College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

高等数学
习题全解指南

上册

同济·第七版

同济大学数学系 编

高等教育出版社

College Mathematics Guidance Series
大学数学学习辅导丛书

高等数学
习题全解指南

上册

同济·第七版

同济大学数学系 编

College Mathematics Guidance Series
大学数学学习辅导丛书

GAODENG SHUXUE XITI QUANJIE ZHINAN

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是与同济大学数学系编写的《高等数学》（第七版）相配套的学习辅导书，由同济大学数学系的教师编写。本书内容由三部分组成，第一部分是按《高等数学》（第七版）（上册）的章节顺序编排，给出习题全解，部分题目在解答之后对该类题的解法作了小结、归纳，有的提供了多种解法；第二部分是全国硕士研究生入学统一考试数学试题选解，所选择的试题以工学类为主，少量涉及经济学类试题；第三部分是同济大学高等数学试卷选编以及考题的参考解答。

本书对教材具有相对的独立性，可为学习高等数学的工科和其他非数学类专业学生以及复习高等数学准备报考硕士研究生的人员提供解题指导，也可供讲授高等数学的教师在备课和批改作业时参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题全解指南：同济第7版．上册/同济大学数学系编．--北京：高等教育出版社，2014.7

ISBN 978-7-04-039691-1

Ⅰ．①高… Ⅱ．①同… Ⅲ．①高等数学-高等学校-题解 Ⅳ．①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第095897号

策划编辑	王　强	责任编辑	于丽娜	特约编辑	张让让	封面设计	王凌波
版式设计	于　婕	插图绘制	杜晓丹	责任校对	刘丽娴	责任印制	朱学忠

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	高教社（天津）印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	25.25	版　　次	2014年7月第1版
字　　数	460千字	印　　次	2014年7月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	36.70元

物 料 号　39691-00

前言

由同济大学数学系编写的《高等数学》(第七版)已作为“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材于2014年正式出版。本书是《高等数学》(第七版)的配套用书,主要是为学习高等数学的大学生以及复习高等数学准备报考硕士研究生的人员提供一本解题指导的参考书,也可供讲授高等数学的教师在备课和批改作业时参考。

本书内容由三部分组成,第一部分是《高等数学》(第七版)的习题全解,包括各章的习题与总习题及解答。在解答中,有的题在解答之后,以注释的形式对该类题的解法作了归纳小结,有的题提供了常用的具有典型意义的多种解法。第二部分是全国硕士研究生入学统一考试数学试题选解,包括函数、极限、连续,一元函数微分学,一元函数积分学,微分方程,空间解析几何与向量代数,多元函数微分学,多元函数积分学,无穷级数等八项内容,每项选编的题量在30题左右,其中不乏近几年入学统一考试的试题。在每道试题的前面都注明了试题的年份及类别,如(2010. Ⅰ)表示为2010年第一类考题。所选择的试题以工科类为主,少量涉及经济学类试题,每道试题都给出了解题的思路与方法,有的还给出了多种解法,以供读者参考。第三部分是同济大学高等数学试卷选编,这部分已作了全部更新,按上、下册内容,选了期中、期末各两套试卷,并提供了试题的参考解答。

本书由同济大学数学系的教师编写,其中第一部分第一、九章,第二部分(一)、(二)、(六)由邱伯驺完成;第一部分第二、三、八章由徐建平完成;第一部分第四、五、六章,第二部分(三)由朱晓平完成;第一部分第七、十二章,第二部分(四)、(八)由应明完成;第一部分第十、十一章,第二部分(五)、(七)由郭镜明完成;第三部分由朱晓平完成。

在使用本书时,建议读者在个人学习、练习的基础上,再加以参考、对照,找出自己在知识掌握方面的不足,学习分析、解题的方法和思路,学会举一反三,采取这种方式参考本书,必能从中获益。本书中存在的问题,欢迎广大专家、同仁和读者批评指正。

编　者

二〇一四年六月

目录

一、《高等数学》(第七版)上册习题全解

第一章　函数与极限 …… 3

习题 1－1　映射与函数 …… 3
习题 1－2　数列的极限 …… 12
习题 1－3　函数的极限 …… 16
习题 1－4　无穷小与无穷大 …… 20
习题 1－5　极限运算法则 …… 23
习题 1－6　极限存在准则　两个重要极限 …… 27
习题 1－7　无穷小的比较 …… 29
习题 1－8　函数的连续性与间断点 …… 31
习题 1－9　连续函数的运算与初等函数的连续性 …… 35
习题 1－10　闭区间上连续函数的性质 …… 39
总习题一 …… 41

第二章　导数与微分 …… 49

习题 2－1　导数概念 …… 49
习题 2－2　函数的求导法则 …… 55
习题 2－3　高阶导数 …… 62
习题 2－4　隐函数及由参数方程所确定的函数的导数　相关变化率 …… 67
习题 2－5　函数的微分 …… 74
总习题二 …… 79

第三章　微分中值定理与导数的应用 …… 87

习题 3－1　微分中值定理 …… 87
习题 3－2　洛必达法则 …… 91
习题 3－3　泰勒公式 …… 95
习题 3－4　函数的单调性与曲线的凹凸性 …… 99

习题 3－5 函数的极值与最大值最小值 …… 109
习题 3－6 函数图形的描绘 …… 118
习题 3－7 曲率 …… 123
习题 3－8 方程的近似解 …… 126
总习题三 …… 129

第四章 不定积分 …… 139

习题 4－1 不定积分的概念与性质 …… 139
习题 4－2 换元积分法 …… 144
习题 4－3 分部积分法 …… 151
习题 4－4 有理函数的积分 …… 156
习题 4－5 积分表的使用 …… 161
总习题四 …… 166

第五章 定积分 …… 178

习题 5－1 定积分的概念与性质 …… 178
习题 5－2 微积分基本公式 …… 184
习题 5－3 定积分的换元法和分部积分法 …… 190
习题 5－4 反常积分 …… 198
*习题 5－5 反常积分的审敛法 Γ 函数 …… 200
总习题五 …… 203

第六章 定积分的应用 …… 216

习题 6－2 定积分在几何学上的应用 …… 216
习题 6－3 定积分在物理学上的应用 …… 229
总习题六 …… 233

第七章 微分方程 …… 242

习题 7－1 微分方程的基本概念 …… 242
习题 7－2 可分离变量的微分方程 …… 245
习题 7－3 齐次方程 …… 251
习题 7－4 一阶线性微分方程 …… 258
习题 7－5 可降阶的高阶微分方程 …… 266
习题 7－6 高阶线性微分方程 …… 273
习题 7－7 常系数齐次线性微分方程 …… 279
习题 7－8 常系数非齐次线性微分方程 …… 284
*习题 7－9 欧拉方程 …… 295

*习题 7 - 10　常系数线性微分方程组解法举例 …… 299
总习题七 …… 306

二、全国硕士研究生入学统一考试数学试题选解

(一) 函数　极限　连续 …… 323

(二) 一元函数微分学 …… 334

(三) 一元函数积分学 …… 350

(四) 微分方程 …… 362

三、同济大学高等数学试卷选编

(一) 高等数学(上)期中考试试卷(Ⅰ) …… 379
试题 …… 379
参考答案 …… 380

(二) 高等数学(上)期中考试试卷(Ⅱ) …… 383
试题 …… 383
参考答案 …… 384

(三) 高等数学(上)期末考试试卷(Ⅰ) …… 387
试题 …… 387
参考答案 …… 388

(四) 高等数学(上)期末考试试卷(Ⅱ) …… 391
试题 …… 391
参考答案 …… 392

一、《高等数学》(第七版)上册

习题全解

第一章

函数与极限

习题 1-1　映射与函数

1. 求下列函数的自然定义域：

(1) $y=\sqrt{3x+2}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$；

(3) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；　　(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$；

(5) $y=\sin\sqrt{x}$；　　(6) $y=\tan(x+1)$；

(7) $y=\arcsin(x-3)$；　　(8) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$；

(9) $y=\ln(x+1)$；　　(10) $y=e^{\frac{1}{x}}$.

解　(1) $3x+2\geqslant 0\Rightarrow x\geqslant -\dfrac{2}{3}$，即定义域为$\left[-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$.

(2) $1-x^2\neq 0\Rightarrow x\neq \pm 1$，即定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(3) $x\neq 0$ 且 $1-x^2\geqslant 0\Rightarrow x\neq 0$ 且 $|x|\leqslant 1$，即定义域为$[-1,0)\cup(0,1]$.

(4) $4-x^2>0\Rightarrow |x|<2$，即定义域为$(-2,2)$.

(5) $x\geqslant 0$，即定义域为$[0,+\infty)$.

(6) $x+1\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即定义域为$\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi-1,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(7) $|x-3|\leqslant 1\Rightarrow 2\leqslant x\leqslant 4$，即定义域为$[2,4]$.

(8) $3-x\geqslant 0$ 且 $x\neq 0$，即定义域为$(-\infty,0)\cup(0,3]$.

(9) $x+1>0\Rightarrow x>-1$，即定义域为$(-1,+\infty)$.

(10) $x\neq 0$，即定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

注　本题是求函数的自然定义域，一般方法是先写出构成所求函数的各个简单函数的定义域，再求出这些定义域的交集，即得所求定义域. 下列简单函数及其定义域是经常用到的：

$y=\dfrac{Q(x)}{P(x)}$，$P(x)\neq 0$；

$y=\sqrt[2n]{x}$，$x\geqslant 0$；

$y=\log_a x$，$x>0$；

$y=\tan x, x\neq\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi, k\in\mathbf{Z}$;

$y=\cot x, x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}$;

$y=\arcsin x, |x|\leqslant 1$;

$y=\arccos x, |x|\leqslant 1$.

2. 下列各题中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同?为什么?

(1) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$;

(2) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$;

(4) $f(x)=1, g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

解 (1) 不同,因为定义域不同.

(2) 不同,因为对应法则不同,$g(x)=\sqrt{x^2}=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$

(3) 相同,因为定义域、对应法则均相同.

(4) 不同,因为定义域不同.

3. 设

$$\varphi(x)=\begin{cases} |\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3}, \\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}, \end{cases}$$

求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right),\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right),\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right),\varphi(-2)$,并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形.

解 $$\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|=\frac{1}{2},\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2},\varphi(-2)=0.$$

$y=\varphi(x)$ 的图形如图 1-1 所示.

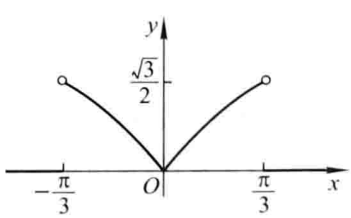


图 1-1

4. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

(1) $y=\dfrac{x}{1-x}, (-\infty,1)$;

(2) $y=x+\ln x,(0,+\infty)$.

证　(1) $y=f(x)=\frac{x}{1-x}=-1+\frac{1}{1-x},(-\infty,1)$.

设 $x_1<x_2<1$. 因为

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{1}{1-x_2}-\frac{1}{1-x_1}=\frac{x_2-x_1}{(1-x_1)(1-x_2)}>0,$$

所以 $f(x_2)>f(x_1)$, 即 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 内单调增加.

(2) $y=f(x)=x+\ln x,(0,+\infty)$.

设 $0<x_1<x_2$. 因为

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2+\ln x_2-x_1-\ln x_1=x_2-x_1+\ln\frac{x_2}{x_1}>0,$$

所以 $f(x_2)>f(x_1)$, 即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

5. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数, 若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加, 证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

证　设 $-l<x_1<x_2<0$, 则 $0<-x_2<-x_1<l$, 由 $f(x)$ 是奇函数, 得 $f(x_2)-f(x_1)=-f(-x_2)+f(-x_1)$. 因为 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加, 所以 $f(-x_1)-f(-x_2)>0$, 从而 $f(x_2)>f(x_1)$, 即 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

6. 设下面所考虑的函数都是定义在区间 $(-l,l)$ 上的. 证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数, 两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数, 两个奇函数的乘积是偶函数, 偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

证　(1) 设 $f_1(x),f_2(x)$ 均为偶函数, 则 $f_1(-x)=f_1(x),f_2(-x)=f_2(x)$. 令 $F(x)=f_1(x)+f_2(x)$, 于是

$$F(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)=F(x),$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x),g_2(x)$ 均为奇函数, 则 $g_1(-x)=-g_1(x),g_2(-x)=-g_2(x)$. 令 $G(x)=g_1(x)+g_2(x)$, 于是

$$G(-x)=g_1(-x)+g_2(-x)=-g_1(x)-g_2(x)=-G(x),$$

故 $G(x)$ 为奇函数.

(2) 设 $f_1(x),f_2(x)$ 均为偶函数, 则 $f_1(-x)=f_1(x),f_2(-x)=f_2(x)$. 令 $F(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$. 于是

$$F(-x)=f_1(-x)\cdot f_2(-x)=f_1(x)f_2(x)=F(x),$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x),g_2(x)$ 均为奇函数, 则 $g_1(-x)=-g_1(x),g_2(-x)=-g_2(x)$. 令 $G(x)=g_1(x)\cdot g_2(x)$. 于是

$$G(-x)=g_1(-x)\cdot g_2(-x)=[-g_1(x)][-g_2(x)]$$

$$=g_1(x)\cdot g_2(x)=G(x),$$

故 $G(x)$ 为偶函数.

设 $f(x)$ 为偶函数，$g(x)$ 为奇函数，则 $f(-x)=f(x)$，$g(-x)=-g(x)$. 令 $H(x)=f(x)\cdot g(x)$，于是

$$\begin{aligned}H(-x)&=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)[-g(x)]\\&=-f(x)\cdot g(x)=-H(x),\end{aligned}$$

故 $H(x)$ 为奇函数.

7. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非偶函数又非奇函数？

(1) $y=x^2(1-x^2)$；　(2) $y=3x^2-x^3$；

(3) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；　(4) $y=x(x-1)(x+1)$；

(5) $y=\sin x-\cos x+1$；　(6) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$.

解　(1) $y=f(x)=x^2(1-x^2)$，因为

$$f(-x)=(-x)^2[1-(-x)^2]=x^2(1-x^2)=f(x),$$

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(2) $y=f(x)=3x^2-x^3$，因为

$$f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3,$$

$$f(-x)\neq f(x),\quad 且\ f(-x)\neq -f(x),$$

所以 $f(x)$ 既非偶函数又非奇函数.

(3) $y=f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$，因为

$$f(-x)=\frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\frac{1-x^2}{1+x^2}=f(x),$$

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(4) $y=f(x)=x(x-1)(x+1)$，因为

$$\begin{aligned}f(-x)&=(-x)[(-x)-1][(-x)+1]\\&=-x(x+1)(x-1)=-f(x),\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

(5) $y=f(x)=\sin x-\cos x+1$，因为

$$f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1,$$

$$f(-x)\neq f(x)\ 且\ f(-x)\neq -f(x),$$

所以 $f(x)$ 既非偶函数又非奇函数.

(6) $y=f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$，因为 $f(-x)=\dfrac{a^{-x}+a^x}{2}=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数.

8. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期：

(1) $y=\cos(x-2)$；　(2) $y=\cos 4x$；

(3) $y=1+\sin \pi x$；　(4) $y=x\cos x$；

(5) $y=\sin^2 x$.

解　(1) 是周期函数,周期 $l=2\pi$.

(2) 是周期函数,周期 $l=\frac{\pi}{2}$.

(3) 是周期函数,周期 $l=2$.

(4) 不是周期函数.

(5) 是周期函数,周期 $l=\pi$.

9. 求下列函数的反函数:

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$;　(2) $y=\frac{1-x}{1+x}$;

(3) $y=\frac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$;　(4) $y=2\sin 3x\left(-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}\right)$;

(5) $y=1+\ln(x+2)$;　(6) $y=\frac{2^x}{2^x+1}$.

分析　函数 f 存在反函数的前提条件为:$f:D\to f(D)$ 是单射. 本题中所给出的各函数易证均为单射,特别(1)、(4)、(5)、(6)中的函数均为单调函数,故都存在反函数.

解　(1) 由 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 解得 $x=y^3-1$,即反函数为 $y=x^3-1$.

(2) 由 $y=\frac{1-x}{1+x}$ 解得 $x=\frac{1-y}{1+y}$,即反函数为 $y=\frac{1-x}{1+x}$.

(3) 由 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ 解得 $x=\frac{-dy+b}{cy-a}$,即反函数为 $y=\frac{-dx+b}{cx-a}$.

(4) 由 $y=2\sin 3x\left(-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}\right)$ 解得 $x=\frac{1}{3}\arcsin\frac{y}{2}$,即反函数为 $y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}$.

(5) 由 $y=1+\ln(x+2)$ 解得 $x=e^{y-1}-2$,即反函数为 $y=e^{x-1}-2$.

(6) 由 $y=\frac{2^x}{2^x+1}$ 解得 $x=\log_2\frac{y}{1-y}$,即反函数为 $y=\log_2\frac{x}{1-x}$.

10. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义,试证:函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

解　设 $f(x)$ 在 X 上有界,即存在 $M>0$,使得

$$|f(x)|\leqslant M,\quad x\in X,$$

故

$$-M\leqslant f(x)\leqslant M,\quad x\in X,$$

即 $f(x)$ 在 X 上有上界 M,下界 $-M$.

反之,设 $f(x)$ 在 X 上有上界 K_1,下界 K_2,即

$$K_2\leqslant f(x)\leqslant K_1,\quad x\in X.$$

取 $M=\max\{|K_1|,|K_2|\}$,则有

$$|f(x)|\leqslant M,\quad x\in X,$$

即 $f(x)$ 在 X 上有界.

11. 在下列各题中,求由所给函数构成的复合函数,并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值:

(1) $y=u^2,u=\sin x,x_1=\dfrac{\pi}{6},x_2=\dfrac{\pi}{3}$;

(2) $y=\sin u,u=2x,x_1=\dfrac{\pi}{8},x_2=\dfrac{\pi}{4}$;

(3) $y=\sqrt{u},u=1+x^2,x_1=1,x_2=2$;

(4) $y=\mathrm{e}^u,u=x^2,x_1=0,x_2=1$;

(5) $y=u^2,u=\mathrm{e}^x,x_1=1,x_2=-1$.

解 (1) $y=\sin^2 x,y_1=\dfrac{1}{4},y_2=\dfrac{3}{4}$.

(2) $y=\sin 2x,y_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2},y_2=1$.

(3) $y=\sqrt{1+x^2},y_1=\sqrt{2},y_2=\sqrt{5}$.

(4) $y=\mathrm{e}^{x^2},y_1=1,y_2=\mathrm{e}$.

(5) $y=\mathrm{e}^{2x},y_1=\mathrm{e}^2,y_2=\mathrm{e}^{-2}$.

12. 设 $f(x)$ 的定义域 $D=[0,1]$,求下列各函数的定义域:

(1) $f(x^2)$; (2) $f(\sin x)$;

(3) $f(x+a)(a>0)$; (4) $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$.

解 (1) $0\leqslant x^2\leqslant 1\Rightarrow x\in[-1,1]$.

(2) $0\leqslant \sin x\leqslant 1\Rightarrow x\in[2n\pi,(2n+1)\pi],n\in\mathbf{Z}$.

(3) $0\leqslant x+a\leqslant 1\Rightarrow x\in[-a,1-a]$.

(4) $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow$ 当 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时,$x\in[a,1-a]$;当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时,定义域为 $\varnothing$.

13. 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}\quad g(x)=\mathrm{e}^x,$$

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$,并作出这两个函数的图形.

解

$$f[g(x)]=f(\mathrm{e}^x)=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x>0.\end{cases}$$

$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e, & |x|<1,\\ 1, & |x|=1,\\ e^{-1}, & |x|>1.\end{cases}$$

$f[g(x)]$与$g[f(x)]$的图形依次如图 1－2,图 1－3 所示.

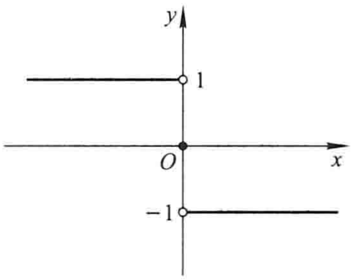


图 1－2

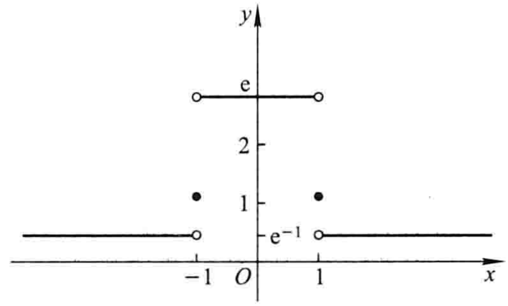


图 1－3

14. 已知水渠的横断面为等腰梯形,斜角 $\varphi=40°$(图 1－4).当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时,求湿周 $L(L=AB+BC+CD)$与水深 h 之间的函数关系式,并指明其定义域.

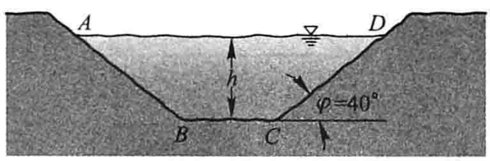


图 1－4

解　$AB=CD=\dfrac{h}{\sin 40°}$,又

$$S_0=\frac{1}{2}h[BC+(BC+2\cot 40°\cdot h)],$$

得

$$BC=\frac{S_0}{h}-\cot 40°\cdot h,$$

所以

$$L=\frac{S_0}{h}+\frac{2-\cos 40°}{\sin 40°}h,$$

而 $h>0$ 且$\dfrac{S_0}{h}-\cot 40°\cdot h>0$,因此湿周函数的定义域为$(0,\sqrt{S_0\tan 40°})$.

15. 设 xOy 平面上有正方形 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$及直线 $l:x+y=t(t\geqslant 0)$.若 $S(t)$表示正方形 D 位于直线 l 左下方部分的面积,试求 $S(t)$与 t 之间的函数关系.

解　当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时, $S(t)=\frac{1}{2}t^2$,

当 $1<t\leqslant 2$ 时, $S(t)=1-\frac{1}{2}(2-t)^2=-\frac{1}{2}t^2+2t-1$,

当 $t>2$ 时, $S(t)=1$.

故

$$S(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ -\frac{1}{2}t^2+2t-1, & 1<t\leqslant 2,\\ 1, & t>2.\end{cases}$$

16. 求联系华氏温度(用 F 表示)和摄氏温度(用 C 表示)的转换公式,并求

(1) 90 °F 的等价摄氏温度和 −5 °C 的等价华氏温度;

(2) 是否存在一个温度值,使华氏温度计和摄氏温度计的读数是一样的? 如果存在,那么该温度值是多少?

解　设 $F=mC+b$,其中 m,b 均为常数.

因为 $F=32°$ 相当于 $C=0°$, $F=212°$ 相当于 $C=100°$,所以

$$b=32,\quad m=\frac{212-32}{100}=1.8.$$

故 $F=1.8C+32$ 或 $C=\frac{5}{9}(F-32)$.

(1) $F=90°,\quad C=\frac{5}{9}(90-32)\approx 32.2°.$

$C=-5°,\quad F=1.8\times(-5)+32=23°.$

(2) 设温度值 t 符合题意,则有

$$t=1.8t+32,\quad t=-40.$$

即华氏 −40°恰好也是摄氏 −40°.

17. 已知 Rt$\triangle ABC$ 中,直角边 AC、BC 的长度分别为 20、15,动点 P 从 C 出发,沿三角形边界按 $C\to B\to A$ 方向移动;动点 Q 从 C 出发,沿三角形边界按 $C\to A\to B$ 方向移动,移动到两动点相遇时为止,且点 Q 移动的速度是点 P 移动的速度的 2 倍. 设动点 P 移动的距离为 x, $\triangle CPQ$ 的面积为 y,试求 y 与 x 之间的函数关系.

解　因为 $AC=20$, $BC=15$,所以, $AB=\sqrt{20^2+15^2}=25$.

由 $20<2\cdot 15<20+25$ 可知,点 P、Q 在斜边 AB 上相遇.

令 $x+2x=15+20+25$,得 $x=20$. 即当 $x=20$ 时,点 P、Q 相遇. 因此,所求函数的定义域为 $(0,20)$.

(1) 当 $0<x<10$ 时,点 P 在 CB 上,点 Q 在 CA 上(图 1−5).

由 $|CP|=x$, $|CQ|=2x$, 得

$$y=x^2.$$

(2) 当 $10\leqslant x\leqslant 15$ 时, 点 P 在 CB 上, 点 Q 在 AB 上(图 1-6).

$$|CP|=x,\quad |AQ|=2x-20.$$

设点 Q 到 BC 的距离为 h, 则

$$\frac{h}{20}=\frac{|BQ|}{25}=\frac{45-2x}{25},$$

得 $h=\frac{4}{5}(45-2x)$. 故

$$y=\frac{1}{2}xh=\frac{2}{5}x(45-2x)=-\frac{4}{5}x^2+18x.$$

(3) 当 $15<x<20$ 时, 点 P、Q 都在 AB 上(图 1-7).

