能量方面前者更具基础性意义,而后者在实用上往往更为方便.下面通过几个大家耳熟能详的例子来具体认识各个公式的具体作用.

例1 半径为 R 带电量为 Q 的孤立导体球的电场能 W.由场能密度的定义可知

$$W=\frac{1}{2}\varepsilon_0\int_R^{\infty}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} \tag{17}$$

导体球的电势

$$\phi=\int_R^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

根据式(14)

$$W=\frac{1}{2}\phi Q=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

上式结果和式(17)完全一样.显然 ϕ 为总电量 Q 的所有电荷元对导体球电势贡献的总和.当然这里将无限远处取为电势的零点.

例2 球形电容器.设电容器的两极板分别为半径是 R_1 和 R_2 的同心球壳,$R_2>R_1$,极板上的电荷为 $+Q$(内球壳)和 $-Q$(外球壳).众所周知,电场只存在于两球壳之间,场强

$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},\quad R_1<r<R_2$$

电场能

$$W=\frac{1}{2}\varepsilon_0\int_{R_1}^{R_2}E^2 4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \tag{18}$$

易知内球壳电势

$$\Phi_1=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\left(\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}\right)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

而外球壳处的电势

$$\Phi_2=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=0$$

于是由式(15)

$$W=\frac{1}{2}[\Phi_1 Q+\Phi_2(-Q)]=\frac{1}{2}\Phi_1 Q$$

恰与式(18)一致.

我们还可分别考察 Q 和 $(-Q)$ 的电场能以及它们之间的相互作用能 W_+、W_- 以及 $W_\pm$.

$$W_+=\frac{\varepsilon_0}{2}\int_{R_1}^{\infty}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1}$$

同理 $$W_-=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$W_\pm$ 可写成

$$W_\pm=(-Q)\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=-\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

以上3式相加恰为 $\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$,和式(18)一致.

当然还可以将 W 表示成 $\frac{Q^2}{2C}$,$C=4\pi\varepsilon_0\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}$ 正是熟知的球形电容器的电容.由此可见 $\frac{Q^2}{2C}$ 为电容器贮存的总电场能,而不仅是两球壳上电荷彼此间的相互作用能.

应该说明的是,除式(4)和式(7)外本文的讨论都是在导体分布在有限空间,电场并不延伸至无穷远处的前提之下的.因此,原则上不适用于理想无限大平板电容器的情形;但仍可根据本文的观点对实际情形作一些有益的讨论.

例3 理想无限大电容器.将其看作两个带电导体,仍可应用式(4).设用 $\boldsymbol{E}_+$ 和 $\boldsymbol{E}_-$ 分别表示正极板和负极板的电场,则在电容器外部 $\boldsymbol{E}_+=-\boldsymbol{E}_-$,$E_+^2=E_-^2$,因而 $\rho_e=0$,符合电场仅集中于电容器内部的实际.在电容器内部 $\boldsymbol{E}_+=\boldsymbol{E}_-$,$\rho_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0(2E_+)^2=2\varepsilon_0\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)^2=\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0}$.其中,$\sigma$ 为极板电荷面密度的绝对值.实际电容器极板面积 S 总是有限的,$\sigma=\frac{Q}{S}$,Q 为极板带的电量.如忽略边缘效应,电场总能量 $W=\rho_e Sl$,l 为极板间距.注意极板间电场强度 $E=2E_+=2E_-=\frac{V}{l}$,V 为电容器两板间的电压,可得 $W=\frac{1}{2}QV$,这正是熟知的结果.而根据式(15),$W=\frac{1}{2}Q(\Phi_+-\Phi_-)=\frac{1}{2}QV$,当然二者相同.但应注意 Φ_+ 和 Φ_- 都是正负极板上所有电荷对两极板电势贡献的总和.值得注意的是,由于极板上的电荷量在理想情形下为无限大,单个极板的固有能和彼此间的相互作用能均发散.

由以上数例可以使我们体会到应用式(15)可计算单个荷电导体或荷电导体系的电场能,使用式(8)则可计算两个荷电导体或多个荷电导体之间的相互作用能.但在对与这些能量相关的基本概念的理解方面式(7)却更为有益也更为深刻.

参 考 文 献

[1] 蔡聖善,朱耘.经典电动力学[M].上海:复旦大学出版社,1985:90-94.

[2] 张三慧.大学物理学(第三册)电磁学[M].2版.北京:清华大学出版社,1990:80.

■