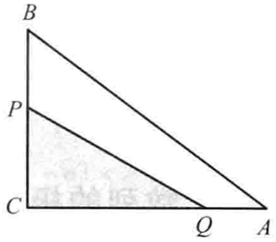


图 1-5

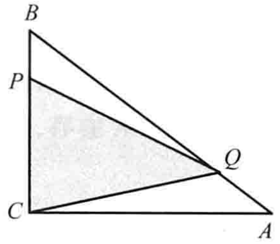


图 1-6

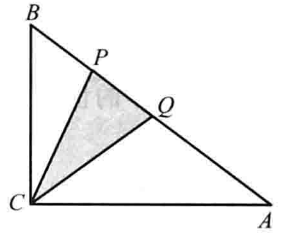


图 1-7

$$|BP|=x-15,\quad |AQ|=2x-20,\quad |PQ|=60-3x.$$

设点 C 到 AB 的距离为 h', 则

$$h'=\frac{15\cdot 20}{25}=12,$$

得

$$y=\frac{1}{2}|PQ|\cdot h'=-18x+360.$$

综上可得

$$y=\begin{cases} x^2, & 0<x<10, \\ -\frac{4}{5}x^2+18x, & 10\leqslant x\leqslant 15, \\ -18x+360, & 15<x<20. \end{cases}$$

18. 利用以下美国人口普查局提供的世界人口数据①以及指数模型来推测 2020 年的世界人口.

① 这里世界人口数据是指每年年中的人口数.

年份	人口数(百万)	年增长率(%)
2008	6 708.2	1.166
2009	6 786.4	1.140
2010	6 863.8	1.121
2011	6 940.7	1.107
2012	7 017.5	1.107
2013	7 095.2	

解　由表中第 3 列,猜想 2008 年后世界人口的年增长率是 1.1%. 于是,在 2008 年后的第 t 年,世界人口将是

$$p(t)=6\,708.2\times(1.011)^t(\text{百万}).$$

2020 年对应 $t=12$,于是

$$p(12)=6\,708.2\times(1.011)^{12}\approx 7\,649.3(\text{百万})\approx 76(\text{亿}).$$

即推测 2020 年的世界人口约为 76 亿.

习题 1-2　数列的极限

1. 下列各题中,哪些数列收敛,哪些数列发散?对收敛数列,通过观察 $\{x_n\}$ 的变化趋势,写出它们的极限:

(1) $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$;　(2) $\left\{(-1)^n\dfrac{1}{n}\right\}$;

(3) $\left\{2+\dfrac{1}{n^2}\right\}$;　(4) $\left\{\dfrac{n-1}{n+1}\right\}$;

(5) $\{n(-1)^n\}$;　(6) $\left\{\dfrac{2^n-1}{3^n}\right\}$;

(7) $\left\{n-\dfrac{1}{n}\right\}$;　(8) $\left\{[(-1)^n+1]\dfrac{n+1}{n}\right\}$.

解　(1) 收敛,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$.

(2) 收敛,$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}=0$.

(3) 收敛,$\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)=2$.

(4) 收敛,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n+1}=1$.

(5) $\{n(-1)^n\}$ 发散.

(6) 收敛, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-1}{3^n}=0$.

(7) $\left\{n-\dfrac{1}{n}\right\}$发散.

(8) $\left\{[(-1)^n+1]\dfrac{n+1}{n}\right\}$发散.

2. (1) 数列的有界性是数列收敛的什么条件?

(2) 无界数列是否一定发散?

(3) 有界数列是否一定收敛?

解　(1) 必要条件.

(2) 一定发散.

(3) 未必一定收敛,如数列$\{(-1)^n\}$有界,但它是发散的.

3. 下列关于数列$\{x_n\}$的极限是 a 的定义,哪些是对的,哪些是错的? 如果是对的,试说明理由;如果是错的,试给出一个反例.

(1) 对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,不等式 $x_n-a<\varepsilon$ 成立;

(2) 对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,有无穷多项 x_n,使不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立;

(3) 对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,不等式 $|x_n-a|<c\varepsilon$ 成立,其中 c 为某个正常数;

(4) 对于任意给定的 $m\in\mathbf{N}_+$,存在 $N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,不等式 $|x_n-a|<\dfrac{1}{m}$ 成立.

解　(1) 错误. 如对数列$\left\{(-1)^n+\dfrac{1}{n}\right\}$, $a=1$. 对任给的 $\varepsilon>0$(设 $\varepsilon<1$),存在 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$,当 $n>N$ 时, $(-1)^n+\dfrac{1}{n}-1\leqslant\dfrac{1}{n}<\varepsilon$,但$\left\{(-1)^n+\dfrac{1}{n}\right\}$的极限不存在.

(2) 错误. 如对数列

$$x_n=\begin{cases}n, & n=2k-1,\\ 1-\dfrac{1}{n}, & n=2k,\end{cases}\qquad k\in\mathbf{N}_+,\quad a=1.$$

对任给的 $\varepsilon>0$(设 $\varepsilon<1$),存在 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$,当 $n>N$ 且 n 为偶数时, $|x_n-a|=\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ 成立,但$\{x_n\}$的极限不存在.

(3) 正确. 对任给的 $\varepsilon>0$,取$\dfrac{1}{c}\varepsilon>0$,按假设,存在 $N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,不等式 $|x_n-a|<c\cdot\dfrac{1}{c}\varepsilon=\varepsilon$ 成立.

(4) 正确. 对任给的 $\varepsilon>0$,取 $m\in\mathbf{N}_+$,使 $\dfrac{1}{m}<\varepsilon$. 按假设,存在 $N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,不等式 $|x_n-a|<\dfrac{1}{m}<\varepsilon$ 成立.

*4. 设数列 $\{x_n\}$ 的一般项 $x_n=\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}$. 问 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$? 求出 N,使当 $n>N$ 时,x_n 与其极限之差的绝对值小于正数 ε. 当 $\varepsilon=0.001$ 时,求出数 N.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. 证明如下:

因为

$$|x_n-0|=\left|\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}\right|\leqslant\frac{1}{n},$$

要使 $|x_n-0|<\varepsilon$,只要 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$,即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$. 所以 $\forall\varepsilon>0$(不妨设 $\varepsilon<1$),取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,就有 $|x_n-0|<\varepsilon$.

当 $\varepsilon=0.001$ 时,取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]=1\ 000$. 即若 $\varepsilon=0.001$,只要 $n>1\ 000$,就有 $|x_n-0|<0.001$.

*5. 根据数列极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$; (4) $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n\text{个}}=1$.

证 (1) 因为要使 $\left|\dfrac{1}{n^2}-0\right|=\dfrac{1}{n^2}<\varepsilon$,只要 $n>\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$,所以 $\forall\varepsilon>0$(不妨设 $\varepsilon<1$),取 $N=\left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$,则当 $n>N$ 时,就有 $\left|\dfrac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$.

(2) 因为 $\left|\dfrac{3n+1}{2n+1}-\dfrac{3}{2}\right|=\dfrac{1}{2(2n+1)}<\dfrac{1}{4n}$,要使 $\left|\dfrac{3n+1}{2n+1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$,只要 $\dfrac{1}{4n}<\varepsilon$,即 $n>\dfrac{1}{4\varepsilon}$,所以 $\forall\varepsilon>0\left(\text{不妨设 }\varepsilon<\dfrac{1}{4}\right)$,取 $N=\left[\dfrac{1}{4\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,就有 $\left|\dfrac{3n+1}{2n+1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$.

注 本题中所采用的证明方法是:先将 $|x_n-a|$ 等价变形,然后适当放大,使 N 容易由放大后的量小于 ε 的不等式中求出. 这在按定义证明极限的问题中是经常采用的.

(3) 当 $a=0$ 时,所给数列为常数列,显然有此结论. 以下设 $a\neq0$. 因为

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}=\frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\frac{a^2}{2n^2},$$

要使 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$，只要$\dfrac{a^2}{2n^2}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{|a|}{\sqrt{2\varepsilon}}$. 所以 $\forall\varepsilon>0\left(\text{不妨设 }\varepsilon<\dfrac{1}{2}a^2\right)$，取 $N=\left[\dfrac{|a|}{\sqrt{2\varepsilon}}\right]$，则当$n>N$ 时，就有 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

(4) 因为 $|0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}-1|=\dfrac{1}{10^n}$，要使 $|0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}-1|<\varepsilon$，只要$\dfrac{1}{10^n}<\varepsilon$，即 $n>\lg\dfrac{1}{\varepsilon}$，所以 $\forall\varepsilon>0$(不妨设 $\varepsilon<1$)，取 $N=\left[\lg\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，就有$|0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}-1|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}=1$.

***6.** 若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$. 并举例说明：如果数列$\{|x_n|\}$有极限，但数列$\{x_n\}$未必有极限.

证　因为$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有$|u_n-a|<\varepsilon$，从而有

$$||u_n|-|a||\leqslant|u_n-a|<\varepsilon,$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$.

但由$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$，并不能推得$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$. 例如，考虑数列$\{(-1)^n\}$，虽然$\lim\limits_{n\to\infty}|(-1)^n|=1$，但$\{(-1)^n\}$没有极限.

***7.** 设数列$\{x_n\}$有界，又$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

证　因数列$\{x_n\}$有界，故 $\exists M>0$，使得对一切 n 有$|x_n|\leqslant M$. $\forall\varepsilon>0$，由于$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，故对 $\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{M}>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，就有$|y_n|<\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{M}$，从而有

$$|x_ny_n-0|=|x_n|\cdot|y_n|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}x_ny_n=0.$$

***8.** 对于数列$\{x_n\}$，若 $x_{2k-1}\to a(k\to\infty)$，$x_{2k}\to a(k\to\infty)$，证明：$x_n\to a(n\to\infty)$.

证　因为 $x_{2k-1}\to a(k\to\infty)$，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists k_1$，当 $k>k_1$ 时，有$|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$；又因为 $x_{2k}\to a(k\to\infty)$，所以对上述 $\varepsilon>0$，$\exists k_2$，当 $k>k_2$ 时，有$|x_{2k}-a|<\varepsilon$.

记 $K=\max\{k_1,k_2\}$，取 $N=2K$，则当 $n>N$ 时，若 $n=2k-1$，则

$$k>K+\frac{1}{2}>k_1\Rightarrow|x_n-a|=|x_{2k-1}-a|<\varepsilon,$$

若 $n=2k$，则

$$k>K\geqslant k_2\Rightarrow|x_n-a|=|x_{2k}-a|<\varepsilon.$$

从而只要 $n>N$，就有$|x_n-a|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

习题 1-3 函数的极限

1. 对图 1-8 所示的函数 $f(x)$,求下列极限,如极限不存在,说明理由.

(1) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$;

(2) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 0$.

(2) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -1$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在,因为 $f(0^+) \neq f(0^-)$.

2. 对图 1-9 所示的函数 $f(x)$,下列陈述中哪些是对的,哪些是错的?

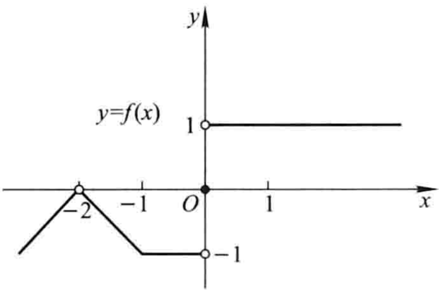


图 1-8

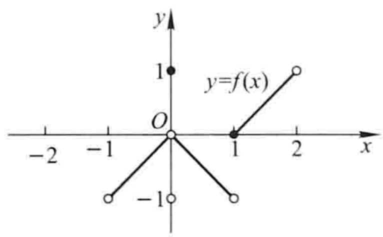


图 1-9

(1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在;

(2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$;

(4) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$;

(5) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 不存在;

(6) 对每个 $x_0 \in (-1,1)$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在.

解 (1) 错, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在与否,与 $f(0)$ 的值无关. 事实上, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

(2) 对,因为 $f(0^+) = f(0^-) = 0$.

(3) 错, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 的值与 $f(0)$ 的值无关.

(4) 错, $f(1^+) = 0$,但 $f(1^-) = -1$,故 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 不存在.

(5) 对,因为 $f(1^-) \neq f(1^+)$.

(6) 对.

3. 对图 1-10 所示的函数,下列陈述中哪些是对的,哪些是错的?

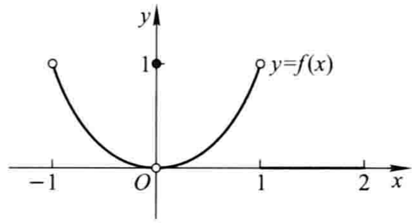


图 1 - 10

(1) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=1$;

(2) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$不存在;

(3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$;

(5) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1$;

(6) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0$;

(7) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=0$;

(8) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0$.

解　(1) 对.

(2) 对,因为当 $x<-1$ 时,$f(x)$无定义.

(3) 对,因为$f(0^+)=f(0^-)=0$.

(4) 错,$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$的值与$f(0)$的值无关.

(5) 对.

(6) 对.

(7) 对.

(8) 错,因为当 $x>2$ 时,$f(x)$ 无定义,$f(2^+)$ 不存在.

4. 求$f(x)=\dfrac{x}{x}$,$\varphi(x)=\dfrac{|x|}{x}$当$x\to 0$时的左、右极限,并说明它们在$x\to 0$时的极限是否存在.

解　$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+} 1=1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-} 1=1$.

因为$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$,所以$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

$$\lim_{x\to 0^+}\varphi(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0^-}\varphi(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1.$$

因为$\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}\varphi(x)$,所以$\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)$ 不存在.

***5.** 根据函数极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-1)=8$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 2}(5x+2)=12$;

(3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$;　　(4) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

解　(1) 因为

$$|(3x-1)-8|=|3x-9|=3|x-3|,$$

要使 $|(3x-1)-8|<\varepsilon$, 只要 $|x-3|<\dfrac{\varepsilon}{3}$,所以 $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$,则当 $0<|x-3|<\delta$ 时,就有 $|(3x-1)-8|<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{x\to 3}(3x-1)=8$.

(2) 因为

$$|(5x+2)-12|=|5x-10|=5|x-2|,$$

要使 $|(5x+2)-12|<\varepsilon$, 只要 $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{5}$, 所以 $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$,则当 $0<|x-2|<\delta$ 时,就有 $|(5x+2)-12|<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{x\to 2}(5x+2)=12$.

(3) 因为 $x\to -2, x\neq -2$,

$$\left|\frac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|=|x-2-(-4)|=|x+2|=|x-(-2)|,$$

要使

$$\left|\frac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|<\varepsilon,$$

只要 $|x-(-2)|<\varepsilon$. 所以 $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon$,则当 $0<|x-(-2)|<\delta$ 时,就有

$$\left|\frac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|<\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$.

(4) 因为 $x\to -\dfrac{1}{2}, x\neq -\dfrac{1}{2}$,

$$\left|\frac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|=|1-2x-2|=2\left|x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|,$$

要使

$$\left|\frac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|<\varepsilon,$$

只要 $\left|x-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 所以 $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$,则当 $0<\left|x-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right|<\delta$ 时,就有

$$\left|\frac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|<\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

*6. 根据函数极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

证　(1) 因为 $\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2|x|^3}$，要使 $\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$，只要 $\dfrac{1}{2|x|^3}<\varepsilon$，即 $|x|>\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$，所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $X=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$，则当 $|x|>X$ 时，就有 $\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$.

(2) 因为 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，要使 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$，只要 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$，即 $x>\dfrac{1}{\varepsilon^2}$，所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon^2}$，则当 $x>X$ 时，就有 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

***7.** 当 $x\to2$ 时，$y=x^2\to4$. 问 δ 等于多少，使当 $|x-2|<\delta$ 时，$|y-4|<0.001$？

解　由于 $x\to2$，$|x-2|\to0$，不妨设 $|x-2|<1$，即 $1<x<3$.

要使 $|x^2-4|=|x+2||x-2|<5|x-2|<0.001$，只要

$$|x-2|<\frac{0.001}{5}=0.0002,$$

取 $\delta=0.0002$，则当 $0<|x-2|<\delta$ 时，就有 $|x^2-4|<0.001$.

注　本题证明中，先限定 $|x-2|<1$，其目的是在 $|x^2-4|=|x+2||x-2|$ 中，将 $|x+2|$ 放大为5，从而去掉因子 $|x+2|$，再令 $5|x-2|<\varepsilon$，由此可以求出 $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{5}$，从而找到 δ. 这在按定义证明极限时，也是经常采用的一种方法.

***8.** 当 $x\to\infty$ 时，$y=\dfrac{x^2-1}{x^2+3}\to1$. 问 X 等于多少，使当 $|x|>X$ 时，$|y-1|<0.01$？

解　因为 $\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+3}-1\right|=\dfrac{4}{x^2+3}<\dfrac{4}{x^2}$，要使 $\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+3}-1\right|<0.01$，只要 $\dfrac{4}{x^2}<0.01$，即 $|x|>20$，取 $X=20$，则当 $|x|>X$ 时，就有 $|y-1|<0.01$.

***9.** 证明函数 $f(x)=|x|$ 当 $x\to0$ 时极限为零.

证　因为 $||x|-0|=|x|=|x-0|$，所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-0|<\delta$ 时，就有 $||x|-0|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to0}|x|=0$.

***10.** 证明：若 $x\to+\infty$ 及 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限都存在且都等于 A，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

证　因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X_1>0$，当 $x>X_1$ 时，就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

又因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，所以对上面的 $\varepsilon>0$，$\exists X_2>0$，当 $x<-X_2$ 时，就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

取 $X=\max\{X_1,X_2\}$，则当 $|x|>X$，即 $x>X$ 或 $x<-X$ 时，就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

*11. 根据函数极限的定义证明：函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在并且相等.

证　必要性　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

特别，当 $0<x-x_0<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$；当 $0<x_0-x<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

充分性　若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$，当 $0<x-x_0<\delta_1$ 时，就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$；又 $\exists\delta_2>0$，当 $0<x_0-x<\delta_2$ 时，就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

*12. 试给出 $x\to\infty$ 时函数极限的局部有界性的定理，并加以证明.

解　局部有界性定理　如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，那么存在常数 $M>0$ 和 $X>0$，使得当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

证明如下：因为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，所以对 $\varepsilon=1>0$，$\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，就有 $|f(x)-A|<1$，从而

$$|f(x)|\leqslant|f(x)-A|+|A|<1+|A|,$$

取 $M=|A|+1$，即有当 $|x|>X$ 时，$|f(x)|\leqslant M$.

习题 1-4　无穷小与无穷大

1. 两个无穷小的商是否一定是无穷小？举例说明之.

解　不一定. 例如，$\alpha(x)=2x$ 与 $\beta(x)=3x$ 都是当 $x\to0$ 时的无穷小，但 $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\dfrac{2}{3}$ 却不是当 $x\to0$ 时的无穷小.

*2. 根据定义证明：

(1) $y=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ 为当 $x\to3$ 时的无穷小；

(2) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ 为当 $x\to0$ 时的无穷小.

证　(1) 因为 $\left|\dfrac{x^2-9}{x+3}\right|=|x-3|$，所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-3|<\delta$ 时，就有

$$\left|\frac{x^2-9}{x+3}\right|<\varepsilon,$$

即$\dfrac{x^2-9}{x+3}$为当 $x\to3$ 时的无穷小.

（2）因为 $\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant|x|$，所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x|<\delta$ 时，就有

$$\left|x\sin\frac{1}{x}\right|<\varepsilon,$$

即 $x\sin\dfrac{1}{x}$为当 $x\to0$ 时的无穷小.

*3. 根据定义证明：函数 $y=\dfrac{1+2x}{x}$为当 $x\to0$ 时的无穷大. 问 x 应满足什么条件，能使 $|y|>10^4$？

证　因为 $\left|\dfrac{1+2x}{x}\right|=\left|\dfrac{1}{x}+2\right|\geqslant\left|\dfrac{1}{x}\right|-2$，要使 $\left|\dfrac{1+2x}{x}\right|>M$，只要 $\left|\dfrac{1}{x}\right|-2>M$，即 $|x|<\dfrac{1}{M+2}$，所以 $\forall M>0$，取 $\delta=\dfrac{1}{M+2}$，则当 $0<|x-0|<\delta$ 时，就有 $\left|\dfrac{1+2x}{x}\right|>M$，即$\dfrac{1+2x}{x}$为当 $x\to0$ 时的无穷大.

令 $M=10^4$，取 $\delta=\dfrac{1}{10^4+2}$，当 $0<|x-0|<\dfrac{1}{10^4+2}$时，就能使 $\left|\dfrac{1+2x}{x}\right|>10^4$.

注　在本题的证明中，采取先将 $|f(x)|=\left|\dfrac{1+2x}{x}\right|$等价变形，然后适当缩小，使缩小后的量大于 M，从而求出 δ. 这种方法在按定义证明函数在某个变化过程中为无穷大时，也是经常采用的.

4. 求下列极限并说明理由：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x}$；　　　　（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-x^2}{1-x}$.

解　（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)=2.$

理由：由定理 2，$\dfrac{1}{x}$为当 $x\to\infty$ 时的无穷小；再由定理 1，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)=2.$

（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-x^2}{1-x}=\lim\limits_{x\to0}(1+x)=1.$

理由：由定理 1，$\lim\limits_{x\to0}(1+x)=1.$

5. 根据函数极限或无穷大定义，填写下表：

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to x_0$	$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$.	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，即有 $\|f(x)\|>M$.	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，即有 $f(x)>M$.	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，即有 $f(x)<-M$.
$x\to x_0^+$	$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<x-x_0<\delta$ 时，即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$.	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<x-x_0<\delta$ 时，即有 $\|f(x)\|>M$.	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<x-x_0<\delta$ 时，即有 $f(x)>M$.	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<x-x_0<\delta$ 时，即有 $f(x)<-M$.
$x\to x_0^-$	$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0>x-x_0>-\delta$ 时，即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$.	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0>x-x_0>-\delta$ 时，即有 $\|f(x)\|>M$.	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0>x-x_0>-\delta$ 时，即有 $f(x)>M$.	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0>x-x_0>-\delta$ 时，即有 $f(x)<-M$.
$x\to\infty$	$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，使当 $\|x\|>X$ 时，即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$.	$\forall M>0$，$\exists X>0$，使当 $\|x\|>X$ 时，即有 $\|f(x)\|>M$.	$\forall M>0$，$\exists X>0$，使当 $\|x\|>X$ 时，即有 $f(x)>M$.	$\forall M>0$，$\exists X>0$，使当 $\|x\|>X$ 时，即有 $f(x)<-M$.
$x\to+\infty$	$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，使当 $x>X$ 时，即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$.	$\forall M>0$，$\exists X>0$，使当 $x>X$ 时，即有 $\|f(x)\|>M$.	$\forall M>0$，$\exists X>0$，使当 $x>X$ 时，即有 $f(x)>M$.	$\forall M>0$，$\exists X>0$，使当 $x>X$ 时，即有 $f(x)<-M$.
$x\to-\infty$	$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，使当 $x<-X$ 时，即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$.	$\forall M>0$，$\exists X>0$，使当 $x<-X$ 时，即有 $\|f(x)\|>M$.	$\forall M>0$，$\exists X>0$，使当 $x<-X$ 时，即有 $f(x)>M$.	$\forall M>0$，$\exists X>0$，使当 $x<-X$ 时，即有 $f(x)<-M$.

6. 函数 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是否有界？这个函数是否为 $x\to+\infty$ 时的无穷大？为什么？

解　因为 $\forall M>0$，总有 $x_0\in(M,+\infty)$，使 $\cos x_0=1$，从而 $y=x_0\cos x_0=x_0>M$，所以 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.

又因为 $\forall M>0,X>0$，总有 $x_0\in(X,+\infty)$，使 $\cos x_0=0$，从而 $y=x_0\cos x_0=0<M$，所以 $y=f(x)=x\cos x$ 不是当 $x\to+\infty$ 时的无穷大.

***7.** 证明：函数 $y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1]$ 内无界，但这函数不是 $x\to0^+$ 时的无穷大.

证　先证函数 $y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1]$ 内无界.

因为 $\forall M>0$，在 $(0,1]$ 中总可找到点 x_0，使 $f(x_0)>M$. 例如，可取 $x_0=\dfrac{1}{2k\pi+\dfrac{\pi}{2}}(k\in \mathbf{N})$，则 $f(x_0)=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，当 k 充分大时，可使 $f(x_0)>M$. 所以 $y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 内无界.

再证函数 $y=f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 不是 $x\to0^+$ 时的无穷大.

因为 $\forall M>0,\delta>0$，总可找到点 x_0，使 $0<x_0<\delta$，但 $f(x_0)<M$. 例如，可取 $x_0=\dfrac{1}{2k\pi}(k\in\mathbf{N}_+)$，当 k 充分大时，$0<x_0<\delta$，但 $f(x_0)=2k\pi\sin 2k\pi=0<M$. 所以 $y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 不是 $x\to0^+$ 时的无穷大.

8. 求函数 $f(x)=\dfrac{4}{2-x^2}$ 的图形的渐近线.

解　因为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，所以 $y=0$ 是函数图形的水平渐近线.

因为 $\lim\limits_{x\to-\sqrt{2}}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}f(x)=\infty$，所以 $x=-\sqrt{2}$ 及 $x=\sqrt{2}$ 都是函数图形的铅直渐近线.

习题 1－5　极限运算法则

1. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+5}{x-3}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^2+1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$；　(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$；

(5) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$；　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^4-3x^2+1}$；

(9) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$；　(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)$；

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$；　(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$；

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}$；　(14) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+5}{x-3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to2}(x^2+5)}{\lim\limits_{x\to2}(x-3)}=\dfrac{9}{-1}=-9.$

(2) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^2+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}(x^2-3)}{\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}(x^2+1)}=\dfrac{0}{4}=0.$

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}(x-1)}{\lim\limits_{x\to1}(x+1)}=\dfrac{0}{2}=0.$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^2-2x+1}{3x+2}=\dfrac{\lim\limits_{x\to0}(4x^2-2x+1)}{\lim\limits_{x\to0}(3x+2)}=\dfrac{1}{2}.$

(5) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{h(2x+h)}{h}=\lim\limits_{h\to0}(2x+h)=2x.$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}2-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=2-0+0=2.$

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\dfrac{1}{2}.$

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^4-3x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{1-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}\right)}=\dfrac{0}{1}=0.$

(9) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(x-4)(x-2)}{(x-4)(x-1)}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to4}(x-2)}{\lim\limits_{x\to4}(x-1)}=\dfrac{2}{3}.$

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)=1\cdot2=2.$

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{2^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}2\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$

$$=2\left(1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)=2.$$

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n-1)}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{2}.$

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{5}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\left(1+\dfrac{3}{n}\right)$

$$=\dfrac{1}{5}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)$$

$$=\dfrac{1}{5}.$$

(14) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-(x+2)}{1+x+x^2}=-\frac{\lim\limits_{x\to1}(x+2)}{\lim\limits_{x\to1}(1+x+x^2)}$$

$$=-\frac{3}{3}=-1.$$

2. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x+1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)$.

解　(1) 因为

$$\lim_{x\to2}\frac{(x-2)^2}{x^3+2x^2}=\frac{\lim\limits_{x\to2}(x-2)^2}{\lim\limits_{x\to2}(x^3+2x^2)}=0,$$

所以

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}=\infty.$$

(2) 因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=0,$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x+1}=\infty.$$

(3) 因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^3-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^3}}{2-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}=0,$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}(2x^3-x+1)=\infty.$$

3. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}$.

解　(1) 因为 $x^2\to0\,(x\to0)$，$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant1$，所以

$$\lim_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}=0.$$

(2) 因为 $\frac{1}{x}\to0\,(x\to\infty)$，$|\arctan x|<\frac{\pi}{2}$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}=0.$$

4. 设$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$均为非负数列,且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0,\lim\limits_{n\to\infty} b_n=1,\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\infty$. 下列陈述中哪些是对的,哪些是错的? 如果是对的,说明理由;如果是错的,试给出一个反例.

(1) $a_n<b_n, n\in\mathbf{N}_+$;　　(2) $b_n<c_n, n\in\mathbf{N}_+$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_nc_n$不存在;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty} b_nc_n$不存在.

解　(1) 错. 例如$a_n=\dfrac{1}{n}, b_n=\dfrac{n}{n+1}, n\in\mathbf{N}_+$,当$n=1$时,$a_1=1>\dfrac{1}{2}=b_1$,故对任意$n\in\mathbf{N}_+, a_n<b_n$不成立.

(2) 错. 例如$b_n=\dfrac{n}{n+1}, c_n=(-1)^n n, n\in\mathbf{N}_+$. 当$n$为奇数时,$b_n<c_n$不成立.

(3) 错. 例如$a_n=\dfrac{1}{n^2}, c_n=n, n\in\mathbf{N}_+$. $\lim\limits_{n\to\infty} a_nc_n=0$.

(4) 对. 因为,若$\lim\limits_{n\to\infty} b_nc_n$存在,则$\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\lim\limits_{n\to\infty}(b_nc_n)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_n}$也存在,与已知条件矛盾.

5. 下列陈述中,哪些是对的,哪些是错的? 如果是对的,说明理由;如果是错的,试给出一个反例.

(1) 如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,但$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$不存在,那么$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$不存在;

(2) 如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$都不存在,那么$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$不存在;

(3) 如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,但$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$不存在,那么$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)$不存在.

解　(1) 对. 因为,若$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$存在,则$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]-\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$也存在,与已知条件矛盾.

(2) 错. 例如$f(x)=\operatorname{sgn}x, g(x)=-\operatorname{sgn}x$在$x\to 0$时的极限都不存在,但$f(x)+g(x)\equiv 0$在$x\to 0$时的极限存在.

(3) 错. 例如$\lim\limits_{x\to 0} x=0, \lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在,但$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

***6.** 证明本节定理3中的(2).

定理3　(2) 如果$\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$,那么

$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B.$$

证　因$\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$,由上节定理1,有$f(x)=A+\alpha, g(x)=B+\beta$,其中$\alpha$、$\beta$都是无穷小,于是

$$f(x)g(x)=(A+\alpha)(B+\beta)=AB+(A\beta+B\alpha+\alpha\beta),$$

由本节定理2推论1、2,$A\beta$、$B\alpha$、$\alpha\beta$都是无穷小,再由本节定理1,$(A\beta+B\alpha+\alpha\beta)$也是无穷小,由上节定理1,得

$$\lim f(x)g(x)=AB=\lim f(x)\cdot\lim g(x).$$

习题 1－6　极限存在准则　两个重要极限

1. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \omega x}{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$；　(4) $\lim\limits_{x\to 0} x\cot x$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$；　(6) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$（$x$ 为不等于零的常数）.

解　(1) 当 $\omega\neq 0$ 时，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin \omega x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\omega\cdot\frac{\sin \omega x}{\omega x}\right)=\omega\lim_{x\to 0}\frac{\sin \omega x}{\omega x}=\omega;$$

当 $\omega=0$ 时，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin \omega x}{x}=0=\omega,$$

故不论 ω 为何值，均有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \omega x}{x}=\omega$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(3\cdot\dfrac{\tan 3x}{3x}\right)=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{3x}=3.$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\dfrac{5x}{\sin 5x}\cdot\dfrac{2}{5}\right)=\dfrac{2}{5}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sin 5x}=\dfrac{2}{5}.$

(4) $\lim\limits_{x\to 0} x\cot x=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\cdot\cos x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1.$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{x\sin x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=2.$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n\sin\dfrac{x}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}}\cdot x\right)=x.$

2. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}$；　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{kx}$（$k$ 为正整数）.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[1+(-x)]^{\frac{1}{(-x)}(-1)}=e^{-1}.$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^2=e^2.$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^2=e^2.$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{kx}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{(-x)}\right]^{(-x)(-k)}=e^{-k}$.

*3. 根据函数极限的定义,证明极限存在的准则Ⅰ′.

准则Ⅰ′ 如果

(1) $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x),x\in\mathring{U}(x_0,r)$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$,

那么$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,且等于 A.

证 $\forall\varepsilon>0$,因 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$,故 $\exists\delta_1>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时,有 $|g(x)-A|<\varepsilon$,即

$$A-\varepsilon<g(x)<A+\varepsilon, \tag{3}$$

又因$\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$,故对上面的 $\varepsilon>0$,$\exists\delta_2>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时,有 $|h(x)-A|<\varepsilon$,即

$$A-\varepsilon<h(x)<A+\varepsilon. \tag{4}$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,r\}$,则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,假设(1)及关系式(3)、(4)同时成立,从而有

$$A-\varepsilon<g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)<A+\varepsilon,$$

即有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 因此$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,且等于 A.

注 对于 $x\to\infty$ 的情形,利用极限$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的定义及假设条件,可以类似地证明相应的准则Ⅰ′.

4. 利用极限存在准则证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$;

(3) 数列$\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\cdots$的极限存在;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[n]{1+x}=1$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$.

证 (1) 因 $1<\sqrt{1+\frac{1}{n}}<1+\frac{1}{n}$,而$\lim\limits_{n\to\infty}1=1,\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$,由夹逼准则,即得证.

(2) 因 $\frac{n}{n+\pi}\leqslant n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)\leqslant\frac{n^2}{n^2+\pi}$,而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+\pi}=1,\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+\pi}=1$,由夹逼准则,即得证.

(3) $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}(n\in\mathbf{N}_+)$, $x_1=\sqrt{2}$.

先证数列$\{x_n\}$有界：

$n=1$ 时，$x_1=\sqrt{2}<2$；假定 $n=k$ 时，$x_k<2$. 当 $n=k+1$ 时，$x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+2}=2$. 故 $x_n<2(n\in\mathbf{N}_+)$.

再证数列$\{x_n\}$单调增加：

因

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{2+x_n}-x_n=\frac{2+x_n-x_n^2}{\sqrt{2+x_n}+x_n}=-\frac{(x_n-2)(x_n+1)}{\sqrt{2+x_n}+x_n},$$

由 $0<x_n<2$，得 $x_{n+1}-x_n>0$，即 $x_{n+1}>x_n(n\in\mathbf{N}_+)$.

由单调有界准则，即知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

记$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 由 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$，得 $x_{n+1}^2=2+x_n$. 两端同时取极限得

$$a^2=2+a \quad\Rightarrow\quad a^2-a-2=0\Rightarrow a_1=2, a_2=-1(\text{舍去}).$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

注　本题的求解过程分成两步，第一步是证明数列$\{x_n\}$单调有界，从而保证数列的极限存在；第二步是在递推公式两端同时取极限，得出一个含有极限值 a 的方程，再通过解方程求得极限值 a. **注意**：只有在证明数列极限存在的前提下，才能采用第二步的方法求得极限值. 否则，直接利用第二步，有时会导出错误的结果.

(4) 当 $x>0$ 时，$1<\sqrt[n]{1+x}<1+x$；当 $-1<x<0$ 时，$1+x<\sqrt[n]{1+x}<1$. 而 $\lim\limits_{x\to 0}1=1$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)=1$. 由夹逼准则，即得证.

(5) 当 $x>0$ 时，$1-x<x\left[\dfrac{1}{x}\right]\leqslant 1$. 而 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)=1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$. 由夹逼准则，即得证.

习题 1-7　无穷小的比较

1. 当 $x\to 0$ 时，$2x-x^2$ 与 x^2-x^3 相比，哪一个是高阶无穷小？

解　因为$\lim\limits_{x\to 0}(2x-x^2)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-x^3)=0$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x^3}{2x-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x^2}{2-x}=0,$$

所以当 $x\to 0$ 时，x^2-x^3 是比 $2x-x^2$ 高阶的无穷小.

2. 当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)^2$ 与 $\sin^2 x$ 相比，哪一个是高阶无穷小？

解　因为$\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^2=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\sin^2 x=0$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2}{x^2}=0,$$

所以当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)^2$ 是比 $\sin^2 x$ 高阶的无穷小.

3. 当 $x\to 1$ 时，无穷小 $1-x$ 和(1) $1-x^3$，(2) $\frac{1}{2}(1-x^2)$ 是否同阶，是否等价？

解　(1) $\frac{1-x}{1-x^3}=\frac{1-x}{(1-x)(1+x+x^2)}=\frac{1}{1+x+x^2}\to\frac{1}{3}(x\to 1)$，同阶，不等价.

(2) $\frac{1-x}{\frac{1}{2}(1-x^2)}=\frac{1-x}{\frac{1}{2}(1-x)(1+x)}=\frac{2}{1+x}\to 1(x\to 1)$，同阶，等价.

4. 证明：当 $x\to 0$ 时，有

(1) $\arctan x\sim x$；　　　　(2) $\sec x-1\sim\frac{x^2}{2}$.

证　(1) 令 $x=\tan t$，即 $t=\arctan x$，当 $x\to 0$ 时，$t\to 0$.

因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan t}=1,$$

所以

$$\arctan x\sim x\quad(x\to 0).$$

(2) 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sec x-1}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1,$$

所以

$$\sec x-1\sim\frac{x^2}{2}(x\to 0).$$

5. 利用等价无穷小的性质，求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{2x}$；　　　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}$($n$、$m$ 为正整数)；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$；　　　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^n}{x^m}=\begin{cases}0, & n>m,\\ 1, & n=m,\\ \infty, & n<m.\end{cases}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec x-1}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}.$

注　在作等价无穷小的代换求极限时,可以对分子或分母中的一个或若干个因子作代换,但不能对分子或分母中的某个加项作代换. 例如,本题中若将分子中的 $\tan x$、$\sin x$ 均换成 x,那么分子成为 0,得出极限为 0,这就导致错误的结果.

（4）
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\sec x)}{\frac{1}{3}x^2\cdot\frac{1}{2}\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{6}x^2}=-3.$$

6. 证明无穷小的等价关系具有下列性质：

（1）$\alpha\sim\alpha$（自反性）；

（2）若 $\alpha\sim\beta$,则 $\beta\sim\alpha$（对称性）；

（3）若 $\alpha\sim\beta,\beta\sim\gamma$,则 $\alpha\sim\gamma$（传递性）.

证　（1）因为 $\lim\dfrac{\alpha}{\alpha}=1$,所以 $\alpha\sim\alpha$；

（2）因为 $\alpha\sim\beta$,即 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$,所以 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$,即 $\beta\sim\alpha$；

（3）因为 $\alpha\sim\beta,\beta\sim\gamma$,即 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1,\lim\dfrac{\beta}{\gamma}=1$,所以
$$\lim\frac{\alpha}{\gamma}=\lim\left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\gamma}\right)=\lim\frac{\alpha}{\beta}\cdot\lim\frac{\beta}{\gamma}=1,\text{即 }\alpha\sim\gamma.$$

习题 1－8　函数的连续性与间断点

1. 设 $y=f(x)$ 的图形如图 1－11 所示,试指出 $f(x)$ 的全部间断点,并对可去间断点补充或修改函数值的定义,使它成为连续点.

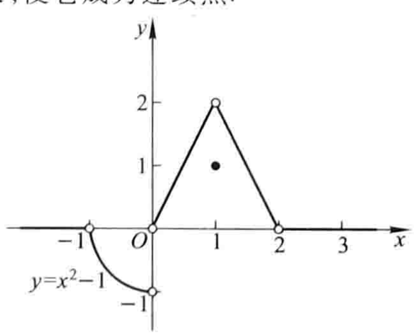


图 1－11

解 $x=-1,0,1,2$ 均为 $f(x)$ 的间断点,除 $x=0$ 外它们均为 $f(x)$ 的可去间断点. 补充定义 $f(-1)=f(2)=0$,修改定义使 $f(1)=2$,则它们均成为 $f(x)$ 的连续点.

2. 研究下列函数的连续性,并画出函数的图形:

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2;\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & x<-1 \text{ 或 } x>1.\end{cases}$

解 (1) $f(x)$ 在 $[0,1)$ 及 $(1,2]$ 内连续,在 $x=1$ 处,

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}x^2=1,\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(2-x)=1,\text{又 }f(1)=1,$$

故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续,因此 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续,函数的图形如图 1-12 所示.

(2) $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 与 $(-1,+\infty)$ 内连续,在 $x=-1$ 处间断,但右连续. 因为在 $x=-1$ 处,

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}x=-1,f(-1)=-1,$$

但

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}1=1,$$

即

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)\neq\lim_{x\to-1^-}f(x).$$

函数的图形如图 1-13 所示.

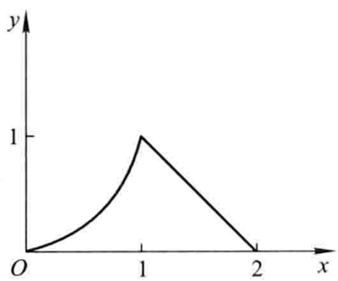


图 1-12

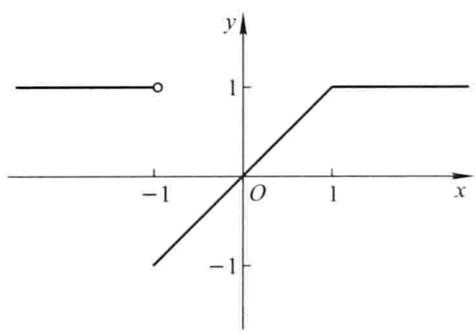


图 1-13

3. 下列函数在指出的点处间断,说明这些间断点属于哪一类. 如果是可去间断点,那么补充或改变函数的定义使它连续:

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2},x=1,x=2;$

(2) $y=\dfrac{x}{\tan x},x=k\pi,x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots);$

(3) $y=\cos^2\dfrac{1}{x},x=0;$

(4) $y=\begin{cases}x-1, x\leqslant 1,\\ 3-x, x>1,\end{cases}\quad x=1.$

解　(1) 对 $x=1$,因为 $f(1)$ 无定义,但

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x-2}=-2,$$

所以,$x=1$ 为第一类间断点(可去间断点),重新定义函数:

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}, & x\neq1,2,\\ -2, & x=1,\end{cases}$$

则 $f_1(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

因为 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\infty$,所以 $x=2$ 为第二类间断点(无穷间断点).

(2) 对 $x=0$,因为 $f(0)$ 无定义,$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x}=1$,所以 $x=0$ 为第一类间断点(可去间断点),重新定义函数:

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\tan x}, & x\neq k\pi, k\pi+\dfrac{\pi}{2},\\ 1, & x=0\end{cases}\quad(k\in\mathbf{Z}),$$

则 $f_1(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

对 $x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$,因为 $\lim\limits_{x\to k\pi}\dfrac{x}{\tan x}=\infty$,所以 $x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为第二类间断点(无穷间断点).

对 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,因为 $\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\dfrac{x}{\tan x}=0$,而函数在 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 处无定义,所以 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 为第一类间断点(可去间断点),重新定义函数:

$$f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\tan x}, & x\neq k\pi, k\pi+\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\quad(k\in\mathbf{Z}),$$

则 $f_2(x)$ 在 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 处连续.

(3) 对 $x=0$,因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\cos^2\dfrac{1}{x}$ 及 $\lim\limits_{x\to0^-}\cos^2\dfrac{1}{x}$ 均不存在,所以 $x=0$ 为第二类间断点.

(4) 对 $x=1$,因为 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(3-x)=2$,$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)=0$,即左、右极限存在,但不相等,所以 $x=1$ 为第一类间断点(跳跃间断点).

注　在讨论分段函数的连续性时,在函数的分段点处,必须分别考虑函数的左连续性和右连续性,只有函数在该点既左连续,又右连续,才能得出函数在该点

连续.

4. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性,若有间断点,则判别其类型.

解

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=\begin{cases}-x, & |x|>1,\\ 0, & |x|=1,\\ x, & |x|<1.\end{cases}$$

在分段点 $x=-1$ 处,因为

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}(-x)=1,$$
$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}x=-1,$$
$$\lim_{x\to-1^-}f(x)\neq\lim_{x\to-1^+}f(x),$$

所以 $x=-1$ 为第一类间断点(跳跃间断点).

在分段点 $x=1$ 处,因为

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}x=1,$$
$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(-x)=-1,$$
$$\lim_{x\to1^-}f(x)\neq\lim_{x\to1^+}f(x),$$

所以 $x=1$ 为第一类间断点(跳跃间断点).

5. 下列陈述中,哪些是对的,哪些是错的? 如果是对的,说明理由;如果是错的,试给出一个反例.

(1) 如果函数 $f(x)$ 在 a 连续,那么 $|f(x)|$ 也在 a 连续;

(2) 如果函数 $|f(x)|$ 在 a 连续,那么 $f(x)$ 也在 a 连续.

解 (1) 对. 因为

$$\big||f(x)|-|f(a)|\big|\leqslant|f(x)-f(a)|\to0\ (x\to a),$$

所以 $|f(x)|$ 也在 a 连续.

(2) 错. 例如

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

则 $|f(x)|$ 在 $x=0$ 处连续,而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

***6.** 证明:若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续且 $f(x_0)\neq0$,则存在 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$,当 $x\in U(x_0)$ 时,$f(x)\neq0$.

证 若 $f(x_0)>0$,因为 $f(x)$ 在 x_0 连续,所以取 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}f(x_0)>0$,$\exists\delta>0$,当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时,有 $|f(x)-f(x_0)|<\dfrac{1}{2}f(x_0)$,即

$$0<\frac{1}{2}f(x_0)<f(x)<\frac{3}{2}f(x_0).$$

若 $f(x_0)<0$, 因为 $f(x)$ 在 x_0 连续,所以取 $\varepsilon=-\frac{1}{2}f(x_0)>0$, $\exists\delta>0$,当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时,有 $|f(x)-f(x_0)|<-\frac{1}{2}f(x_0)$, 即

$$\frac{3}{2}f(x_0)<f(x)<\frac{1}{2}f(x_0)<0.$$

因此,不论 $f(x_0)>0$ 或 $f(x_0)<0$, 总存在 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$,当 $x\in U(x_0)$ 时, $f(x)\neq 0$.

*7. 设

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q},\end{cases}$$

证明:(1) $f(x)$ 在 $x=0$ 连续;

(2) $f(x)$ 在非零的 x 处都不连续.

证　(1) $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon$,则当 $|x-0|=|x|<\delta$ 时,

$$|f(x)-f(0)|=|f(x)|\leqslant|x|<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$,即 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

(2) 我们证明: $\forall\ x_0\neq 0$, $f(x)$ 在 x_0 不连续.

若 $x_0=r\neq 0$, $r\in\mathbf{Q}$,则 $f(x_0)=f(r)=r$.

分别取一有理数列 $\{r_n\}$: $r_n\to r(n\to\infty)$, $r_n\neq r$;取一无理数列 $\{s_n\}$: $s_n\to r(n\to\infty)$,则

$$\lim_{n\to\infty}f(r_n)=\lim_{n\to\infty}r_n=r,\lim_{n\to\infty}f(s_n)=\lim_{n\to\infty}0=0,$$

而 $r\neq 0$,由函数极限与数列极限的关系知 $\lim\limits_{x\to r}f(x)$ 不存在,故 $f(x)$ 在 r 处不连续.

若 $x_0=s$, $s\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$. 同理可证: $f(x_0)=f(s)=0$,但 $\lim\limits_{x\to s}f(x)$ 不存在,故 $f(x)$ 在 s 处不连续.

*8. 试举出具有以下性质的函数 $f(x)$ 的例子:

$x=0,\pm 1,\pm 2,\pm\frac{1}{2},\cdots,\pm n,\pm\frac{1}{n},\cdots$ 是 $f(x)$ 的所有间断点,且它们都是无穷间断点.

解　设 $f(x)=\cot(\pi x)+\cot\frac{\pi}{x}$, 显然 $f(x)$ 具有所要求的性质.

习题 1-9　连续函数的运算与初等函数的连续性

1. 求函数 $f(x)=\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$ 的连续区间, 并求极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to -3}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

解　$f(x)$ 在 $x_1=-3,x_2=2$ 处无意义,所以这两个点为间断点,此外函数到处连续,连续区间为 $(-\infty,-3),(-3,2),(2,+\infty)$.

因为

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}=\frac{(x^2-1)(x+3)}{(x+3)(x-2)}=\frac{x^2-1}{x-2},$$

所以

$$\lim_{x\to0}f(x)=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to-3}f(x)=-\frac{8}{5},\quad \lim_{x\to2}f(x)=\infty.$$

2. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 连续,证明函数

$$\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\},\quad \psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$$

在点 x_0 也连续.

证　$\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}=\dfrac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]$,

$$\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|].$$

又,若 $f(x)$ 在点 x_0 连续,则 $|f(x)|$ 在点 x_0 也连续;由连续函数的和、差仍连续,故 $\varphi(x)$、$\psi(x)$ 在点 x_0 也连续.

3. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x^2-2x+5}$;　　(2) $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2\alpha)^3$;

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)$;　　(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}$;

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$;　　(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{2}{3}}-1}{x\ln(1+x)}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x^2-2x+5}=\sqrt{\lim\limits_{x\to0}(x^2-2x+5)}=\sqrt{5}$.

(2) $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2\alpha)^3=(\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}\sin 2\alpha)^3=\left(\sin\dfrac{\pi}{2}\right)^3=1$.

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)=\ln(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}2\cos 2x)=\ln\left(2\cos\dfrac{\pi}{3}\right)=\ln 1=0$.

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\dfrac{1}{2}$.

(5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4}{\sqrt{5x-4}+\sqrt{x}}=2$.

(6) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{2\sin\dfrac{x-\alpha}{2}\cos\dfrac{x+\alpha}{2}}{x-\alpha}$

$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{\sin\dfrac{x-\alpha}{2}}{\dfrac{x-\alpha}{2}}\cdot\lim_{x\to\alpha}\cos\frac{x+\alpha}{2}=\cos\alpha.$$

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}}=1.$$

(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{2}x^2\right)^{\frac{2}{3}}-1}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{2}{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}x^2\right)}{x\cdot x}=-\dfrac{1}{3}.$

注　本题及下一题求极限中,采用了以下几种常用的方法:

(1) 利用极限运算法则;

(2) 利用复合函数的连续性,将函数符号与极限号交换次序;

(3) 利用一些初等方法:因式分解,分子或分母有理化,分子分母同乘或除以一个不为零的因子,消去分母中趋于零的因子等;

(4) 利用重要极限以及它们的变形;

(5) 利用等价无穷小替代.

4. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}\ln\dfrac{\sin x}{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$;

(4) $\lim\limits_{x\to0}(1+3\tan^2x)^{\cot^2x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$;

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2x}-x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$;

(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}-e^x+1}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)}-1}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=e^0=1.$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\ln\dfrac{\sin x}{x}=\ln\left(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\right)=\ln 1=0.$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$

(4) $\lim\limits_{x\to0}(1+3\tan^2x)^{\cot^2x}=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+3\tan^2x)^{\frac{1}{3}\cot^2x}\right]^3=e^3.$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{3}{6+x}\right)^{-\frac{6+x}{3}}\right]^{-\frac{3}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{6+x}\right)^{-\frac{7}{2}}=e^{-\frac{3}{2}}.$

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x(\sqrt{1+\sin^2 x}-1)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sec x-1}{\sqrt{1+\sin^2 x}-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}\sin^2 x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$$

$$=1\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

(7) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}\xlongequal{x-e=t}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln(e+t)-\ln e}{t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{t}{e}\right)}{t}=\dfrac{1}{e}.$

(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}-e^x+1}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^{2x}-1)(e^x-1)}{(1-x^2)^{\frac{1}{3}}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\cdot x}{-\dfrac{1}{3}x^2}=-6.$

5. 设$f(x)$在 **R** 上连续,且$f(x)\neq0$,$\varphi(x)$在 **R** 上有定义,且有间断点,则下列陈述中,哪些是对的,哪些是错的?如果是对的,试说明理由;如果是错的,试给出一个反例.

(1) $\varphi[f(x)]$必有间断点; (2) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点;

(3) $f[\varphi(x)]$未必有间断点; (4) $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$必有间断点.

解 (1) 错. 例如,$\varphi(x)=\operatorname{sgn}x$,$f(x)=e^x$,$\varphi[f(x)]\equiv1$ 在 **R** 上处处连续.

(2) 错. 例如,$\varphi(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbf{Q},\\-1, x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q},\end{cases}$ $[\varphi(x)]^2\equiv1$ 在 **R** 上处处连续.

(3) 对. 例如,$\varphi(x)$同(2),$f(x)=|x|+1$,$f[\varphi(x)]\equiv2$ 在 **R** 上处处连续.

(4) 对. 因为,若 $F(x)=\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$在 **R** 上处处连续,则 $\varphi(x)=F(x)\cdot f(x)$也在 **R** 上处处连续,这与已知条件矛盾.

6. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0,\\ a+x, & x\geqslant0.\end{cases}$$

应当怎样选择数 a,才能使得$f(x)$成为在$(-\infty,+\infty)$内的连续函数.

解 由初等函数的连续性,$f(x)$在$(-\infty,0)$及$(0,+\infty)$内连续,所以要使$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,只要选择数 a,使$f(x)$在 $x=0$ 处连续即可.

在 $x=0$ 处，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\mathrm{e}^x=1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(a+x)=a$，$f(0)=a$，取 $a=1$，即有

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0),$$

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 于是，选择 $a=1$，$f(x)$ 就成为在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数.

习题 1-10 闭区间上连续函数的性质

1. 假设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，并且对 $[0,1]$ 上任一点 x 有 $0\leqslant f(x)\leqslant1$. 试证明 $[0,1]$ 中必存在一点 c，使得 $f(c)=c$（c 称为函数 $f(x)$ 的不动点）.

证 设 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(0)=f(0)\geqslant0$，$F(1)=f(1)-1\leqslant0$.

若 $F(0)=0$ 或 $F(1)=0$，则 0 或 1 即为 $f(x)$ 的不动点；若 $F(0)>0$ 且 $F(1)<0$，则由零点定理，必存在 $c\in(0,1)$，使 $F(c)=0$，即 $f(c)=c$，这时 c 为 $f(x)$ 的不动点.

2. 证明方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

证 设 $f(x)=x^5-3x-1$，则 $f(x)$ 在闭区间 $[1,2]$ 上连续，且 $f(1)=-3<0$，$f(2)=25>0$. 由零点定理，即知 $\exists\,\xi\in(1,2)$，使 $f(\xi)=0$，ξ 即为方程的根.

3. 证明方程 $x=a\sin x+b$，其中 $a>0$，$b>0$，至少有一个正根，并且它不超过 $a+b$.

证 设 $f(x)=x-a\sin x-b$，则 $f(x)$ 在闭区间 $[0,a+b]$ 上连续，且 $f(0)=-b<0$，$f(a+b)=a[1-\sin(a+b)]$. 当 $\sin(a+b)<1$ 时，$f(a+b)>0$，由零点定理，即知 $\exists\,\xi\in(0,a+b)$，使 $f(\xi)=0$，即 ξ 为原方程的根，它是正根且不超过 $a+b$；当 $\sin(a+b)=1$ 时，$f(a+b)=0$，$a+b$ 就是满足条件的正根.

4. 证明任一最高次幂的指数为奇数的代数方程

$$a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}=0$$

至少有一实根，其中 $a_0,a_1,\cdots,a_{2n+1}$ 均为常数，$n\in\mathbf{N}$.

证 当 x 的绝对值充分大时，$f(x)=a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}$ 的符号取决于 a_0 的符号，即当 x 为正时与 a_0 同号，当 x 为负时与 a_0 异号，而 $a_0\neq0$. 因 $f(x)$ 是连续函数，它在某充分大的区间的两端处异号，由零点定理可知它在区间内某一点处必定为零，故方程 $f(x)=0$ 至少有一实根.

5. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b\ (n\geqslant3)$，则在 (x_1,x_n) 内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

证 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，又 $[x_1,x_n]\subset[a,b]$，所以 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 上连续. 设

$$M=\max\{f(x)\mid x_1\leqslant x\leqslant x_n\},\ m=\min\{f(x)\mid x_1\leqslant x\leqslant x_n\},$$

则

$$m\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\leqslant M.$$

若上述不等式中为严格不等号,则由介值定理知,$\exists \xi \in (x_1,x_n)$,使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n};$$

若上述不等式中出现等号,如

$$m=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n},$$

则有 $f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_n)=m$,任取 $x_2,\cdots,x_{n-1}$ 中一点作为 ξ,即有 $\xi\in(x_1,x_n)$,使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

如

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}=M,$$

同理可证.

***6.** 设函数 $f(x)$ 对于闭区间 $[a,b]$ 上的任意两点 x、y,恒有 $|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|$,其中 L 为正常数,且 $f(a)\cdot f(b)<0$. 证明:至少有一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$.

证　任取 $x_0\in(a,b)$,$\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{L},x_0-a,b-x_0\right\}$,则当 $|x-x_0|<\delta$ 时,由假设

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant L|x-x_0|<L\delta\leqslant\varepsilon,$$

所以 $f(x)$ 在 x_0 连续. 由 $x_0\in(a,b)$ 的任意性知,$f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

当 $x_0=a$ 或 $x_0=b$ 时,取 $\delta=\frac{\varepsilon}{L}$,并将 $|x-x_0|<\delta$ 换成 $x\in[a,a+\delta)$ 或 $x\in(b-\delta,b]$,便可知 $f(x)$ 在 $x=a$ 右连续,在 $x=b$ 左连续. 从而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

又由假设 $f(a)\cdot f(b)<0$,由零点定理即知 $\exists\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$.

***7.** 证明:若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在,则 $f(x)$ 必在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

证　设 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$,则对 $\varepsilon=1>0$,$\exists X>0$,当 $|x|>X$ 时,有

$$|f(x)-A|<1\Rightarrow|f(x)|\leqslant|f(x)-A|+|A|<|A|+1.$$

又,$f(x)$ 在 $[-X,X]$ 上连续,利用有界性定理,得:$\exists M>0$,对 $\forall x\in[-X,X]$,有 $|f(x)|\leqslant M$.

取 $M'=\max\{M,|A|+1\}$,即有 $|f(x)|\leqslant M'$,　$\forall x\in(-\infty,+\infty)$.

***8.** 在什么条件下,(a,b) 内的连续函数 $f(x)$ 为一致连续?

解　若 $f(a^+)$、$f(b^-)$ 均存在,设

$$F(x)=\begin{cases}f(a^+), & x=a,\\ f(x), & x\in(a,b),\\ f(b^-), & x=b.\end{cases}$$

易证 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,从而 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续,也就有 $F(x)$ 在 (a,b) 内一致连续,即 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续.

总习题一

1. 在“充分”“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内:

(1) 数列 $\{x_n\}$ 有界是数列 $\{x_n\}$ 收敛的________条件,数列 $\{x_n\}$ 收敛是数列 $\{x_n\}$ 有界的________条件;

(2) $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的________条件, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在是 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界的________条件;

(3) $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内无界是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 的________条件, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 是 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内无界的________条件;

(4) $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限 $f(x_0^+)$ 及左极限 $f(x_0^-)$ 都存在且相等是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的________条件.

解　(1) 必要,充分.

(2) 必要,充分.

(3) 必要,充分.

(4) 充分必要.

2. 已知函数

$$f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{-x^2}, & 0<|x|<\dfrac{\pi}{2},\\ a, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 连续,则 $a=$________.

解　$a=f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{-x^2}=1.$

3. 以下两题中给出了四个结论,从中选出一个正确的结论:

(1) 设 $f(x)=2^x+3^x-2$,则当 $x\to 0$ 时,有(　　).

(A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小　　(B) $f(x)$ 与 x 同阶但非等价无穷小

(C) $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小　　(D) $f(x)$ 是比 x 低阶的无穷小

(2) 设

$$f(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1},$$

则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的(　　).

(A) 可去间断点　　(B) 跳跃间断点

(C) 第二类间断点　　(D) 连续点

解　(1) 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x+3^x-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}$$

$$=\ln 2+\ln 3=\ln 6\neq 1,$$

所以当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 与 x 同阶但非等价无穷小，应选(B).

(2) $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1$，$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$，因为 $f(0^+)$、$f(0^-)$ 均存在，但 $f(0^+)\neq f(0^-)$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点，应选(B).

4. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，求下列函数的定义域：

(1) $f(e^x)$；　　(2) $f(\ln x)$；

(3) $f(\arctan x)$；　　(4) $f(\cos x)$.

解　(1) 因为 $0\leqslant e^x\leqslant 1$，所以 $x\leqslant 0$，即函数 $f(e^x)$ 的定义域为 $(-\infty,0]$.

(2) 因为 $0\leqslant \ln x\leqslant 1$，所以 $1\leqslant x\leqslant e$，即函数 $f(\ln x)$ 的定义域为 $[1,e]$.

(3) 因为 $0\leqslant \arctan x\leqslant 1$，所以 $0\leqslant x\leqslant \tan 1$，即函数 $f(\arctan x)$ 的定义域为 $[0,\tan 1]$.

(4) 因为 $0\leqslant \cos x\leqslant 1$，所以 $2n\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$n\in\mathbf{Z}$，即函数 $f(\cos x)$ 的定义域为 $\left[2n\pi-\dfrac{\pi}{2},2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$，$n\in\mathbf{Z}$.

5. 设

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0,\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ -x^2, & x>0,\end{cases}$$

求 $f[f(x)]$，$g[g(x)]$，$f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

解　因为 $f[f(x)]=\begin{cases}0, & f(x)\leqslant 0,\\ f(x), & f(x)>0,\end{cases}$ 而 $f(x)\geqslant 0$，$x\in\mathbf{R}$，所以

$$f[f(x)]=f(x),\quad x\in\mathbf{R}.$$

因为 $g[g(x)]=\begin{cases}0, & g(x)\leqslant 0,\\ -g^2(x), & g(x)>0,\end{cases}$ 而 $g(x)\leqslant 0$，$x\in\mathbf{R}$，所以

$$g[g(x)]=0,\quad x\in\mathbf{R}.$$

因为 $f[g(x)]=\begin{cases}0, & g(x)\leqslant 0,\\ g(x), & g(x)>0,\end{cases}$ 而 $g(x)\leqslant 0$，$x\in\mathbf{R}$，所以

$$f[g(x)]=0,\quad x\in\mathbf{R}.$$

因为 $g[f(x)]=\begin{cases}0, & f(x)\leqslant 0,\\ -f^2(x), & f(x)>0,\end{cases}$ 而 $f(x)\geqslant 0$，$x\in\mathbf{R}$，所以

$$g[f(x)]=g(x),\quad x\in\mathbf{R}.$$

6. 利用 $y=\sin x$ 的图形作出下列函数的图形：

（1）$y=|\sin x|$；　　（2）$y=\sin|x|$；　　（3）$y=2\sin\dfrac{x}{2}$.

解　（1）作 $y=\sin x$ 的图形在 x 轴下方的部分关于 x 轴的轴对称图形即可得 $y=|\sin x|$ 的图形，如图 1－14 所示.

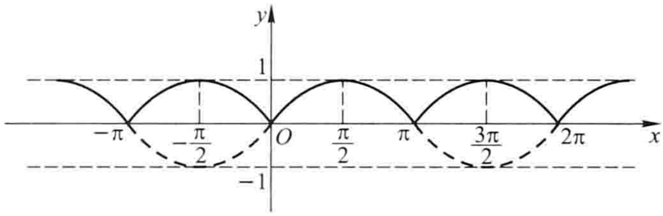


图 1－14

（2）因为 $y=\sin|x|$ 为偶函数，所以只要先画出 $y=\sin x$ 在 x 轴正方向上的图形，再对它作关于 y 轴的轴对称图形即可，如图 1－15 所示.

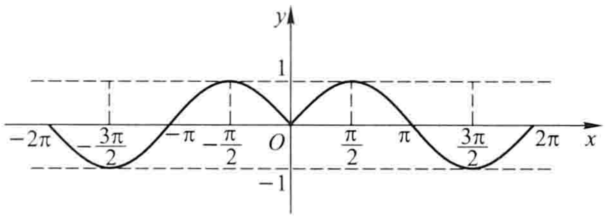


图 1－15

（3）将 $y=\sin x$ 的图形的振幅增大为 2，周期增大为 4π，如图 1－16 所示.

7. 把半径为 R 的一圆形铁皮，自圆心处剪去圆心角为 α 的一扇形后围成一无底圆锥. 试建立这圆锥的体积 V 与角 α 间的函数关系.

解　设围成的圆锥底半径为 r，高为 h，则按题意（图 1－17）有

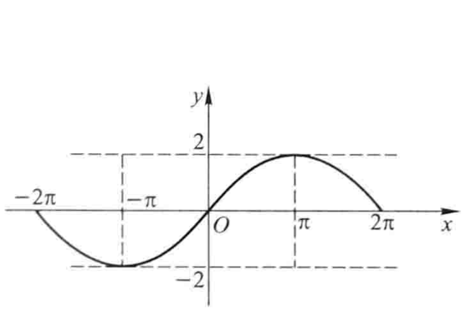


图 1－16

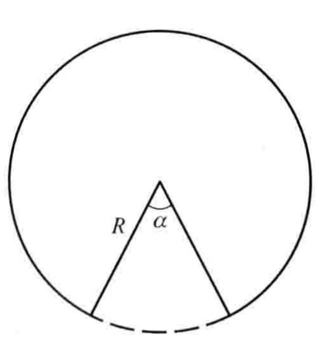


图 1－17

$$(2\pi-\alpha)R=2\pi r,$$

$$h=\sqrt{R^2-r^2}.$$

故

$$r=\frac{(2\pi-\alpha)R}{2\pi},$$

$$h=\sqrt{R^2-\frac{(2\pi-\alpha)^2}{4\pi^2}R^2}=\frac{\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}}{2\pi}R,$$

圆锥体积

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{(2\pi-\alpha)^2}{4\pi^2}R^2\cdot\frac{\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}}{2\pi}R$$
$$=\frac{R^3}{24\pi^2}(2\pi-\alpha)^2\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}\,(0<\alpha<2\pi).$$

*8. 根据函数极限的定义证明 $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-x-6}{x-3}=5$.

证 因为

$$\left|\frac{x^2-x-6}{x-3}-5\right|=\left|\frac{(x-3)(x+2)}{x-3}-5\right|=|x-3|,$$

要使 $\left|\frac{x^2-x-6}{x-3}-5\right|<\varepsilon$,只要 $|x-3|<\varepsilon$. 所以 $\forall\,\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon$,则当 $0<|x-3|<\delta$ 时,就有

$$\left|\frac{x^2-x-6}{x-3}-5\right|<\varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-x-6}{x-3}=5$.

9. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-x+1}{(x-1)^2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$;

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$;

(5) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}(a>0,b>0,c>0)$;

(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}(a>0)$;

(8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\tan x}{\sqrt{1-x^2}-1}$.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{x^2-x+1}=0$,所以 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-x+1}{(x-1)^2}=\infty$.

(2) $$\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{2x+1}{2}}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{\frac{1}{2}}=\mathrm{e}.$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{\sec x-1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}.$

(5) 因为

$$\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}+\frac{c^x-1}{x}\right)},$$

而

$$\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}}\to\mathrm{e}(x\to0),$$

$$\frac{a^x-1}{x}\to\ln a,\quad\frac{b^x-1}{x}\to\ln b,\quad\frac{c^x-1}{x}\to\ln c(x\to0),$$

所以

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)}=(abc)^{\frac{1}{3}}.$$

(6) 因为$(\sin x)^{\tan x}=[1+(\sin x-1)]^{\frac{1}{\sin x-1}\cdot(\sin x-1)\tan x}$,而

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[1+(\sin x-1)]^{\frac{1}{\sin x-1}}=\mathrm{e},$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x-1)\tan x&=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}\cdot\sin x\\&=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin\dfrac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\cos\dfrac{x+\frac{\pi}{2}}{2}}{2\sin\dfrac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\cos\dfrac{x+\frac{\pi}{2}}{2}}\cdot\sin x\\&=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\sin x=0,\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}=\mathrm{e}^0=1.$$

(7) 令$x-a=t$,则$x=a+t$,当$x\to a$时,$t\to0$. 故

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{a}\right)}{t}=\frac{1}{a}\lim_{t\to 0}\ln\left(1+\frac{t}{a}\right)^{\frac{a}{t}}=\frac{1}{a}.$$

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\tan x}{\sqrt{1-x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-2.$

10. 设

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ a+x^2, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,应当怎样选择数 a?

解 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 及 $(0,+\infty)$ 内均连续,要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,只要选择数 a,使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续即可. 而

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x\sin\frac{1}{x}=0,\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(a+x^2)=a,$$

又 $f(0)=a$,故应选择 $a=0$,使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,从而 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

11. 设

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}},$$

求 $f(x)$ 的间断点,并说明间断点所属类型.

解 $$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=\begin{cases}1+x, & 当\ |x|<1\ 时,\\ 0, & 当\ |x|>1\ 或\ x=-1\ 时,\\ 1, & 当\ x=1\ 时.\end{cases}$$

$x=\pm 1$ 为分段函数的分段点. $x=-1$ 处,因为 $f(-1^-)=f(-1^+)=f(-1)=0$,所以 $x=-1$ 为连续点;$x=1$ 处,因为 $f(1^-)=2$,$f(1^+)=0$,$f(1^-)\neq f(1^+)$,所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的间断点,属第一类间断点,是跳跃间断点.

12. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

证 因为 $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}<1$,而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1,\quad \lim_{n\to\infty}1=1,$$

由夹逼准则,即得证.

13. 证明方程 $\sin x+x+1=0$ 在开区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个根.

证　设$f(x)=\sin x+x+1$,则$f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上连续.因为

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}+1=-\frac{\pi}{2}<0,$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+1=\frac{\pi}{2}+2>0,$$

由介值定理,至少存在一点$\xi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,使$f(\xi)=0$,即$\sin\xi+\xi+1=0$.所以方程$\sin x+x+1=0$在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内至少有一个根.

14. 如果存在直线$L:y=kx+b$,使得当$x\to\infty$(或$x\to+\infty$,$x\to-\infty$)时,曲线$y=f(x)$上的动点$M(x,y)$到直线L的距离$d(M,L)\to0$,则称L为曲线$y=f(x)$的渐近线.当直线L的斜率$k\neq0$时,称L为斜渐近线.

(1)证明:直线$L:y=kx+b$为曲线$y=f(x)$的渐近线的充分必要条件是

$$k=\lim_{\substack{x\to\infty\\ \left(\substack{x\to+\infty\\ x\to-\infty}\right)}}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{\substack{x\to\infty\\ \left(\substack{x\to+\infty\\ x\to-\infty}\right)}}[f(x)-kx];$$

(2)求曲线$y=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$的斜渐近线.

解　(1)就$x\to+\infty$的情形证明,其他情形类似.

设$L:y=kx+b$为曲线$y=f(x)$的渐近线.

1°若$k\neq0$,如图1-18所示,$k=\tan\alpha$$\left(\alpha\text{为}L\text{的倾角},\alpha\neq\frac{\pi}{2}\right)$,曲线$y=f(x)$上动点$M(x,y)$到直线$L$的距离为$|MK|$.过$M$作横轴的垂线,交直线$L$于$K_1$,则

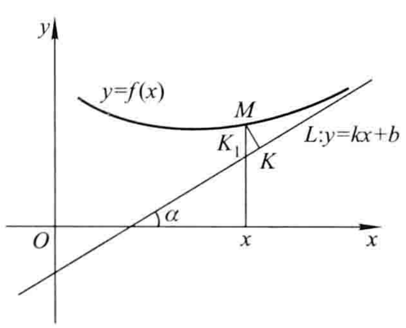


图1-18

$$|MK_1|=\frac{|MK|}{\cos\alpha}.$$

显然$|MK|\to0\ (x\to+\infty)$与$|MK_1|\to0\ (x\to+\infty)$等价,而

$$|MK_1|=|f(x)-(kx+b)|.$$

因为$L:y=kx+b$是曲线$y=f(x)$的渐近线,所以

$$|MK| \to 0\ (x \to +\infty) \Rightarrow |MK_1| \to 0\ (x \to +\infty),$$

即

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0, \tag{1}$$

从而

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - (kx + b)] + b = 0 + b = b, \tag{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}[f(x) - kx] + k = 0 + k = k. \tag{3}$$

反之,若(2)、(3)成立,则(1)成立,即 $L: y = kx + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的渐近线.

2°若 $k = 0$,设 $L: y = b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线,如图 1-19 所示. 按定义有 $|MK| \to 0\ (x \to +\infty)$,而 $|MK| = |f(x) - b|$,故有

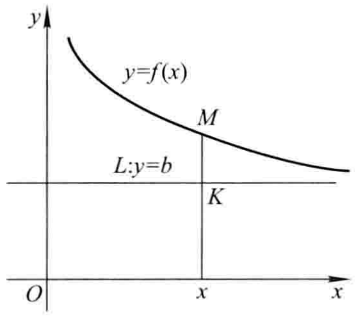


图 1-19

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b, \tag{4}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0. \tag{5}$$

反之,若(4)、(5)成立,即有 $|MK| = |f(x) - b| \to 0\ (x \to +\infty)$,故 $y = b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线.

(2) 因为

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(2x - 1)}{x} e^{\frac{1}{x}} = 2,$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \to \infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \to \infty} [(2x - 1)e^{\frac{1}{x}} - 2x] = \lim_{x \to \infty} 2x(e^{\frac{1}{x}} - 1) - \lim_{x \to \infty} e^{\frac{1}{x}} \\ &= 2\lim_{x \to \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} - 1 = 2\lim_{u \to 0} \frac{e^u - 1}{u} - 1 = 2\ln e - 1 = 1, \end{aligned}$$

所以,所求曲线的斜渐近线为 $y = 2x + 1$.

第二章
导数与微分

习题 2-1　导数概念

1. 设物体绕定轴旋转,在时间间隔$[0,t]$上转过角度θ,从而转角θ是t的函数:$\theta=\theta(t)$. 如果旋转是匀速的,那么称$\omega=\dfrac{\theta}{t}$为该物体旋转的角速度. 如果旋转是非匀速的,应怎样确定该物体在时刻t_0的角速度?

解　物体在时间间隔$[t_0,t_0+\Delta t]$上的平均角速度

$$\bar{\omega}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{\theta(t_0+\Delta t)-\theta(t_0)}{\Delta t}.$$

在时刻t_0的角速度

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{\omega}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\theta'(t_0).$$

2. 当物体的温度高于周围介质的温度时,物体就不断冷却. 若物体的温度T与时间t的函数关系为$T=T(t)$,应怎样确定该物体在时刻t的冷却速度?

解　物体在时间间隔$[t,t+\Delta t]$上平均冷却速度

$$\bar{v}=\frac{\Delta T}{\Delta t}=\frac{T(t+\Delta t)-T(t)}{\Delta t}.$$

在时刻t的冷却速度

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta T}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{T(t+\Delta t)-T(t)}{\Delta t}=T'(t).$$

3. 设某工厂生产x件产品的成本为

$$C(x)=2\,000+100x-0.1x^2(\text{元}),$$

函数$C(x)$称为成本函数,成本函数$C(x)$的导数$C'(x)$在经济学中称为边际成本. 试求

(1) 当生产 100 件产品时的边际成本;

(2) 生产第 101 件产品的成本,并与(1)中求得的边际成本作比较,说明边际成本的实际意义.

解　(1) $C'(x)=100-0.2x$,

$$C'(100)=100-20=80(\text{元/件}).$$

(2) $C(101)=2\,000+100\times101-0.1\times(101)^2=11\,079.9(\text{元})$,

$C(100)=2\,000+100\times100-0.1\times(100)^2=11\,000(\text{元})$,

$C(101)-C(100)=11\,079.9-11\,000=79.9(\text{元})$.

即生产第 101 件产品的成本为 79.9 元,与(1)中求得的边际成本比较,可以看出边际成本 $C'(x)$ 的实际意义是近似表达产量达到 x 单位时再增加一个单位产品所需的成本.

4. 设 $f(x)=10x^2$,试按定义求 $f'(-1)$.

解 $$f'(-1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{10(-1+\Delta x)^2-10(-1)^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-20\Delta x+10(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(-20+10\Delta x)=-20.$$

5. 证明 $(\cos x)'=-\sin x$.

证 $$(\cos x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[-\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=-\sin x.$$

6. 下列各题中均假定 $f'(x_0)$ 存在,按照导数定义观察下列极限,指出 A 表示什么:

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$,其中 $f(0)=0$,且 $f'(0)$ 存在;

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=A$.

解 (1) $$A=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$=-\lim_{-\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+(-\Delta x))-f(x_0)}{-\Delta x}=-f'(x_0).$$

(2) 由于 $f(0)=0$,故 $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$.

(3) $$A=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim_{-h\to 0}\frac{f(x_0+(-h))-f(x_0)}{-h}$$

$$=2f'(x_0).$$

以下两题中给出了四个结论,从中选出一个正确的结论:

7. 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3, & x\leqslant 1,\\ x^2, & x>1,\end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的(　　).

(A) 左、右导数都存在　　(B) 左导数存在，右导数不存在

(C) 左导数不存在，右导数存在　　(D) 左、右导数都不存在

解　$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1^-}\frac{2}{3}\cdot\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{2}{3}(x^2+x+1)=2;$$
$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-\frac{2}{3}}{x-1}=\infty,$$

故该函数左导数存在，右导数不存在，因此应选(B).

8. 设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的(　　).

(A) 充分必要条件　　(B) 充分条件但非必要条件

(C) 必要条件但非充分条件　　(D) 既非充分条件又非必要条件

解　$$F'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)(1+\sin x)-f(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}+f(x)\frac{\sin x}{x}\right]=f'(0)+f(0),$$
$$F'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)(1-\sin x)-f(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0^-}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}-f(x)\frac{\sin x}{x}\right]=f'(0)-f(0).$$

当 $f(0)=0$ 时，$F'_+(0)=F'_-(0)$，反之当 $F'_+(0)=F'_-(0)$ 时，$f(0)=0$，因此应选(A).

9. 求下列函数的导数：

(1) $y=x^4$；　(2) $y=\sqrt[3]{x^2}$；　(3) $y=x^{1.6}$；

(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$；　(5) $y=\dfrac{1}{x^2}$；　(6) $y=x^3\sqrt[5]{x}$；

(7) $y=\dfrac{x^2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^5}}$.

解　(1) $y'=4x^3$.

(2) $y=x^{\frac{2}{3}}$，$y'=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$.

(3) $y'=1.6x^{0.6}$.

(4) $y=x^{-\frac{1}{2}}, y'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$.

(5) $y=x^{-2}, y'=-2x^{-3}$.

(6) $y=x^{\frac{16}{5}}, y'=\frac{16}{5}x^{\frac{11}{5}}$.

(7) $y=x^{2+\frac{2}{3}-\frac{5}{2}}=x^{\frac{1}{6}}, y'=\frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$.

10. 已知物体的运动规律为 $s=t^3$ m,求这物体在 $t=2$ s 时的速度.

解
$$v=\frac{ds}{dt}=3t^2,\quad v|_{t=2}=12(\mathrm{m/s}).$$

11. 如果 $f(x)$ 为偶函数,且 $f'(0)$ 存在,证明 $f'(0)=0$.

证　$f(x)$ 为偶函数,故有 $f(-x)=f(x)$. 因为
$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(-x)-f(0)}{x-0}\\&=-\lim_{-x\to 0}\frac{f(-x)-f(0)}{-x-0}\\&=-f'(0),\end{aligned}$$
所以 $f'(0)=0$.

12. 求曲线 $y=\sin x$ 在具有下列横坐标的各点处切线的斜率:
$$x=\frac{2}{3}\pi,\quad x=\pi.$$

解　由导数的几何意义知
$$k_1=y'|_{x=\frac{2}{3}\pi}=\cos x|_{x=\frac{2}{3}\pi}=-\frac{1}{2},\quad k_2=y'|_{x=\pi}=\cos x|_{x=\pi}=-1.$$

13. 求曲线 $y=\cos x$ 上点 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$ 处的切线方程和法线方程.

解
$$y'|_{x=\frac{\pi}{3}}=(-\sin x)|_{x=\frac{\pi}{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$
故曲线在点 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$ 处的切线方程为
$$y-\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right),$$
即 $\frac{\sqrt{3}}{2}x+y-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\pi\right)=0$.

曲线在点 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$ 处的法线方程为
$$y-\frac{1}{2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{\pi}{3}\right),$$

即$\frac{2\sqrt{3}}{3}x-y+\frac{1}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi=0$.

14. 求曲线 $y=e^x$ 在点(0,1)处的切线方程.

解
$$y'|_{x=0}=e^x|_{x=0}=1,$$
故曲线在(0,1)处的切线方程为
$$y-1=1\cdot(x-0),$$
即 $x-y+1=0$.

15. 在抛物线 $y=x^2$ 上取横坐标为 $x_1=1$ 及 $x_2=3$ 的两点,作过这两点的割线. 问该抛物线上哪一点的切线平行于这条割线?

解　割线的斜率
$$k=\frac{3^2-1^2}{3-1}=\frac{8}{2}=4.$$
假设抛物线上点(x_0,x_0^2)处的切线平行于该割线,则有
$$(x^2)'|_{x=x_0}=4,\text{即 }2x_0=4.$$
故 $x_0=2$,由此得所求点为(2,4).

16. 讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性与可导性:

(1) $y=|\sin x|$;

(2) $y=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}|\sin x|=0=f(0)$,故 $y=|\sin x|$在 $x=0$ 处连续. 又
$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin x}{x}=-1,$$
$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1,$$
$f'_-(0)\neq f'_+(0)$,故 $y=|\sin x|$在 $x=0$ 处不可导.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$,故函数在 $x=0$ 处连续. 又
$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0,$$
故函数在 $x=0$ 处可导.

17. 设函数
$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ ax+b, & x>1.\end{cases}$$
为了使函数$f(x)$在 $x=1$ 处连续且可导,a、b 应取什么值?

解　要函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，应有

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^+}f(x)=f(1),$$

即 $1=a+b$.

要函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，应有 $f'_-(1)=f'_+(1)$. 而

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=2,$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{ax+b-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{a(x-1)+a+b-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{a(x-1)}{x-1}=a.$$

故 $a=2,b=-1$.

18. 已知 $f(x)=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant0,\end{cases}$ 求 $f'_+(0)$ 及 $f'_-(0)$，又 $f'(0)$ 是否存在？

解
$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x-0}{x}=-1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2-0}{x}=0.$$

由于 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$，故 $f'(0)$ 不存在.

19. 已知 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ x, & x\geqslant0,\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

解
$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x}=1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x}=1.$$

由于 $f'_-(0)=f'_+(0)=1$，故 $f'(0)=1$. 因此

$$f'(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant0.\end{cases}$$

20. 证明：双曲线 $xy=a^2$ 上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形的面积都等于 $2a^2$.

证　设 (x_0,y_0) 为双曲线 $xy=a^2$ 上任一点，曲线在该点处的切线斜率

$$k=\left(\frac{a^2}{x}\right)'\bigg|_{x=x_0}=-\frac{a^2}{x_0^2},$$

切线方程为

$$y-y_0=-\frac{a^2}{x_0^2}(x-x_0)\text{或}\frac{x}{2x_0}+\frac{y}{2y_0}=1,$$

由此可得所构成的三角形的面积为

$$A=\frac{1}{2}|2x_0||2y_0|=2a^2.$$

习题 2-2　函数的求导法则

1. 推导余切函数及余割函数的导数公式：

$$(\cot x)'=-\csc^2 x,\quad (\csc x)'=-\csc x\cot x.$$

解　$(\cot x)'=\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)'=\dfrac{-\sin x\sin x-\cos x\cos x}{\sin^2 x}=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x.$

$(\csc x)'=\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)'=\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}=-\csc x\cot x.$

2. 求下列函数的导数：

(1) $y=x^3+\dfrac{7}{x^4}-\dfrac{2}{x}+12$；

(2) $y=5x^3-2^x+3e^x$；

(3) $y=2\tan x+\sec x-1$；

(4) $y=\sin x\cos x$；

(5) $y=x^2\ln x$；

(6) $y=3e^x\cos x$；

(7) $y=\dfrac{\ln x}{x}$；

(8) $y=\dfrac{e^x}{x^2}+\ln 3$；

(9) $y=x^2\ln x\cos x$；

(10) $s=\dfrac{1+\sin t}{1+\cos t}$.

解　(1) $y'=3x^2-\dfrac{28}{x^5}+\dfrac{2}{x^2}.$

(2) $y'=15x^2-2^x\ln 2+3e^x.$

(3) $y'=2\sec^2 x+\sec x\tan x=\sec x(2\sec x+\tan x).$

(4) $y'=\left(\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)'=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cos 2x=\cos 2x.$

(5) $y'=2x\ln x+x^2\cdot\dfrac{1}{x}=x(2\ln x+1).$

(6) $y'=3e^x\cos x-3e^x\sin x=3e^x(\cos x-\sin x).$

(7) $y'=\dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}.$

(8) $y'=\dfrac{e^x\cdot x^2-2xe^x}{x^4}=\dfrac{e^x(x-2)}{x^3}.$

(9) $y'=2x\ln x\cos x+x^2\cdot\dfrac{1}{x}\cos x+x^2\ln x(-\sin x)$

$=2x\ln x\cos x+x\cos x-x^2\ln x\sin x.$

(10) $s'=\dfrac{\cos t(1+\cos t)-(1+\sin t)(-\sin t)}{(1+\cos t)^2}=\dfrac{1+\sin t+\cos t}{(1+\cos t)^2}$.

3. 求下列函数在给定点处的导数：

(1) $y=\sin x-\cos x$,求 $y'|_{x=\frac{\pi}{6}}$ 和 $y'|_{x=\frac{\pi}{4}}$;

(2) $\rho=\theta\sin\theta+\dfrac{1}{2}\cos\theta$,求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}$;

(3) $f(x)=\dfrac{3}{5-x}+\dfrac{x^2}{5}$,求 $f'(0)$ 和 $f'(2)$.

解　(1) $y'=\cos x+\sin x$, $y'|_{x=\frac{\pi}{6}}=\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$,

$$y'|_{x=\frac{\pi}{4}}=\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}.$$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}=\sin\theta+\theta\cos\theta+\dfrac{1}{2}(-\sin\theta)=\dfrac{1}{2}\sin\theta+\theta\cos\theta$,

$\left.\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(3) $f'(x)=\dfrac{3}{(5-x)^2}+\dfrac{2}{5}x$, $f'(0)=\dfrac{3}{25}$, $f'(2)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{5}=\dfrac{17}{15}$.

4. 以初速 v_0 竖直上抛的物体,其上升高度 s 与时间 t 的关系是 $s=v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$. 求：

(1) 该物体的速度 $v(t)$;(2) 该物体达到最高点的时刻.

解　(1) $v(t)=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v_0-gt$.

(2) 物体达到最高点的时刻 $v=0$,即 $v_0-gt=0$,故 $t=\dfrac{v_0}{g}$.

5. 求曲线 $y=2\sin x+x^2$ 上横坐标为 $x=0$ 的点处的切线方程和法线方程.

解

$$y'=2\cos x+2x,\ y'|_{x=0}=2,\ y|_{x=0}=0,$$

因此曲线在点(0,0)处的切线方程为

$$y-0=2(x-0),$$

即 $2x-y=0$,法线方程为

$$y-0=-\frac{1}{2}(x-0),$$

即 $x+2y=0$.

6. 求下列函数的导数：

(1) $y=(2x+5)^4$;　　(2) $y=\cos(4-3x)$;

(3) $y=\mathrm{e}^{-3x^2}$;　　(4) $y=\ln(1+x^2)$;

(5) $y=\sin^2 x$;　　(6) $y=\sqrt{a^2-x^2}$;

(7) $y=\tan x^2$;　　(8) $y=\arctan(e^x)$;

(9) $y=(\arcsin x)^2$;　　(10) $y=\ln\cos x$.

解 (1) $y'=4(2x+5)^3\cdot 2=8(2x+5)^3$.

(2) $y'=-\sin(4-3x)(-3)=3\sin(4-3x)$.

(3) $y'=e^{-3x^2}\cdot(-6x)=-6xe^{-3x^2}$.

(4) $y'=\dfrac{1}{1+x^2}\cdot 2x=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

(5) $y'=2\sin x\cos x=\sin 2x$.

(6) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}(-2x)=-\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

(7) $y'=\sec^2 x^2\cdot 2x=2x\sec^2 x^2$.

(8) $y'=\dfrac{1}{1+(e^x)^2}\cdot e^x=\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$.

(9) $y'=2\arcsin x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x$.

(10) $y'=\dfrac{1}{\cos x}(-\sin x)=-\tan x$.

7. 求下列函数的导数:

(1) $y=\arcsin(1-2x)$;　　(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(3) $y=e^{-\frac{x}{2}}\cos 3x$;　　(4) $y=\arccos\dfrac{1}{x}$;

(5) $y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$;　　(6) $y=\dfrac{\sin 2x}{x}$;

(7) $y=\arcsin\sqrt{x}$;　　(8) $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$;

(9) $y=\ln(\sec x+\tan x)$;　　(10) $y=\ln(\csc x-\cot x)$.

解 (1) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-(1-2x)^2}}\cdot(-2)=-\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$.

(2) $$y'=\frac{-\dfrac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}}{(\sqrt{1-x^2})^2}=\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

(3) $$y'=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\cos 3x-3e^{-\frac{x}{2}}\sin 3x$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(\cos 3x+6\sin 3x).$$

(4) $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}.$

(5) $y' = \dfrac{-\dfrac{1}{x}(1+\ln x)-(1-\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}}{(1+\ln x)^2} = -\dfrac{2}{x(1+\ln x)^2}.$

(6) $y' = \dfrac{2x\cos 2x-\sin 2x}{x^2}.$

(7) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}.$

(8) $y' = \dfrac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}}\right) = \dfrac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}} \cdot \dfrac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}.$

(9) $y' = \dfrac{1}{\sec x+\tan x}(\sec x\tan x+\sec^2 x) = \sec x.$

(10) $y' = \dfrac{1}{\csc x-\cot x}(-\csc x\cot x+\csc^2 x) = \csc x.$

8. 求下列函数的导数:

(1) $y = \left(\arcsin\dfrac{x}{2}\right)^2$;

(2) $y = \ln\tan\dfrac{x}{2}$;

(3) $y = \sqrt{1+\ln^2 x}$;

(4) $y = e^{\arctan\sqrt{x}}$;

(5) $y = \sin^n x\cos nx$;

(6) $y = \arctan\dfrac{x+1}{x-1}$;

(7) $y = \dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$;

(8) $y = \ln\ln\ln x$;

(9) $y = \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$;

(10) $y = \arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}.$

解 (1) $y' = 2\arcsin\dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{2\arcsin\dfrac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}.$

(2) $y' = \dfrac{1}{\tan\dfrac{x}{2}} \cdot \sec^2\dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}} = \dfrac{1}{\sin x} = \csc x.$

(3) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+\ln^2 x}} \cdot 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}.$

(4) $y' = \mathrm{e}^{\arctan\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{e}^{\arctan\sqrt{x}}.$

(5) $$y' = n\sin^{n-1}x\cos x\cos nx + \sin^n x(-\sin nx)\cdot n$$
$$= n\sin^{n-1}x(\cos x\cos nx - \sin x\sin nx)$$
$$= n\sin^{n-1}x\cos(n+1)x.$$

(6) $$y' = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2+(x+1)^2}$$
$$= -\frac{1}{1+x^2}.$$

(7) $$y' = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x - \arcsin x\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{(\arccos x)^2}$$
$$= \frac{\arccos x + \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}(\arccos x)^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}(\arccos x)^2}.$$

(8) $y' = \dfrac{1}{\ln\ln x} \cdot \dfrac{1}{\ln x} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x\ln x\ln\ln x}.$

(9) $y' =$
$$\frac{\left(\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}) - (\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})\left(\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2 + \dfrac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^2}{2+2\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{1}{4}\frac{2+2}{(1+\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}.$$

(10) $$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{1}{(1+x)^2}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2x}(1+x)\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}.$$

9. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 可导，且 $f^2(x)+g^2(x)\neq 0$，试求函数 $y=\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$ 的导数.

解　$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}[2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)]$

$=\dfrac{f(x)f'(x)+g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}.$

10. 设 $f(x)$ 可导,求下列函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$:

(1) $y=f(x^2)$;　　(2) $y=f(\sin^2x)+f(\cos^2x)$.

解　(1) $y'=f'(x^2)2x=2xf'(x^2)$.

(2) $y'=f'(\sin^2x)2\sin x\cos x+f'(\cos^2x)2\cos x(-\sin x)$

$=\sin 2x[f'(\sin^2x)-f'(\cos^2x)]$.

11. 求下列函数的导数:

(1) $y=e^{-x}(x^2-2x+3)$;　　(2) $y=\sin^2x\cdot\sin(x^2)$;

(3) $y=\left(\arctan\dfrac{x}{2}\right)^2$;　　(4) $y=\dfrac{\ln x}{x^n}$;

(5) $y=\dfrac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$;　　(6) $y=\ln\cos\dfrac{1}{x}$;

(7) $y=e^{-\sin^2\frac{1}{x}}$;　　(8) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$;

(9) $y=x\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$;　　(10) $y=\arcsin\dfrac{2t}{1+t^2}$.

解　(1) $y'=-e^{-x}(x^2-2x+3)+e^{-x}(2x-2)=e^{-x}(-x^2+4x-5)$.

(2) $y'=2\sin x\cos x\cdot\sin(x^2)+\sin^2x\cos(x^2)\cdot 2x$

$=\sin 2x\sin(x^2)+2x\sin^2x\cos(x^2)$.

(3) $y'=2\arctan\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{4+x^2}\arctan\dfrac{x}{2}.$

(4) $y'=\dfrac{\dfrac{1}{x}x^n-nx^{n-1}\ln x}{x^{2n}}=\dfrac{1-n\ln x}{x^{n+1}}.$

(5) $y'=\dfrac{(e^t+e^{-t})(e^t+e^{-t})-(e^t-e^{-t})(e^t-e^{-t})}{(e^t+e^{-t})^2}$

$=\dfrac{4}{(e^t+e^{-t})^2}.$

或 $y'=(\text{th }t)'=\dfrac{1}{\text{ch}^2t}.$

(6) $y'=\dfrac{1}{\cos\dfrac{1}{x}}\left(-\sin\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{1}{x^2}\tan\dfrac{1}{x}.$

(7) $y' = e^{-\sin^2\frac{1}{x}}\left(-2\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}\sin\frac{2}{x}e^{-\sin^2\frac{1}{x}}$.

(8) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

(9) $y' = \arcsin\frac{x}{2} + x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2} + \frac{(-2x)}{2\sqrt{4-x^2}}$

$$= \arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2}.$$

(10) $y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}}\cdot\frac{2(1+t^2)-2t\cdot 2t}{(1+t^2)^2}$

$$= \frac{1+t^2}{\sqrt{(1-t^2)^2}}\cdot\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = \frac{2(1-t^2)}{|1-t^2|(1+t^2)}$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{1+t^2}, |t|<1, \\ -\frac{2}{1+t^2}, |t|>1. \end{cases}$$

*12. 求下列函数的导数:

(1) $y = \operatorname{ch}(\operatorname{sh} x)$; (2) $y = \operatorname{sh} x\cdot e^{\operatorname{ch} x}$;

(3) $y = \operatorname{th}(\ln x)$; (4) $y = \operatorname{sh}^3 x + \operatorname{ch}^2 x$;

(5) $y = \operatorname{th}(1-x^2)$; (6) $y = \operatorname{arsh}(x^2+1)$;

(7) $y = \operatorname{arch}(e^{2x})$; (8) $y = \arctan(\operatorname{th} x)$;

(9) $y = \ln\operatorname{ch} x + \frac{1}{2\operatorname{ch}^2 x}$; (10) $y = \operatorname{ch}^2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

解 (1) $y' = \operatorname{sh}(\operatorname{sh} x)\cdot\operatorname{ch} x = \operatorname{ch} x\operatorname{sh}(\operatorname{sh} x)$.

(2) $y' = \operatorname{ch} xe^{\operatorname{ch} x} + \operatorname{sh} xe^{\operatorname{ch} x}\operatorname{sh} x = e^{\operatorname{ch} x}(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh}^2 x)$.

(3) $y' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(\ln x)}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\operatorname{ch}^2(\ln x)}$.

(4) $y' = 3\operatorname{sh}^2 x\operatorname{ch} x + 2\operatorname{ch} x\operatorname{sh} x = \operatorname{sh} x\operatorname{ch} x(3\operatorname{sh} x + 2)$.

(5) $y' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(1-x^2)}\cdot(-2x) = -\frac{2x}{\operatorname{ch}^2(1-x^2)}$.

(6) $y' = \frac{1}{\sqrt{1+(x^2+1)^2}}\cdot 2x = \frac{2x}{\sqrt{x^4+2x^2+2}}$.

(7) $y' = \frac{1}{\sqrt{(e^{2x})^2-1}}\cdot e^{2x}\cdot 2 = \frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}-1}}$.

(8) $y'=\dfrac{1}{1+(\operatorname{th}x)^2}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2x}=\dfrac{1}{1+\dfrac{\operatorname{sh}^2x}{\operatorname{ch}^2x}}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2x}=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2x}$

$=\dfrac{1}{1+2\operatorname{sh}^2x}.$

(9) $y'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}x}\operatorname{sh}x-\dfrac{1}{(2\operatorname{ch}^2x)^2}\cdot4\operatorname{ch}x\operatorname{sh}x=\dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}-\dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^3x}$

$=\dfrac{\operatorname{sh}x(\operatorname{ch}^2x-1)}{\operatorname{ch}^3x}=\dfrac{\operatorname{sh}^3x}{\operatorname{ch}^3x}=\operatorname{th}^3x.$

(10) $y'=2\operatorname{ch}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\operatorname{sh}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\cdot\dfrac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{2}{(x+1)^2}\operatorname{sh}\left(2\cdot\dfrac{x-1}{x+1}\right).$

13. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在点 x_0 的某一邻域内有定义,$f(x)$ 在 x_0 处可导,$f(x_0)=0$,$g(x)$ 在 x_0 处连续,试讨论 $f(x)g(x)$ 在 x_0 处的可导性.

解　由 $f(x)$ 在 x_0 处可导,且 $f(x_0)=0$,则有

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0};$$

由 $g(x)$ 在 x_0 处连续,则有 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$,故

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0}g(x)=f'(x_0)g(x_0),$$

即 $f(x)g(x)$ 在 x_0 处可导,其导数为 $f'(x_0)g(x_0)$.

14. 设函数 $f(x)$ 满足下列条件:

(1) $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$,对一切 $x,y\in\mathbf{R}$;

(2) $f(x)=1+xg(x)$,而 $\lim\limits_{x\to0}g(x)=1$.

试证明 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处可导,且 $f'(x)=f(x)$.

证　由(2)知 $f(0)=1$,故

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\left[f(x)\cdot\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}\right]=\lim_{\Delta x\to0}\left[f(x)\cdot\frac{\Delta xg(\Delta x)}{\Delta x}\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}[f(x)g(\Delta x)]=f(x)\cdot1=f(x).$$

习题 2-3　高阶导数

1. 求下列函数的二阶导数:

(1) $y=2x^2+\ln x$;　　(2) $y=e^{2x-1}$;

(3) $y = x\cos x$;　　(4) $y = e^{-t}\sin t$;

(5) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$;　　(6) $y = \ln(1 - x^2)$;

(7) $y = \tan x$;　　(8) $y = \dfrac{1}{x^3 + 1}$;

(9) $y = (1 + x^2)\arctan x$;　　(10) $y = \dfrac{e^x}{x}$;

(11) $y = xe^{x^2}$;　　(12) $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

解　(1) $y' = 4x + \dfrac{1}{x}, y'' = 4 - \dfrac{1}{x^2}$.

(2) $y' = e^{2x-1} \cdot 2 = 2e^{2x-1}, y'' = 2e^{2x-1} \cdot 2 = 4e^{2x-1}$.

(3) $y' = \cos x + x(-\sin x) = \cos x - x\sin x$,

$y'' = -\sin x - \sin x - x\cos x = -2\sin x - x\cos x$.

(4) $y' = e^{-t}(-1)\sin t + e^{-t}\cos t = e^{-t}(\cos t - \sin t)$,

$$y'' = e^{-t}(-1)(\cos t - \sin t) + e^{-t}(-\sin t - \cos t)$$
$$= e^{-t}(-2\cos t) = -2e^{-t}\cos t.$$

(5) $y' = \dfrac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$,

$$y'' = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2} - x \cdot \dfrac{(-2x)}{2\sqrt{a^2 - x^2}}}{(\sqrt{a^2 - x^2})^2} = \frac{-a^2}{(a^2 - x^2)^{3/2}}.$$

(6) $y' = \dfrac{1}{1 - x^2} \cdot (-2x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$,

$$y'' = \frac{2(x^2 - 1) - 2x \cdot (2x)}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{2(1 + x^2)}{(1 - x^2)^2}.$$

(7) $y' = \sec^2 x, y'' = 2\sec^2 x\tan x$.

(8) $y' = \dfrac{-3x^2}{(x^3 + 1)^2}$,

$$y'' = -\frac{3[2x(x^3 + 1)^2 - x^2 \cdot 2(x^3 + 1) \cdot 3x^2]}{(x^3 + 1)^4} = \frac{6x(2x^3 - 1)}{(x^3 + 1)^3}.$$

(9) $y' = 2x\arctan x + (1 + x^2) \cdot \dfrac{1}{1 + x^2} = 2x\arctan x + 1$,

$$y'' = 2\arctan x + 2x\frac{1}{1 + x^2} = 2\arctan x + \frac{2x}{1 + x^2}.$$

(10) $y' = \dfrac{xe^x - e^x}{x^2} = \dfrac{(x - 1)e^x}{x^2}$,

$$y'' = \frac{(e^x + (x - 1)e^x)x^2 - 2x(x - 1)e^x}{x^4} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}.$$

(11) $y' = e^{x^2} + xe^{x^2} \cdot 2x = (1+2x^2)e^{x^2}$,

$y'' = 4xe^{x^2} + (1+2x^2)e^{x^2} \cdot 2x = 2x(3+2x^2)e^{x^2}$.

(12) $y' = \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

$$y'' = \frac{-\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{(\sqrt{1+x^2})^2} = -\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

2. 设 $f(x)=(x+10)^6$, $f'''(2)=?$

解 $f'(x)=6(x+10)^5$, $f''(x)=30(x+10)^4$, $f'''(x)=120(x+10)^3$,

$f'''(2)=120\times12^3=207\,360$.

3. 设 $f''(x)$ 存在,求下列函数的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $y=f(x^2)$; (2) $y=\ln[f(x)]$.

解 (1) $y'=f'(x^2)\cdot2x=2xf'(x^2)$,

$$\begin{aligned} y'' &= 2f'(x^2)+2xf''(x^2)\cdot 2x \\ &= 2f'(x^2)+4x^2f''(x^2). \end{aligned}$$

(2) $y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, $y''=\dfrac{f''(x)f(x)-f'^2(x)}{f^2(x)}$.

4. 试从 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y'}$ 导出:

(1) $\dfrac{d^2x}{dy^2}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$; (2) $\dfrac{d^3x}{dy^3}=\dfrac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$.

解 (1) $\dfrac{d^2x}{dy^2}=\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{dx}{dy}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{y'}\right)\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{y''}{(y')^2}\cdot\dfrac{1}{y'}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$.

(2)
$$\begin{aligned} \frac{d^3x}{dy^3} &= \frac{d}{dy}\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{-y''}{(y')^3}\right)\frac{dx}{dy}=-\frac{y'''(y')^3-y''\cdot3(y')^2y''}{(y')^6}\cdot\frac{1}{y'} \\ &= \frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}. \end{aligned}$$

5. 已知物体的运动规律为 $s=A\sin\omega t$(A,ω 是常数),求物体运动的加速度,并验证:

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\omega^2s=0.$$

解 $\dfrac{ds}{dt}=A\cos\omega t\cdot\omega=A\omega\cos\omega t$, $\dfrac{d^2s}{dt^2}=-A\omega^2\sin\omega t$,

故

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\omega^2s=-A\omega^2\sin\omega t+\omega^2A\sin\omega t=0.$$

6. 密度大的陨星进入大气层时,当它离地心为 s km 时的速度与 $\sqrt{s}$ 成反比. 试证陨星

的加速度 a 与 s^2 成反比.

证　由题意知 $v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\dfrac{k}{\sqrt{s}}$,其中 k 为比例系数,则

$$a=\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{k}{\sqrt{s}}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{s^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{k}{\sqrt{s}}=-\frac{k^2}{2s^2},$$

即陨星的加速度与 s^2 成反比.

7. 假设质点沿 x 轴运动的速度为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x)$,试求质点运动的加速度.

解　质点运动的加速度为

$$a=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f'(x)f(x).$$

8. 验证函数 $y=C_1\mathrm{e}^{\lambda x}+C_2\mathrm{e}^{-\lambda x}$($\lambda,C_1,C_2$ 是常数)满足关系式

$$y''-\lambda^2y=0.$$

解　$$y'=C_1\lambda\mathrm{e}^{\lambda x}-C_2\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x},y''=C_1\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda x}+C_2\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda x},$$

故

$$y''-\lambda^2y=C_1\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda x}+C_2\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda x}-\lambda^2(C_1\mathrm{e}^{\lambda x}+C_2\mathrm{e}^{-\lambda x})=0.$$

9. 验证函数 $y=\mathrm{e}^x\sin x$ 满足关系式

$$y''-2y'+2y=0.$$

解　$y'=\mathrm{e}^x\sin x+\mathrm{e}^x\cos x=\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)$,

$y''=\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)+\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)=2\mathrm{e}^x\cos x$,

故

$$y''-2y'+2y=2\mathrm{e}^x\cos x-2\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)+2\mathrm{e}^x\sin x=0.$$

10. 求下列函数所指定的阶的导数:

(1) $y=\mathrm{e}^x\cos x$,求 $y^{(4)}$;　　　　(2) $y=x^2\sin 2x$,求 $y^{(50)}$.

解　(1) 利用莱布尼茨公式 $(uv)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$,其中,$\mathrm{C}_n^k=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$.

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^x\cos x)^{(4)}&=(\mathrm{e}^x)^{(4)}\cos x+4(\mathrm{e}^x)'''(\cos x)'+\frac{4\cdot 3}{2!}(\mathrm{e}^x)''(\cos x)''+\\&\quad\frac{4\cdot 3\cdot 2}{3!}(\mathrm{e}^x)'(\cos x)'''+\mathrm{e}^x(\cos x)^{(4)}\\&=\mathrm{e}^x\cos x-4\mathrm{e}^x\sin x+6\mathrm{e}^x(-\cos x)+4\mathrm{e}^x\sin x+\mathrm{e}^x\cos x\\&=-4\mathrm{e}^x\cos x.\end{aligned}$$

(2) 由 $(\sin 2x)^{(n)}=2^n\sin\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ 及莱布尼茨公式得

$$(x^2\sin 2x)^{(50)}=x^2(\sin 2x)^{(50)}+50(x^2)'(\sin 2x)^{(49)}+\frac{50\cdot 49}{2!}(x^2)''(\sin 2x)^{(48)}$$

$$=2^{50}x^2\sin\left(2x+\frac{50\pi}{2}\right)+100\cdot 2^{49}x\sin\left(2x+\frac{49\pi}{2}\right)+$$

$$\frac{50\cdot 49}{2}\cdot 2\cdot 2^{48}\sin\left(2x+\frac{48\pi}{2}\right)$$

$$=2^{50}\left(-x^2\sin 2x+50x\cos 2x+\frac{1\ 225}{2}\sin 2x\right).$$

*11. 求下列函数的 n 阶导数的一般表达式:

(1) $y=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$($a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是常数);

(2) $y=\sin^2 x$; (3) $y=x\ln x$; (4) $y=xe^x$.

解 (1) $y'=nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+a_2(n-2)x^{n-3}+\cdots+a_{n-1}$,

$y''=n(n-1)x^{n-2}+a_1(n-1)(n-2)x^{n-3}+\cdots+a_{n-2}$,

……

$y^{(n)}=n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1=n!$.

(2) $y=\sin^2 x=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$,

$$y^{(n)}=\frac{-1}{2}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)\cdot 2^n$$

$$=-2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

(3) $y'=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x+1$, $y''=\dfrac{1}{x}$,

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-1}}\ (n\geqslant 2).$$

(4) $y'=e^x+xe^x=(1+x)e^x$, $y''=e^x+(1+x)e^x=(2+x)e^x$.

设 $y^{(k)}=(k+x)e^x$,则 $y^{(k+1)}=e^x+(k+x)e^x=(1+k+x)e^x$,故 $y^{(n)}=(n+x)e^x$.

*12. 求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)$ $(n\geqslant 3)$.

解 本题可用莱布尼茨公式求解.

设 $u=\ln(1+x)$, $v=x^2$,则 $u^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ $(n=1,2,\cdots)$, $v'=2x$, $v''=2$, $v^{(k)}=0$ $(k\geqslant 3)$. 故由莱布尼茨公式,得

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}\cdot x^2+n\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}\cdot 2x+$$

$$\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}\cdot 2\quad(n\geqslant 3)$$

$$f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}\ (n\geqslant 3).$$

习题 2－4　隐函数及由参数方程所确定的函数的导数　相关变化率

1. 求由下列方程所确定的隐函数的导数$\frac{dy}{dx}$:

(1) $y^2-2xy+9=0$;　　(2) $x^3+y^3-3axy=0$;

(3) $xy=e^{x+y}$;　　(4) $y=1-xe^y$.

解　(1) 在方程两端分别对 x 求导,得

$$2yy'-2y-2xy'=0,$$

从而 $y'=\frac{y}{y-x}$,其中 $y=y(x)$ 是由方程 $y^2-2xy+9=0$ 所确定的隐函数.

(2) 在方程两端分别对 x 求导,得

$$3x^2+3y^2y'-3ay-3axy'=0,$$

从而 $y'=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$,其中 $y=y(x)$ 是由方程 $x^3+y^3-3axy=0$ 所确定的隐函数.

(3) 在方程两端分别对 x 求导,得

$$y+xy'=e^{x+y}(1+y'),$$

从而 $y'=\frac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}$,其中 $y=y(x)$ 是由方程 $xy=e^{x+y}$所确定的隐函数.

(4) 在方程两端分别对 x 求导,得

$$y'=-e^y-xe^yy',$$

从而,$y'=-\frac{e^y}{1+xe^y}$,其中 $y=y(x)$ 是由方程 $y=1-xe^y$ 所确定的隐函数.

2. 求曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$在点$\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)$处的切线方程和法线方程.

解　由导数的几何意义知,所求切线的斜率为

$$k=y'|_{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)},$$

在曲线方程两端分别对 x 求导,得

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0,$$

从而,$y'=-\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}}$,　$y'|_{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)}=-1$.

于是所求的切线方程为

$$y-\frac{\sqrt{2}}{4}a=-1\left(x-\frac{\sqrt{2}}{4}a\right),$$

即 $x+y=\frac{\sqrt{2}}{2}a$. 法线方程为

$$y-\frac{\sqrt{2}}{4}a=1\cdot\left(x-\frac{\sqrt{2}}{4}a\right),$$

即 $x-y=0$.

3. 求由下列方程所确定的隐函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $x^2-y^2=1$; (2) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$;

(3) $y=\tan(x+y)$; (4) $y=1+xe^y$.

解 (1) 应用隐函数的求导方法,得

$$2x-2yy'=0,$$

于是, $y'=\frac{x}{y}$.

在上式两端再对 x 求导,得

$$y''=\frac{y-xy'}{y^2}=\frac{y-\frac{x^2}{y}}{y^2}=\frac{y^2-x^2}{y^3}=-\frac{1}{y^3}.$$

(2) 应用隐函数的求导方法,得

$$2xb^2+2a^2yy'=0,$$

于是

$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y},$$

$$y''=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y-xy'}{y^2}=-\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

(3) 应用隐函数的求导方法,得

$$y'=\sec^2(x+y)(1+y')=[1+\tan^2(x+y)](1+y')=(1+y^2)(1+y'),$$

于是

$$y'=\frac{(1+y^2)}{1-(1+y^2)}=-\frac{1}{y^2}-1,$$

$$y''=\frac{2y'}{y^3}=-\frac{2(1+y^2)}{y^5}=-2\csc^2(x+y)\cot^3(x+y).$$

(4) 应用隐函数的求导方法,得

$$y'=e^y+xe^yy',$$

于是

$$y'=\frac{e^y}{1-xe^y},$$

$$y''=\frac{e^y\cdot y'(1-xe^y)-e^y(-e^y-xe^yy')}{(1-xe^y)^2}$$

$$=\frac{e^y y'+e^{2y}}{(1-xe^y)^2}=\frac{e^{2y}(2-xe^y)}{(1-xe^y)^3}.$$

4. 用对数求导法求下列函数的导数：

(1) $y=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$;　　(2) $y=\sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$;

(3) $y=\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$;　　(4) $y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$.

解　(1) 在 $y=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$ 两端取对数，得

$$\ln y=x[\ln x-\ln(1+x)].$$

在上式两端分别对 x 求导，并注意到 $y=y(x)$，得

$$\frac{y'}{y}=[\ln x-\ln(1+x)]+x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)=\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x},$$

于是

$$y'=y\left(\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}\right)=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x\left(\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}\right).$$

(2) 在 $y=\sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$ 两端取对数，得

$$\ln y=\frac{1}{5}\left[\ln(x-5)-\frac{1}{5}\ln(x^2+2)\right]=\frac{1}{5}\ln(x-5)-\frac{1}{25}\ln(x^2+2).$$

在上式两端分别对 x 求导，并注意到 $y=y(x)$，得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-5}-\frac{1}{25}\cdot\frac{2x}{x^2+2},$$

于是

$$y'=y\left[\frac{1}{5(x-5)}-\frac{2x}{25(x^2+2)}\right]=\sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}\left[\frac{1}{5(x-5)}-\frac{2x}{25(x^2+2)}\right].$$

(3) 在 $y=\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$ 两端取对数，得

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln(x+2)+4\ln(3-x)-5\ln(1+x).$$

在上式两端分别对 x 求导，并注意到 $y=y(x)$，得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+2}+4\cdot\frac{(-1)}{3-x}-5\cdot\frac{1}{1+x},$$

于是

$$y'=y\left[\frac{1}{2(x+2)}-\frac{4}{3-x}-\frac{5}{1+x}\right]$$

$$=\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}\left[\frac{1}{2(x+2)}-\frac{4}{3-x}-\frac{5}{1+x}\right].$$

(4) 在 $y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$ 两端取对数,得

$$\ln y=\frac{1}{2}\left[\ln x+\ln\sin x+\frac{1}{2}\ln(1-e^x)\right].$$

在上式两端分别对 x 求导,并注意到 $y=y(x)$,得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x}+\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{(-e^x)}{1-e^x}\right],$$

于是

$$\begin{aligned}y'&=y\left[\frac{1}{2x}+\frac{\cos x}{2\sin x}-\frac{e^x}{4(1-e^x)}\right]\\&=\frac{1}{2}\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}\left[\frac{1}{x}+\cot x-\frac{e^x}{2(1-e^x)}\right].\end{aligned}$$

5. 求下列参数方程所确定的函数的导数 $\frac{dy}{dx}$:

(1) $\begin{cases}x=at^2,\\y=bt^3;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x=\theta(1-\sin\theta),\\y=\theta\cos\theta.\end{cases}$

解　(1) $\frac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3bt^2}{2at}=\frac{3b}{2a}t.$

(2) $\frac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\cos\theta-\theta\sin\theta}{1-\sin\theta+\theta(-\cos\theta)}=\frac{\cos\theta-\theta\sin\theta}{1-\sin\theta-\theta\cos\theta}.$

6. 已知 $\begin{cases}x=e^t\sin t,\\y=e^t\cos t,\end{cases}$ 求当 $t=\frac{\pi}{3}$ 时 $\frac{dy}{dx}$ 的值.

解
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t\cos t-e^t\sin t}{e^t\sin t+e^t\cos t}=\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t},$$

于是

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}=\sqrt{3}-2.$$

7. 写出下列曲线在所给参数值相应的点处的切线方程和法线方程:

(1) $\begin{cases}x=\sin t,\\y=\cos 2t,\end{cases}$ 在 $t=\frac{\pi}{4}$ 处;

（2）$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^2}, \end{cases}$ 在 $t=2$ 处.

解　（1）$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2\sin 2t}{\cos t} = -4\sin t,$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}.$$

$t=\dfrac{\pi}{4}$对应点$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)$，曲线在点$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)$处的切线方程为

$$y-0 = -2\sqrt{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

即 $2\sqrt{2}x+y-2=0$. 法线方程为

$$y-0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

即$\sqrt{2}x-4y-1=0$.

（2）$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\left(\frac{3at^2}{1+t^2}\right)'}{\left(\frac{3at}{1+t^2}\right)'} = \frac{\frac{3a[2t(1+t^2)-t^2\cdot 2t]}{(1+t^2)^2}}{\frac{3a[(1+t^2)-t\cdot 2t]}{(1+t^2)^2}}$$

$$= \frac{2t}{1-t^2},$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=2} = -\frac{4}{3},$$

$t=2$ 对应点$\left(\dfrac{6}{5}a,\dfrac{12}{5}a\right)$. 曲线在点$\left(\dfrac{6}{5}a,\dfrac{12}{5}a\right)$处的切线方程为

$$y-\frac{12}{5}a = -\frac{4}{3}\left(x-\frac{6}{5}a\right),$$

即 $4x+3y-12a=0$. 法线方程为

$$y-\frac{12}{5}a = \frac{3}{4}\left(x-\frac{6}{5}a\right),$$

即 $3x-4y+6a=0$.

8. 求下列参数方程所确定的函数的二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$：

（1）$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2}, \\ y = 1-t; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t; \end{cases}$　　（3）$\begin{cases} x = 3e^{-t}, \\ y = 2e^{t}; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x=f'(t), \\ y=tf'(t)-f(t), \end{cases}$ 设 $f''(t)$ 存在且不为零.

解 (1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{-1}{t}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\frac{1}{t^2}}{t}=\dfrac{1}{t^3}$.

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{b\cos t}{-a\sin t}=-\dfrac{b}{a}\cot t$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{b}{a}(-\csc^2 t)}{-a\sin t}=\frac{-b}{a^2\sin^3 t}.$$

(3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2e^t}{-3e^{-t}}=-\dfrac{2}{3}e^{2t}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{-\frac{4}{3}e^{2t}}{-3e^{-t}}=\dfrac{4}{9}e^{3t}$.

(4) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{f'(t)+tf''(t)-f'(t)}{f''(t)}=t$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{f''(t)}$.

*9. 求下列参数方程所确定的函数的三阶导数 $\dfrac{d^3y}{dx^3}$:

(1) $\begin{cases} x=1-t^2, \\ y=t-t^3; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=t-\arctan t. \end{cases}$

解 (1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-3t^2}{-2t}=-\dfrac{1}{2t}+\dfrac{3}{2}t$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{1}{2t^2}+\frac{3}{2}}{-2t}=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t^3}+\frac{3}{t}\right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{-\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{t^4}-\frac{3}{t^2}\right)}{-2t}=-\frac{3}{8t^5}(1+t^2).$$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{t}{2}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{4t}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t}+t\right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{t^2}+1\right)}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t^4-1}{8t^3}.$$

10. 落在平静水面上的石头,产生同心波纹.若最外一圈波半径的增大速率总是 6 m/s,问在 2 s 末扰动水面面积增大的速率为多少?

解　设最外一圈波的半径为 $r=r(t)$,圆的面积 $S=S(t)$.在 $S=\pi r^2$ 两端分别对 t 求导,得

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=2\pi r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}.$$

当 $t=2$ 时,$r=6\times2=12$,$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=6$,代入上式得

$$\left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right|_{t=2}=2\pi\cdot12\cdot6=144\pi(\mathrm{m}^2/\mathrm{s}).$$

11. 注水入深 8 m、上顶直径 8 m 的正圆锥形容器中,其速率为 4 $\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$.当水深为 5 m 时,其表面上升的速率为多少?

解　如图 2-1 所示,设在 t 时刻容器中的水深为 $h(t)$,水的容积为 $V(t)$,因为 $\frac{r}{4}=\frac{h}{8}$,即 $r=\frac{h}{2}$,所以

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2h=\frac{\pi}{12}h^3,$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\pi}{4}h^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t},\quad \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\frac{4}{\pi h^2}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}.$$

故

$$\left.\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right|_{h=5}=\frac{4}{25\pi}\cdot4=\frac{16}{25\pi}\approx0.204(\mathrm{m/min}).$$

12. 溶液自深 18 cm、顶直径 12 cm 的正圆锥形漏斗中漏入一直径为 10 cm 的圆柱形筒中.开始时漏斗中盛满了溶液.已知当溶液在漏斗中深为 12 cm 时,其表面下降的速率为 1 cm/min.问此时圆柱形筒中溶液表面上升的速率为多少?

解　如图 2-2,设在 t 时刻漏斗中的水深为 $H=H(t)$,圆柱形筒中水深为 $h=h(t)$.

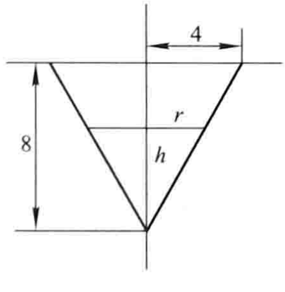


图 2-1

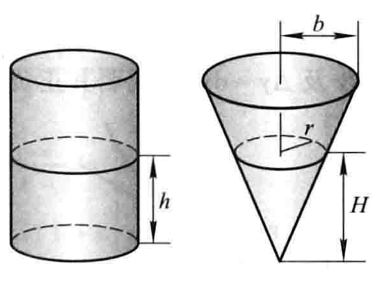


图 2-2

建立 h 与 H 之间的关系:

$$\frac{1}{3}\pi6^2\cdot18-\frac{1}{3}\pi r^2H=\pi5^2h.$$

又,$\dfrac{r}{6}=\dfrac{H}{18}$,即 $r=\dfrac{H}{3}$. 故

$$\frac{1}{3}\pi 6^2\cdot 18-\frac{1}{3}\pi\left(\frac{H}{3}\right)^2 H=\pi 5^2 h,$$

即 $216\pi-\dfrac{\pi}{27}H^3=25\pi h$.

上式两端分别对 t 求导,得

$$-\frac{3}{27}\pi H^2\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=25\pi\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}.$$

当 $H=12$ 时,$\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=-1$,此时

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{25\pi}\left(-\frac{3}{27}\pi H^2\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\right)\Bigg|_{\substack{H=12\\ \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=-1}}=\frac{16}{25}\approx 0.64\ (\mathrm{cm/min}).$$

习题 2-5 函数的微分

1. 已知 $y=x^3-x$,计算在 $x=2$ 处当 Δx 分别等于 1,0.1,0.01 时的 Δy 及 $\mathrm{d}y$.

解 $\Delta y=(x+\Delta x)^3-(x+\Delta x)-x^3+x$

$=3x(\Delta x)^2+3x^2\Delta x+(\Delta x)^3-\Delta x,$

$\mathrm{d}y=(3x^2-1)\Delta x.$

于是

$$\Delta y\big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=1}}=6\cdot 1+3\cdot 4+1^3-1=18,\ \mathrm{d}y\big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=1}}=11\cdot 1=11;$$

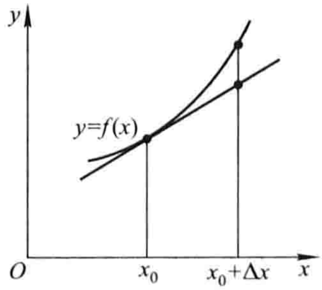
$$\Delta y\big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.1}}=6\cdot(0.1)^2+12\cdot(0.1)+(0.1)^3-0.1=1.161,$$

$$\mathrm{d}y\big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.1}}=11\cdot(0.1)=1.1;$$

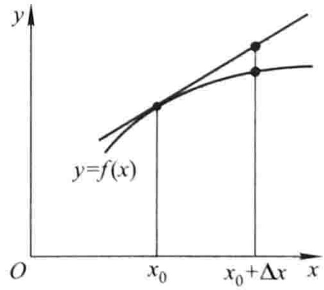
$$\Delta y\big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.01}}=6\cdot(0.01)^2+12\cdot(0.01)+(0.01)^3-0.01=0.110\,601,$$

$$\mathrm{d}y\big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.01}}=11\cdot(0.01)=0.11.$$

2. 设函数 $y=f(x)$ 的图形如图 2-3,试在图 2-3(a)、(b)、(c)、(d)中分别标出在点 x_0 的 $\mathrm{d}y$、Δy 及 $\Delta y-\mathrm{d}y$,并说明其正负.



(a)



(b)

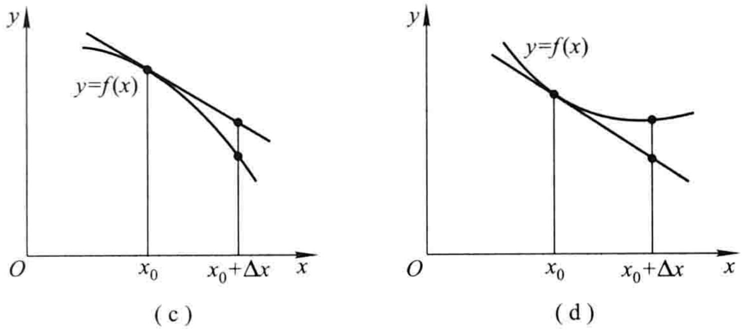


图 2－3

解　(a) $\Delta y>0, dy>0, \Delta y-dy>0$.

(b) $\Delta y>0, dy>0, \Delta y-dy<0$.

(c) $\Delta y<0, dy<0, \Delta y-dy<0$.

(d) $\Delta y<0, dy<0, \Delta y-dy>0$.

3. 求下列函数的微分：

(1) $y=\dfrac{1}{x}+2\sqrt{x}$;　　(2) $y=x\sin 2x$;

(3) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;　　(4) $y=\ln^2(1-x)$;

(5) $y=x^2e^{2x}$;　　(6) $y=e^{-x}\cos(3-x)$;

(7) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$;　　(8) $y=\tan^2(1+2x^2)$;

(9) $y=\arctan\dfrac{1-x^2}{1+x}$;　　(10) $s=A\sin(\omega t+\varphi)$　(A,ω,φ 是常数).

解　(1) $dy=y'dx=\left(-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)dx.$

(2) $dy=y'dx=(\sin 2x+x\cos 2x\cdot 2)dx=(\sin 2x+2x\cos 2x)dx.$

(3) $$dy=y'dx=\frac{\sqrt{x^2+1}-x\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{(\sqrt{x^2+1})^2}dx=\frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}.$$

(4) $dy=y'dx=2\ln(1-x)\cdot\dfrac{(-1)}{1-x}dx=\dfrac{2}{x-1}\ln(1-x)dx.$

(5) $dy=y'dx=(2xe^{2x}+x^2e^{2x}\cdot 2)dx=2x(1+x)e^{2x}dx.$

(6) $$\begin{aligned}dy&=y'dx=[-e^{-x}\cos(3-x)+e^{-x}\sin(3-x)]dx\\&=e^{-x}[\sin(3-x)-\cos(3-x)]dx.\end{aligned}$$

(7) $$dy=y'dx=\left[\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}}\cdot\frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}\right]dx=-\frac{x}{|x|}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, -1<x<0,\\[2ex] -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, 0<x<1.\end{cases}$$

(8) $dy=y'dx=[2\tan(1+2x^2)\cdot\sec^2(1+2x^2)\cdot 4x]dx$

$=8x\tan(1+2x^2)\sec^2(1+2x^2)dx.$

(9) $dy=y'dx=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}\cdot\dfrac{(-2x)(1+x^2)-(1-x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}dx$

$=-\dfrac{2x}{1+x^4}dx.$

(10) $ds=s'dt=[A\cos(\omega t+\varphi)\cdot\omega]dt=A\omega\cos(\omega t+\varphi)dt.$

4. 将适当的函数填入下列括号内,使等式成立:

(1) $d(\quad)=2dx$;　　(2) $d(\quad)=3xdx$;

(3) $d(\quad)=\cos tdt$;　　(4) $d(\quad)=\sin\omega xdx$;

(5) $d(\quad)=\dfrac{1}{1+x}dx$;　　(6) $d(\quad)=e^{-2x}dx$;

(7) $d(\quad)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$;　　(8) $d(\quad)=\sec^2 3xdx$.

解　(1) $d(2x+C)=2dx.$

(2) $d\left(\dfrac{3}{2}x^2+C\right)=3xdx.$

(3) $d(\sin t+C)=\cos tdt.$

(4) $d\left(-\dfrac{1}{\omega}\cos\omega x+C\right)=\sin\omega xdx.$

(5) $d(\ln(1+x)+C)=\dfrac{1}{1+x}dx.$

(6) $d\left(-\dfrac{1}{2}e^{-2x}+C\right)=e^{-2x}dx.$

(7) $d(2\sqrt{x}+C)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx.$

(8) $d\left(\dfrac{1}{3}\tan 3x+C\right)=\sec^2 3xdx.$

上述 C 均为任意常数.

5. 如图 2-4 所示的电缆$\overset{\frown}{AOB}$的长为 s,跨度为 $2l$,电缆的最低点 O 与杆顶连线 AB 的距离为 f,则电缆长可按下面公式计算:

$$s=2l\left(1+\frac{2f^2}{3l^2}\right),$$

当 f 变化了 Δf 时，电缆长的变化约为多少？

解　$s=2l\left(1+\dfrac{2f^2}{3l^2}\right)$，$\Delta s\approx \mathrm{d}s=2l\cdot\dfrac{4f}{3l^2}\Delta f=\dfrac{8f}{3l}\Delta f$.

6. 设扇形的圆心角 $\alpha=60°$，半径 $R=100\ \mathrm{cm}$（图 2-5）. 如果 R 不变，α 减少 $30'$，问扇形面积大约改变了多少？又如果 α 不变，R 增加 1 cm，问扇形面积大约改变了多少？

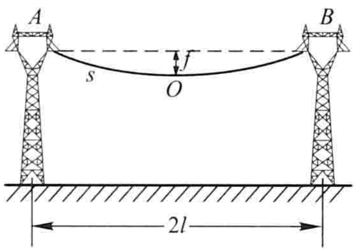


图 2-4

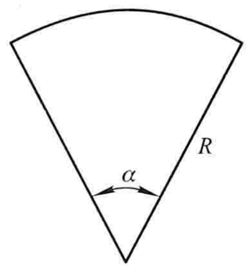


图 2-5

解　扇形面积公式为 $S=\dfrac{R^2}{2}\alpha$. 于是

$$\Delta S\approx \mathrm{d}S=\frac{R^2}{2}\Delta\alpha.$$

将 $R=100$，$\Delta\alpha=-30'=-\dfrac{\pi}{360}$，$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ 代入上式得

$$\Delta S\approx\frac{1}{2}\cdot 100^2\cdot\left(-\frac{\pi}{360}\right)\approx -43.63\ \mathrm{cm}^2.$$

又

$$\Delta S\approx \mathrm{d}S\approx\alpha R\Delta R,$$

将 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$，$R=100$，$\Delta R=1$ 代入上式得

$$\Delta S\approx\frac{\pi}{3}\cdot 100\cdot 1\approx 104.72\ \mathrm{cm}^2.$$

7. 计算下列三角函数值的近似值：

（1）$\cos 29°$；　　　（2）$\tan 136°$.

解　（1）由 $\cos x\approx\cos x_0+(\cos x)'|_{x=x_0}\cdot(x-x_0)$，取 $x_0=30°=\dfrac{\pi}{6}$ 得

$$\cos 29°=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{180}\right)\approx\cos\frac{\pi}{6}+(-\sin x)|_{x=\frac{\pi}{6}}\cdot\left(-\frac{\pi}{180}\right)$$

$$\approx\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{360}\approx 0.874\,75.$$

（2）由 $\tan x\approx\tan x_0+(\tan x)'|_{x=x_0}\cdot(x-x_0)$，取 $x_0=\dfrac{3}{4}\pi$ 得

$$\tan 136° \approx \tan \frac{3}{4}\pi + \sec^2 x|_{x=\frac{3}{4}\pi} \cdot \frac{\pi}{180} \approx -0.96509.$$

8. 计算下列反三角函数值的近似值:

(1) $\arcsin 0.5002$; (2) $\arccos 0.4995$.

解 (1) 由 $\arcsin x \approx \arcsin x_0 + (\arcsin x)'|_{x=x_0} \cdot (x-x_0)$,取 $x_0=0.5$ 得

$$\arcsin 0.5002 \approx \arcsin 0.5 + \left.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right|_{x=0.5} \cdot 0.0002$$

$$\approx 30°47''.$$

(2) 由 $\arccos x \approx \arccos x_0 + (\arccos x)'\Big|_{x=x_0} \cdot (x-x_0)$,取 $x_0=0.5$ 得

$$\arccos 0.4995 \approx \arccos 0.5 - \left.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right|_{x=0.5} \cdot (-0.0005)$$

$$\approx 60°2'.$$

9. 当$|x|$较小时,证明下列近似公式:

(1) $\tan x \approx x$(x 是角的弧度值); (2) $\ln(1+x) \approx x$;

(3) $\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{n}x$; (4) $e^x \approx 1+x$.

并计算 $\tan 45'$和 $\ln 1.002$ 的近似值.

解 (1) $\tan x \approx \tan 0 + (\tan x)'\Big|_{x=0} \cdot x = 0 + \sec^2 0 \cdot x = x.$

(2) $\ln(1+x) \approx \ln(1+0) + [\ln(1+x)]'\Big|_{x=0} \cdot x = 0 + \frac{1}{1+0}x = x.$

(3) $\sqrt[n]{1+x} \approx \sqrt[n]{1+0} + (\sqrt[n]{1+x})'|_{x=0} \cdot x = 1 + \frac{1}{n}(1+0)^{\frac{1}{n}-1} \cdot x = 1 + \frac{1}{n}x.$

(4) $e^x \approx e^0 + (e^x)'|_{x=0} \cdot x = 1 + e^0 x = 1 + x.$

$\tan 45' = \tan 0.01309 \approx 0.01309$, $\ln(1.002) \approx 0.002$.

10. 计算下列各根式的近似值:

(1) $\sqrt[3]{996}$; (2) $\sqrt[6]{65}$.

解 由 $\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{n}$ 知

(1) $\sqrt[3]{996} = \sqrt[3]{1000-4} = 10\sqrt[3]{1-\frac{4}{1000}} \approx 10\left[1+\frac{1}{3}\left(-\frac{4}{1000}\right)\right] \approx 9.987.$

(2) $\sqrt[6]{65} = \sqrt[6]{64+1} = 2\sqrt[6]{1+\frac{1}{64}} \approx 2\left(1+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{64}\right) \approx 2.0052.$

***11.** 计算球体体积时,要求精确度在 2% 以内.问这时测量直径 D 的相对误差不能超过多少?

解 由 $V = \frac{1}{6}\pi D^3$ 知

$$\mathrm{d}V=\frac{\pi}{2}D^2\Delta D,$$

于是由 $\left|\frac{\mathrm{d}V}{V}\right|=\left|\frac{\frac{\pi}{2}D^2\Delta D}{\frac{1}{6}\pi D^3}\right|=3\left|\frac{\Delta D}{D}\right|\leqslant 2\%$，知

$$\left|\frac{\Delta D}{D}\right|\leqslant\frac{0.02}{3}\approx 0.667\%.$$

*12. 某厂生产如图 2-6 所示的扇形板，半径 $R=200$ mm，要求中心角 α 为 $55°$. 产品检验时，一般用测量弦长 l 的办法来间接测量中心角 α. 如果测量弦长 l 时的误差 $\delta_l=0.1$ mm，问由此而引起的中心角测量误差 δ_α 是多少？

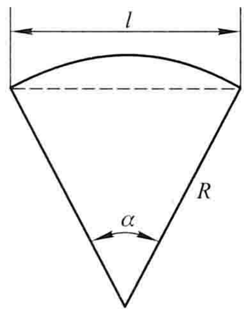


图 2-6

解　如图 2-6，由 $\frac{l}{2}=R\sin\frac{\alpha}{2}$ 得

$$\alpha=2\arcsin\frac{l}{2R}=2\arcsin\frac{l}{400},$$

故

$$\delta_\alpha=|\alpha_l'|\delta_l=\frac{2}{\sqrt{1-\left(\frac{l}{400}\right)^2}}\cdot\frac{1}{400}\cdot\delta_l.$$

当 $\alpha=55°$时，$l=2R\sin\frac{\alpha}{2}=400\sin(27.5°)\approx 184.7$. 将 $l\approx 184.7$，$\delta_l=0.1$ 代入上式得

$$\delta_\alpha\approx\frac{2}{\sqrt{1-\left(\frac{184.7}{400}\right)^2}}\cdot\frac{1}{400}\cdot 0.1\approx 0.000\,56(\text{弧度})=1'55''.$$

总习题二

1. 在“充分”“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内：

(1) $f(x)$ 在点 x_0 可导是 $f(x)$ 在点 x_0 连续的________条件. $f(x)$ 在点 x_0 连续是

$f(x)$在点 x_0 可导的________条件.

(2) $f(x)$在点 x_0 的左导数 $f'_-(x_0)$及右导数 $f'_+(x_0)$都存在且相等是$f(x)$在点 x_0 可导的________条件.

(3) $f(x)$在点 x_0 可导是 $f(x)$在点 x_0 可微的________条件.

解 (1) 充分,必要.

(2) 充分必要.

(3) 充分必要.

2. 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)\ (n\geqslant 2)$,则 $f'(0)=$________.

解 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}[(x+1)(x+2)\cdots(x+n)]=n!$.

3. 下述题中给出了四个结论,从中选出一个正确的结论:

设 $f(x)$在 $x=a$ 的某个邻域内有定义,则 $f(x)$在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是(　　).

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]$存在

(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$存在

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$存在

(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$存在

解 由 $\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]=\lim\limits_{h\to+\infty}\dfrac{f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)}{\dfrac{1}{h}}$存在,仅可知 $f'_+(a)$存在,故不能选(A).

取 $f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 显然,$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+2h)-f(0+h)}{h}=0$,但 $f(x)$在 $x=0$ 处不可导,故不能选(B).

取 $f(x)=|x|$,显然,$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0-h)}{2h}=0$. 但 $f(x)$在 $x=0$ 处不可导,故不能选(C).

而 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}=\lim\limits_{-h\to 0}\dfrac{f(a+(-h))-f(a)}{-h}$ 存在,按导数定义知 $f'(a)$存在,故选择(D).

4. 设有一根细棒,取棒的一端作为原点,棒上任意点的坐标为 x,于是分布在区间 $[0,x]$上细棒的质量 m 是 x 的函数 $m=m(x)$. 应怎样确定细棒在点 x_0 处的线密度(对于均匀细棒来说,单位长度细棒的质量叫做这细棒的线密度)?

解 在区间$[x_0,x_0+\Delta x]$上的平均线密度为

$$\bar{\rho}=\frac{\Delta m}{\Delta x}=\frac{m(x_0+\Delta x)-m(x_0)}{\Delta x}.$$

在点 x_0 处的线密度为

$$\rho(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{m(x_0+\Delta x)-m(x_0)}{\Delta x}=\left.\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}.$$

5. 根据导数的定义,求$f(x)=\dfrac{1}{x}$的导数.

解 由导数的定义知,当 $x\neq 0$ 时,

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x(x+\Delta x)}=-\frac{1}{x^2}.$$

6. 求下列函数$f(x)$的$f'_-(0)$及$f'_+(0)$,又$f'(0)$是否存在:

(1) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ \ln(1+x), & x\geqslant 0;\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解 (1) $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x}=1,$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

由$f'_-(0)=f'_+(0)=1$知$f'(0)=f'_-(0)=f'_+(0)=1.$

(2) $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=1,$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=0.$$

由$f'_-(0)\neq f'_+(0)$知$f'(0)$不存在.

7. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

解 $$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0=f(0),$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

不存在,故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

8. 求下列函数的导数:

(1) $y=\arcsin(\sin x)$;

(2) $y=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$;

(3) $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}-\cos x\cdot\ln\tan x$;

(4) $y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$;

(5) $y=x^{\frac{1}{x}}(x>0)$.

解 (1) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2x}}\cos x=\dfrac{\cos x}{|\cos x|}$.

(2) $y'=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\dfrac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}=\dfrac{1}{1+x^2}$.

(3) $y'=\dfrac{1}{\tan\dfrac{x}{2}}\cdot\sec^2\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{2}+\sin x\ln\tan x-\cos x\dfrac{1}{\tan x}\sec^2x$

$=\sin x\cdot\ln\tan x$.

(4) $y'=\dfrac{1}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}}\left(e^x+\dfrac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}}\right)=\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

(5) 先在等式两端分别取对数,得 $\ln y=\dfrac{\ln x}{x}$,再在所得等式两端分别对 x 求导,得

$$\frac{y'}{y}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2},$$

于是

$$y'=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x).$$

9. 求下列函数的二阶导数:

(1) $y=\cos^2x\cdot\ln x$;　　(2) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 (1) $y'=2\cos x(-\sin x)\cdot\ln x+\cos^2x\cdot\dfrac{1}{x}=-\sin 2x\cdot\ln x+\dfrac{\cos^2x}{x}$.

$$y''=-2\cos 2x\cdot\ln x-\sin 2x\cdot\frac{1}{x}+\frac{2\cos x(-\sin x)\cdot x-\cos^2x}{x^2}$$

$$=-2\cos 2x\cdot\ln x-\frac{2\sin 2x}{x}-\frac{\cos^2x}{x^2}.$$

(2) $$y'=\frac{\sqrt{1-x^2}-x\dfrac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}}{(\sqrt{1-x^2})^2}=\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

$$y''=-\frac{3}{2}\cdot(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot(-2x)=\frac{3x}{(1-x^2)^{5/2}}.$$

*10. 求下列函数的 n 阶导数：

(1) $y=\sqrt[m]{1+x}$；　　(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

解　(1) $y'=\dfrac{1}{m}(1+x)^{\frac{1}{m}-1}$，$y''=\dfrac{1}{m}\left(\dfrac{1}{m}-1\right)(1+x)^{\frac{1}{m}-2}$，…，

$$y^{(n)}=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{m}-n+1\right)(1+x)^{\frac{1}{m}-n}.$$

(2) 由 $\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$知

$$y^{(n)}=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{(n)}=\left(-1+\frac{2}{x+1}\right)^{(n)}=2\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}$$

$$=\frac{2\cdot(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

11. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+xy=e$ 所确定，求 $y''(0)$.

解　把方程两边分别对 x 求导，得

$$e^y y'+y+xy'=0. \tag{1}$$

将 $x=0$ 代入 $e^y+xy=e$，得 $y=1$，再将 $x=0,y=1$ 代入(1)式得 $y'|_{x=0}=-\dfrac{1}{e}$，在(1)式两边分别关于 x 再求导，可得

$$e^y y'^2+e^y y''+y'+y'+xy''=0. \tag{2}$$

将 $x=0,y=1,y'|_{x=0}=-\dfrac{1}{e}$代入(2)式，得 $y''(0)=\dfrac{1}{e^2}$.

12. 求下列由参数方程所确定的函数的一阶导数$\dfrac{dy}{dx}$及二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$：

(1) $\begin{cases}x=a\cos^3\theta,\\ y=a\sin^3\theta;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=\ln\sqrt{1+t^2},\\ y=\arctan t.\end{cases}$

解　(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\dfrac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{3a\cos^2\theta(-\sin\theta)}=-\tan\theta$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\frac{-\sec^2\theta}{-3a\cos^2\theta\sin\theta}=\frac{1}{3a}\sec^4\theta\csc\theta.$$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{t}{1+t^2}}=\dfrac{1}{t}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{-\dfrac{1}{t^2}}{\dfrac{t}{1+t^2}}=-\frac{1+t^2}{t^3}.$$

13. 求曲线$\begin{cases}x=2e^t,\\y=e^{-t}\end{cases}$在 $t=0$ 相应的点处的切线方程及法线方程.

解　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{-e^{-t}}{2e^t}=-\dfrac{1}{2e^{2t}}$,　$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=-\dfrac{1}{2}$.

$t=0$ 对应的点为$(2,1)$,故曲线在点$(2,1)$处的切线方程为

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-2),$$

即 $x+2y-4=0$. 法线方程为 $y-1=2(x-2)$，　即 $2x-y-3=0$.

14. 已知$f(x)$是周期为 5 的连续函数,它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x),$$

且$f(x)$在 $x=1$ 处可导,求曲线 $y=f(x)$在点$(6,f(6))$处的切线方程.

解　由$f(x)$连续,令关系式两端 $x\to0$,取极限得

$$f(1)-3f(1)=0,\qquad f(1)=0.$$

又

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{x}=8,$$

而

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$$

$$\overset{\text{令 } t=\sin x}{=\!=\!=}\lim_{t\to0}\frac{f(1+t)-3f(1-t)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{f(1+t)-f(1)}{t}+3\lim_{t\to0}\frac{f(1-t)-f(1)}{-t}$$

$=4f'(1)$,

故 $f'(1)=2$.

由于 $f(x+5)=f(x)$,于是 $f(6)=f(1)=0$.

$$f'(6)=\lim_{x\to 0}\frac{f(6+x)-f(6)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}=f'(1)=2,$$

因此,曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6,f(6))$,即 $(6,0)$ 处的切线方程为

$$y-0=2(x-6),$$

即 $2x-y-12=0$.

15. 当正在高度 H 飞行的飞机开始向机场跑道下降时,如图 2-7 所示,从飞机到机场的水平地面距离为 L. 假设飞机下降的路径为三次函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图形,其中 $y|_{x=-L}=H$, $y|_{x=0}=0$. 试确定飞机的降落路径.

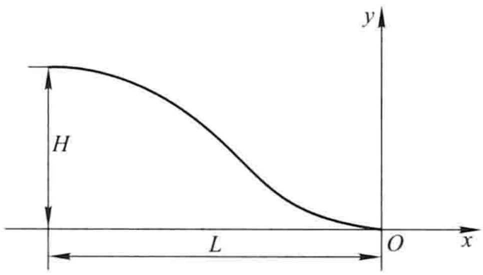


图 2-7

解　设立坐标系如图 2-7 所示. 根据题意,可知

$$y|_{x=0}=0\Rightarrow d=0,$$

$$y|_{x=-L}=H\Rightarrow -aL^3+bL^2-cL=H.$$

为使飞机平稳降落,尚需满足

$$y'|_{x=0}=0\Rightarrow c=0,$$

$$y'|_{x=-L}=0\Rightarrow 3aL^2-2bL=0.$$

解得 $a=\dfrac{2H}{L^3}$, $b=\dfrac{3H}{L^2}$. 故飞机的降落路径为

$$y=H\left[2\left(\frac{x}{L}\right)^3+3\left(\frac{x}{L}\right)^2\right].$$

16. 甲船以 6 km/h 的速率向东行驶,乙船以 8 km/h 的速率向南行驶. 在中午 12 点整,乙船位于甲船之北 16 km 处. 问下午 1 点整两船相离的速率为多少?

解　设从中午 12 点整起,经过 t 小时,甲船与乙船的距离为

$$s=\sqrt{(16-8t)^2+(6t)^2},$$

故速率

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{2(16-8t)\cdot(-8)+72t}{2\sqrt{(16-8t)^2+(6t)^2}}.$$

当 $t=1$ 时(即下午 1 点整)两船相离的速率为

$$v|_{t=1}=\frac{-128+72}{20}=-2.8(\mathrm{km/h}).$$

17. 利用函数的微分代替函数的增量求 $\sqrt[3]{1.02}$的近似值.

解　利用 $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{1}{3}x$,取 $x=0.02$,得

$$\sqrt[3]{1.02}\approx 1+\frac{1}{3}\times(0.02)=1.007.$$

18. 已知单摆的振动周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$,其中 $g=980\ \mathrm{cm/s^2}$,l 为摆长(单位为 cm). 设原摆长为 20 cm,为使周期 T 增大 0.05 s,摆长约需加长多少?

解　由 $\Delta T\approx \mathrm{d}T=\frac{\pi}{\sqrt{gl}}\Delta l$,得

$$\Delta l=\frac{\sqrt{gl}}{\pi}\mathrm{d}T\approx\frac{\sqrt{gl}}{\pi}\Delta T,$$

故

$$\Delta l|_{l=20}\approx\frac{\sqrt{980\times 20}}{3.14}\times 0.05\approx 2.23(\mathrm{cm}).$$

即摆长约需加长 2.23 cm.

第三章
微分中值定理与导数的应用

习题 3－1　微分中值定理

1. 验证罗尔定理对函数 $y=\ln\sin x$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上的正确性.

证　函数 $f(x)=\ln\sin x$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上连续,在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$ 内可导,又

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\ln\sin\frac{\pi}{6}=\ln\frac{1}{2},\quad f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\ln\sin\frac{5\pi}{6}=\ln\frac{1}{2},$$

即 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{5}{6}\pi\right)$,故 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上满足罗尔定理条件,由罗尔定理知至少存在一点 $\xi\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$,使 $f'(\xi)=0$. 又,$f'(x)=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$,令 $f'(x)=0$ 得 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 取 $n=0$,得 $\xi=\frac{\pi}{2}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$. 因此罗尔定理对函数 $y=\ln\sin x$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上是正确的.

2. 验证拉格朗日中值定理对函数 $y=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间 $[0,1]$ 上的正确性.

证　函数 $f(x)=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足拉格朗日中值定理条件,从而至少存在一点 $\xi\in(0,1)$,使

$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{-2-(-2)}{1}=0.$$

又,由 $f'(\xi)=12\xi^2-10\xi+1=0$ 可知 $\xi=\frac{5\pm\sqrt{13}}{12}\in(0,1)$,因此拉格朗日中值定理对函数 $y=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间 $[0,1]$ 上是正确的.

3. 对函数 $f(x)=\sin x$ 及 $F(x)=x+\cos x$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上验证柯西中值定理的正确性.

证　函数 $f(x)=\sin x$,$F(x)=x+\cos x$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续,在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内可导,且在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内,$F'(x)=1-\sin x\neq0$,故 $f(x)$、$F(x)$ 满足柯西中值定理条件,从而至少存在一点 $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,使

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)}{F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(0)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

由

$$\frac{1-0}{\frac{\pi}{2}-1}=\frac{\cos\xi}{1-\sin\xi},$$

即$\dfrac{\cos\frac{\xi}{2}+\sin\frac{\xi}{2}}{\cos\frac{\xi}{2}-\sin\frac{\xi}{2}}=\dfrac{2}{\pi-2}$,可得 $\tan\dfrac{\xi}{2}=\dfrac{4-\pi}{\pi}$. 所以,$\xi=2n\pi+2\arctan\dfrac{4-\pi}{\pi}$. 由题设,取 $n=0$,得 $\xi_0=2\arctan\dfrac{4-\pi}{\pi}$. 因 $0<\dfrac{4-\pi}{\pi}<1$,故 $\xi_0=2\arctan\left(\dfrac{4-\pi}{\pi}\right)\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. 因此,柯西中值定理对 $f(x)=\sin x,F(x)=x+\cos x$ 在区间$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上是正确的.

4. 试证明对函数 $y=px^2+qx+r$ 应用拉格朗日中值定理时所求得的点 ξ 总是位于区间的正中间.

证 任取数值 a,b,不妨设 $a<b$,函数 $f(x)=px^2+qx+r$ 在区间$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,故由拉格朗日中值定理知至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),$$

即 $pb^2+qb+r-pa^2-qa-r=(2p\xi+q)(b-a)$. 经整理得 $\xi=\dfrac{a+b}{2}$,即所求得的 ξ 总是位于区间的正中间.

5. 不用求出函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数,说明方程$f'(x)=0$ 有几个实根,并指出它们所在的区间.

解 函数$f(x)$分别在$[1,2]$,$[2,3]$,$[3,4]$上连续,分别在$(1,2)$,$(2,3)$,$(3,4)$内可导,且$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$. 由罗尔定理知至少存在 $\xi_1\in(1,2)$,$\xi_2\in(2,3)$,$\xi_3\in(3,4)$,使

$$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0.$$

即方程$f'(x)=0$ 至少有三个实根,又方程$f'(x)=0$ 为三次方程,故它至多有三个实根,因此方程$f'(x)=0$ 有且仅有三个实根,它们分别位于区间$(1,2)$,$(2,3)$,$(3,4)$内.

6. 证明恒等式:$\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$.

证 取函数 $f(x)=\arcsin x+\arccos x,x\in[-1,1]$. 因

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\equiv 0,$$

故 $f(x)\equiv C$. 取 $x=0$,得 $f(0)=C=\dfrac{\pi}{2}$. 因此

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},\quad x\in[-1,1].$$

7. 若方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=0$ 有一个正根 $x=x_0$，证明方程 $a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$ 必有一个小于 x_0 的正根.

证 取函数 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x$. $f(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上连续，在 $(0,x_0)$ 内可导，且 $f(0)=f(x_0)=0$，由罗尔定理知至少存在一点 $\xi\in(0,x_0)$，使 $f'(\xi)=0$，即方程 $a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$ 必有一个小于 x_0 的正根.

8. 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导数，且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，其中 $a<x_1<x_2<x_3<b$. 证明：在 (x_1,x_3) 内至少有一点 ξ，使得 $f''(\xi)=0$.

证 根据题意知函数 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$，$[x_2,x_3]$ 上连续，在 (x_1,x_2)，(x_2,x_3) 内可导且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，故由罗尔定理知至少存在点 $\xi_1\in(x_1,x_2)$，$\xi_2\in(x_2,x_3)$，使 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$.

又 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上连续，在 (ξ_1,ξ_2) 内可导，故由罗尔定理知至少存在点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(x_1,x_3)$ 使 $f''(\xi)=0$.

9. 设 $a>b>0,n>1$，证明：

$$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b).$$

证 取函数 $f(x)=x^n$，$f(x)$ 在 $[b,a]$ 上连续，在 (b,a) 内可导，由拉格朗日中值定理知，至少存在一点 $\xi\in(b,a)$，使

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b),$$

即 $a^n-b^n=n\xi^{n-1}(a-b)$. 又 $0<b<\xi<a,n>1$，故

$$0<b^{n-1}<\xi^{n-1}<a^{n-1}.$$

因此

$$nb^{n-1}(a-b)<n\xi^{n-1}(a-b)<na^{n-1}(a-b),$$

即 $nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$.

10. 设 $a>b>0$，证明：

$$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}.$$

证 取函数 $f(x)=\ln x$，$f(x)$ 在 $[b,a]$ 上连续，在 (b,a) 内可导，由拉格朗日中值定理知，至少存在一点 $\xi\in(b,a)$，使

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b),$$

即 $\ln a-\ln b=\dfrac{1}{\xi}(a-b)$. 又，$0<b<\xi<a$，故 $0<\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{b}$，因此

$$\frac{a-b}{a}<\frac{a-b}{\xi}<\frac{a-b}{b},$$

即 $\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$.

11. 证明下列不等式：

(1) $|\arctan a - \arctan b| \leqslant |a-b|$;

(2) 当 $x>1$ 时,$e^x > e \cdot x$.

证　(1) 当 $a=b$ 时,显然成立. 当 $a \neq b$ 时,取函数 $f(x)=\arctan x$,$f(x)$ 在 $[a,b]$ 或 $[b,a]$ 上连续,在 (a,b) 或 (b,a) 内可导,由拉格朗日中值定理知,至少存在一点 $\xi \in (a,b)$ 或 (b,a),使

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b),$$

即 $\arctan a - \arctan b = \dfrac{1}{1+\xi^2}(a-b)$,故

$$|\arctan a - \arctan b| = \frac{1}{1+\xi^2}|a-b| \leqslant |a-b|.$$

(2) 取函数 $f(t)=e^t$,$f(t)$ 在 $[1,x]$ 上连续,在 $(1,x)$ 内可导. 由拉格朗日中值定理知,至少存在一点 $\xi \in (1,x)$,使

$$f(x)-f(1)=f'(\xi)(x-1),$$

即 $e^x - e = e^{\xi}(x-1)$. 又,$1<\xi<x$,故 $e^{\xi}>e$,因此

$$e^x - e > e(x-1),$$

即 $e^x > x \cdot e$.

12. 证明方程 $x^5+x-1=0$ 只有一个正根.

证　取函数 $f(x)=x^5+x-1$,$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,

$$f(0)=-1<0,\quad f(1)=1>0,$$

由零点定理知,至少存在点 $x_1 \in (0,1)$,使 $f(x_1)=0$,即方程 $x^5+x-1=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个正根.

若方程 $x^5+x-1=0$ 还有一个正根 x_2,即 $f(x_2)=0$,则由 $f(x)=x^5+x-1$ 在 $[x_1,x_2]$(或 $[x_2,x_1]$)上连续,在 (x_1,x_2)(或 (x_2,x_1))内可导,知 $f(x)$ 满足罗尔定理条件,故至少存在点 $\xi \in (x_1,x_2)$(或 (x_2,x_1)),使

$$f'(\xi)=0.$$

但 $f'(\xi)=5\xi^4+1>0$,矛盾. 因此方程 $x^5+x-1=0$ 只有一个正根.

13. 设 $f(x)$,$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,证明在 (a,b) 内有一点 ξ,使

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = (b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

证　取函数 $F(x)=\begin{vmatrix} f(a) & f(x) \\ g(a) & g(x) \end{vmatrix}$,由 $f(x)$,$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,由拉格朗日中值定理知,至少存在一点 $\xi \in (a,b)$,使 $F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)$. 即

$$F(b)=\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix},\quad F(a)=\begin{vmatrix} f(a) & f(a) \\ g(a) & g(a) \end{vmatrix}=0,$$

$$F'(x)=\begin{vmatrix} 0 & f(x) \\ 0 & g(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f(a) & f'(x) \\ g(a) & g'(x) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} f(a) & f'(x) \\ g(a) & g'(x) \end{vmatrix},$$

故

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix} (b-a).$$

14. 证明:若函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内满足关系式$f'(x)=f(x)$,且$f(0)=1$,则$f(x)=e^x$.

证　取函数$F(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$,因

$$F'(x)=\frac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{e^{2x}}=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}=0,$$

故$F(x)=C$. 又$F(0)=C=f(0)=1$,因此$F(x)=1$,即$\dfrac{f(x)}{e^x}=1$,故$f(x)=e^x$.

***15**. 设函数$y=f(x)$在$x=0$的某邻域内具有n阶导数,且$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$,试用柯西中值定理证明:

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}\quad(0<\theta<1).$$

证　已知$f(x)$在$x=0$的某邻域内具有n阶导数,在该邻域内任取点x,由柯西中值定理得

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f(x)-f(0)}{x^n-0^n}=\frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{n-1}},$$

其中ξ_1介于$0,x$之间. 又

$$\frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{n-1}}=\frac{f'(\xi_1)-f'(0)}{n(\xi_1^{n-1}-0^{n-1})}=\frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)\xi_2^{n-2}},$$

其中ξ_2介于$0,\xi_1$之间. 依此类推,得

$$\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{n!\,\xi_{n-1}}=\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})-f^{(n-1)}(0)}{n!\,(\xi_{n-1}-0)}=\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!},$$

其中ξ_n介于$0,\xi_{n-1}$之间,记$\xi_n=\theta x(0<\theta<1)$,因此

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}\quad(0<\theta<1).$$

习题 3-2　洛必达法则

1. 用洛必达法则求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}(a\neq 0)$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}$;　　(8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$;

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}$;　　(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}$;

(11) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x$;　　(12) $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{1/x^2}$;

(13) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$;　　(14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$;

(15) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$;　　(16) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x}}{1}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\dfrac{2}{1}=2$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\dfrac{1}{2}x^2}=2$.

(4) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{3\cos 3x}{5\sec^2 5x}=-\dfrac{3}{5}$.

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\dfrac{1}{\sin x}\cos x}{2(\pi-2x)\cdot(-2)}=-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cot x}{4(\pi-2x)}$

$=-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-\csc^2 x}{-8}=-\dfrac{1}{8}$.

(6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=\dfrac{m}{n}a^{m-n}(a\neq 0)$.

(7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{\tan 7x}\cdot\sec^2 7x\cdot 7}{\dfrac{1}{\tan 2x}\sec^2 2x\cdot 2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan 2x}{\tan 7x}\cdot\dfrac{\sec^2 7x}{\sec^2 2x}\cdot\dfrac{7}{2}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x}{7x}\cdot\dfrac{\sec^2 7x}{\sec^2 2x}\cdot\dfrac{7}{2}=1$.

(8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sec^2 x}{3\sec^2 3x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 3x}{3\cos^2 x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-6\cos 3x\sin 3x}{-6\cos x\sin x}$

$=-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 3x}{\cos x}=-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-3\sin 3x}{-\sin x}=3$.

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{-\dfrac{1}{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x^2}{x+x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^2}+1}{\dfrac{1}{x}+1}=1.$

(10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{2x}{1+x^2}}{\sec x\tan x+\sin x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x}\cdot\frac{2}{1+x^2}=1.$$

(11) $\lim\limits_{x\to0}x\cot 2x=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\tan 2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2\sec^2 2x}=\dfrac{1}{2}.$

(12) $\lim\limits_{x\to0}x^2 e^{1/x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{1/x^2}}{\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{1/x^2}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'}{\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'}=\lim\limits_{x\to0}e^{1/x^2}=+\infty.$

(13) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-1}{2x}=-\dfrac{1}{2}.$

(14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}$，而

$$\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{a}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{1+\dfrac{a}{x}}\cdot\left(-\dfrac{a}{x^2}\right)}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{1+\dfrac{a}{x}}=a,$$

故 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x=e^a.$

(15) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\ln x}$，而

$$\lim_{x\to0^+}\sin x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0,$$

故 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}=e^0=1$.

$$(16)\ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\tan x\ln\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{-\ln x}{\frac{1}{x}}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}x}=e^0=1.$$

注　在用洛必达法则求极限时,除了注意用洛必达法则对极限类型等的要求以外,还要注意求极限的过程中合理地应用重要极限、等价无穷小、初等变换等方法,以使运算过程更快捷、简洁.

2. 验证极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$ 存在,但不能用洛必达法则得出.

证　由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+\sin x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1}$ 不存在,故不能使用洛必达法则来求此极限,但并不表明此极限不存在,此极限可用以下方法求得:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1+0=1.$$

3. 验证极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ 存在,但不能用洛必达法则得出.

证　由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ 不存在,故不能使用洛必达法则来求此极限,但可用以下方法求此极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=1\cdot 0=0.$$

***4.** 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}, & x>0,\\ e^{-\frac{1}{2}}, & x\leqslant 0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 处的连续性.

解　$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]},$$

而

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right]=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2},$$

故

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = e^{-\frac{1}{2}},$$

又

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}, f(0) = e^{-\frac{1}{2}}.$$

因为$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$，故函数$f(x)$在$x=0$处连续.

习题 3－3　泰勒公式

1. 按$(x-4)$的幂展开多项式$f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$.

解　因为

$$f'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 2x - 3, f''(x) = 12x^2 - 30x + 2,$$
$$f'''(x) = 24x - 30, f^{(4)}(x) = 24, f^{(n)}(x) = 0 (n \geqslant 5).$$
$$f(4) = -56, f'(4) = 21, f''(4) = 74, f'''(4) = 66, f^{(4)}(4) = 24,$$

故

$$\begin{aligned}
&x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4 \\
&= f(4) + f'(4)(x-4) + \frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2 + \frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3 + \frac{f^{(4)}(4)}{4!}(x-4)^4 \\
&= -56 + 21(x-4) + 37(x-4)^2 + 11(x-4)^3 + (x-4)^4.
\end{aligned}$$

2. 应用麦克劳林公式，按x的幂展开函数$f(x) = (x^2 - 3x + 1)^3$.

解

$$\begin{aligned}
&f(x) = x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 45x^3 + 30x^2 - 9x + 1, && f(0) = 1, \\
&f'(x) = 6x^5 - 45x^4 + 120x^3 - 135x^2 + 60x - 9, && f'(0) = -9, \\
&f''(x) = 30x^4 - 180x^3 + 360x^2 - 270x + 60, && f''(0) = 60, \\
&f'''(x) = 120x^3 - 540x^2 + 720x - 270, && f'''(0) = -270, \\
&f^{(4)}(x) = 360x^2 - 1\,080x + 720, && f^{(4)}(0) = 720, \\
&f^{(5)}(x) = 720x - 1\,080, && f^{(5)}(0) = -1\,080, \\
&f^{(6)}(x) = 720, && f^{(6)}(0) = 720, \\
&f^{(n)}(x) = 0 \quad (n \geqslant 7),
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
&(x^2 - 3x + 1)^3 \\
&= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6 \\
&= 1 - 9x + 30x^2 - 45x^3 + 30x^4 - 9x^5 + x^6.
\end{aligned}$$

3. 求函数$f(x) = \sqrt{x}$按$(x-4)$的幂展开的带有拉格朗日余项的3阶泰勒公式.

解 因为 $f(x)=\sqrt{x}, f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}, f'''(x)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$,

$f^{(4)}(x)=-\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}$. $f(4)=2, f'(4)=\frac{1}{4}, f''(4)=-\frac{1}{32}, f'''(4)=\frac{3}{256}$.

故

$$\begin{aligned}\sqrt{x}&=f(4)+f'(4)(x-4)+\frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2+\frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3+\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-4)^4\\&=2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2+\frac{1}{512}(x-4)^3-\frac{15}{384\xi^{7/2}}(x-4)^4,\end{aligned}$$

其中 ξ 介于 x 与 4 之间.

4. 求函数 $f(x)=\ln x$ 按 $(x-2)$ 的幂展开的带有佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式.

解 因为

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n},\quad f^{(n)}(2)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2^n},$$

故

$$\begin{aligned}\ln x&=f(2)+f'(2)(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3+\cdots+\\&\quad\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n+o[(x-2)^n]\\&=\ln 2+\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{2^3}(x-2)^2+\frac{1}{3\cdot 2^3}(x-2)^3+\cdots+\\&\quad(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 2^n}(x-2)^n+o[(x-2)^n].\end{aligned}$$

5. 求函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 按 $(x+1)$ 的幂展开的带有拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式.

解 因为

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}},\quad f^{(n)}(-1)=-n!,$$

故

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}&=f(-1)+f'(-1)(x+1)+\frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2+\frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3+\cdots+\\&\quad\frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(x+1)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x+1)^{n+1}\\&=-[1+(x+1)+(x+1)^2+\cdots+(x+1)^n]+(-1)^{n+1}\xi^{-(n+2)}(x+1)^{n+1},\end{aligned}$$

其中 ξ 介于 x 与 -1 之间.

6. 求函数 $f(x)=\tan x$ 的带有佩亚诺余项的 3 阶麦克劳林公式.

解 因为

$$f(x)=\tan x,\quad f'(x)=\sec^2 x,\quad f''(x)=2\sec^2 x\tan x,$$

$$f'''(x)=4\sec^2x\tan^2x+2\sec^4x,$$
$$\begin{aligned}f^{(4)}(x)&=8\sec^2x\tan^3x+8\sec^4x\tan x+8\sec^4x\tan x\\&=8\sec^2x\tan^3x+16\sec^4x\tan x\\&=\frac{8(\sin^2x+2)\sin x}{\cos^5x},\end{aligned}$$
$$f(0)=0,f'(0)=1,f''(0)=0,f'''(0)=2,$$

故 $f(x)=x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$.

7. 求函数 $f(x)=xe^x$ 的带有佩亚诺余项的 n 阶麦克劳林公式.

解　因为 $f(x)=xe^x$, $f^{(n)}(x)=(n+x)e^x$（见习题 2-3,11(4)）, $f^{(n)}(0)=n$, 故

$$\begin{aligned}xe^x&=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+o(x^n)\\&=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-1)!}+o(x^n).\end{aligned}$$

8. 验证当 $0<x\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，按公式 $e^x\approx1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$ 计算 e^x 的近似值时，所产生的误差小于 0.01，并求 $\sqrt{e}$ 的近似值，使误差小于 0.01.

证　设 $f(x)=e^x$，则 $f^{(n)}(0)=1$，故 $f(x)=e^x$ 的三阶麦克劳林公式为 $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{e^\xi}{4!}x^4$，其中 ξ 介于 0 与 x 之间. 按 $e^x\approx1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$ 计算 e^x 的近似值时，其误差为

$$|R_3(x)|=\frac{e^\xi}{4!}x^4.$$

当 $0<x\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$0<\xi<\dfrac{1}{2}$，$|R_3(x)|\leqslant\dfrac{3^{\frac{1}{2}}}{4!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\approx0.0045<0.01$，

$$\sqrt{e}\approx1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3\approx1.645.$$

9. 应用三阶泰勒公式求下列各数的近似值，并估计误差：

(1) $\sqrt[3]{30}$;　　(2) $\sin 18°$.

解　(1) 因为

$$\begin{aligned}f(x)&=\sqrt[3]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{3}}\\&\approx1+\frac{1}{3}x+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^3\\&=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3,\end{aligned}$$

$$R_3(x)=\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)}{4!}(1+\xi)^{\frac{1}{3}-4}x^4,$$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间. 故

$$\sqrt[3]{30}=\sqrt[3]{27+3}=3\sqrt[3]{1+\frac{1}{9}}\approx 3\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}\right)^2+\frac{5}{81}\left(\frac{1}{9}\right)^3\right]\approx 3.10724.$$

误差

$$|R_3|=3\cdot\left|\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)}{4!}(1+\xi)^{\frac{1}{3}-4}\left(\frac{1}{9}\right)^4\right|,$$

ξ 介于 0 与 $\frac{1}{9}$ 之间,即 $0<\xi<\frac{1}{9}$,因此

$$|R_3|=\left|\frac{80}{4!\cdot 3^{11}}\right|\approx 1.88\times 10^{-5}.$$

(2) 已知 $\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}$,$R_4(x)=\frac{\sin\left(\xi+\frac{5}{2}\pi\right)}{5!}x^5$,$\xi$ 介于 0 与 $\frac{\pi}{10}$ 之间,故

$$\sin 18^\circ=\sin\frac{\pi}{10}\approx\frac{\pi}{10}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^3\approx 0.3090,$$

$$|R_4|\leqslant\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^5\approx 2.55\times 10^{-5}.$$

注 利用 $R_3(x)=\frac{\sin\left(\xi+\frac{4}{2}\pi\right)}{4!}x^4$,$\xi\in\left(0,\frac{\pi}{10}\right)$,可得误差 $|R_3|\leqslant\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^4\approx 1.3\times 10^{-4}$.

*10. 利用泰勒公式求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3}\right)$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{4}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-1+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3}{2}+\frac{o\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right]=\frac{3}{2}.$$

（2）$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)-1-\left(-\frac{x^2}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4)}{x^2\left[x+\left(-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\right]}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{8}\right)x^4+o(x^4)}{-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{12}+\frac{o(x^4)}{x^4}}{-\frac{1}{2}+\frac{o(x^4)}{x^4}}=\frac{-\frac{1}{12}}{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}.$$

（3）$\lim\limits_{x\to0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-\mathrm{e}^{x^2})\sin x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-\left(1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right)}{\left[1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-1-x^2+o(x^2)\right][x^2+o(x^2)]}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{8}x^4+o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{8}+\frac{o(x^4)}{x^4}}{-\frac{3}{2}+\frac{o(x^4)}{x^4}}=\frac{\frac{1}{8}}{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{12}.$$

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[x-x+\frac{1}{2}+\frac{o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}\right]=\frac{1}{2}.$$

习题 3－4　函数的单调性与曲线的凹凸性

1. 判定函数 $f(x)=\arctan x-x$ 的单调性.

解　$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-1=-\frac{x^2}{1+x^2}\leqslant0$ 且 $f'(x)=0$ 仅在 $x=0$ 时成立. 因此函数 $f(x)=\arctan x-x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调减少.

2. 判定函数 $f(x)=x+\cos x$ 的单调性.

解 $f'(x)=1-\sin x\geqslant 0$,且当 $x=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$时,$f'(x)=0$. 可以看出在$(-\infty,+\infty)$的任一有限子区间上,使$f'(x)=0$的点只有有限个. 因此函数$f(x)=x+\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内单调增加.

3. 确定下列函数的单调区间:

(1) $y=2x^3-6x^2-18x-7$; (2) $y=2x+\dfrac{8}{x}(x>0)$;

(3) $y=\dfrac{10}{4x^3-9x^2+6x}$; (4) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

(5) $y=(x-1)(x+1)^3$; (6) $y=\sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2}(a>0)$;

(7) $y=x^n e^{-x}\quad(n>0,x\geqslant 0)$; (8) $y=x+|\sin 2x|$.

解 (1) 函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,在$(-\infty,+\infty)$内可导,且

$$y'=6x^2-12x-18=6(x-3)(x+1).$$

令 $y'=0$,得驻点 $x_1=-1,x_2=3$,这两个驻点把$(-\infty,+\infty)$分成三个部分区间$(-\infty,-1]$,$[-1,3]$,$[3,+\infty)$.

当$-\infty<x<-1$及$3<x<+\infty$时,$y'>0$,因此函数在$(-\infty,-1]$,$[3,+\infty)$上单调增加;当$-1<x<3$时,$y'<0$,因此函数在$[-1,3]$上单调减少.

(2) 函数的定义域为$(0,+\infty)$,在$(0,+\infty)$内可导,且

$$y'=2-\frac{8}{x^2}=\frac{2x^2-8}{x^2}=\frac{2(x-2)(x+2)}{x^2}.$$

令 $y'=0$,得驻点 $x_1=-2$(舍去),$x_2=2$. 它把$(0,+\infty)$分成两个部分区间$(0,2]$,$[2,+\infty)$.

当$0<x<2$时,$y'<0$,因此函数在$(0,2]$上单调减少;当$2<x<+\infty$时,$y'>0$,因此函数在$[2,+\infty)$上单调增加.

(3) 函数除 $x=0$ 外处处可导,且

$$y'=\frac{-10(12x^2-18x+6)}{(4x^3-9x^2+6x)^2}=\frac{-120\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}{(4x^3-9x^2+6x)^2}.$$

令 $y'=0$,得驻点 $x_1=\dfrac{1}{2},x_2=1$. 这两个驻点把区间$(-\infty,0)$及$(0,+\infty)$分成四个部分区间$(-\infty,0)$,$\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$,$\left[\dfrac{1}{2},1\right]$,$[1,+\infty)$.

当$-\infty<x<0,0<x<\dfrac{1}{2},1<x<+\infty$时,$y'<0$,因此函数在$(-\infty,0)$,$\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$,$[1,+\infty)$内单调减少;当$\dfrac{1}{2}<x<1$时,$y'>0$,因此函数在$\left[\dfrac{1}{2},1\right]$上单调增加.

(4) 函数在$(-\infty,+\infty)$内可导,且

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0,$$

因此函数在$(-\infty,+\infty)$内单调增加.

(5) 函数在$(-\infty,+\infty)$内可导,且

$$\begin{aligned}y'&=(x+1)^3+(x-1)\cdot 3(x+1)^2\\&=(x+1)^2(4x-2)=4(x+1)^2\left(x-\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

令$y'=0$,得驻点$x_1=-1,x_2=\frac{1}{2}$,这两个驻点把区间$(-\infty,+\infty)$分成三个部分区间$(-\infty,-1]$,$\left[-1,\frac{1}{2}\right]$及$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

当$-\infty<x<-1$及$-1<x<\frac{1}{2}$时,$y'<0$,因此函数在$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$上单调减少;当$\frac{1}{2}<x<+\infty$时,$y'>0$,因此函数在$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调增加.

(6) 函数在$x_1=\frac{a}{2},x_2=a$处不可导且在$\left(-\infty,\frac{a}{2}\right)$,$\left(\frac{a}{2},a\right)$,$(a,+\infty)$内可导,$y'=\dfrac{-6\left(x-\frac{2a}{3}\right)}{3\sqrt[3]{(2x-a)^2(a-x)}}$.

令$y'=0$,得驻点$x_3=\frac{2a}{3}$,这个驻点及$x_1=\frac{a}{2},x_2=a$把区间$(-\infty,+\infty)$分成四个部分区间$\left(-\infty,\frac{a}{2}\right]$,$\left[\frac{a}{2},\frac{2}{3}a\right]$,$\left[\frac{2}{3}a,a\right]$,$[a,+\infty)$.

当$-\infty<x<\frac{a}{2}$及$\frac{a}{2}<x<\frac{2}{3}a$,$a<x<+\infty$时,$y'>0$,因此函数在$\left(-\infty,\frac{2}{3}a\right]$,$[a,+\infty)$上单调增加;当$\frac{2a}{3}<x<a$时,$y'<0$,因此函数在$\left[\frac{2}{3}a,a\right]$上单调减少.

(7) 函数在$[0,+\infty)$内可导,且

$$y'=nx^{n-1}\mathrm{e}^{-x}-x^n\mathrm{e}^{-x}=x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}(n-x).$$

令$y'=0$,得驻点$x_1=n$,这个驻点把区间$[0,+\infty)$分成两个部分区间$[0,n]$,$[n,+\infty)$.

当$0<x<n$时,$y'>0$,因此函数在$[0,n]$上单调增加;当$n<x<+\infty$时,$y'<0$,因此函数在$[n,+\infty)$上单调减少.

(8) 函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,且

$$y=\begin{cases}x+\sin 2x, & n\pi\leqslant x\leqslant n\pi+\dfrac{\pi}{2},\\ x-\sin 2x, & n\pi+\dfrac{\pi}{2}<x\leqslant(n+1)\pi\end{cases}\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

$$y' = \begin{cases} 1+2\cos 2x, & n\pi < x < n\pi + \dfrac{\pi}{2}, \\ 1-2\cos 2x, & n\pi + \dfrac{\pi}{2} < x < (n+1)\pi \end{cases} \quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots),$$

令 $y'=0$,得驻点 $x = n\pi + \dfrac{\pi}{3}$ 及 $x = n\pi + \dfrac{5\pi}{6}$,按照这些驻点将区间$(-\infty,+\infty)$分成下列部分区间

$$\left[n\pi, n\pi+\frac{\pi}{3}\right], \left[n\pi+\frac{\pi}{3}, n\pi+\frac{\pi}{2}\right], \left[n\pi+\frac{\pi}{2}, n\pi+\frac{5\pi}{6}\right], \left[n\pi+\frac{5\pi}{6}, (n+1)\pi\right]$$
$$(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

当 $n\pi < x < n\pi + \dfrac{\pi}{3}$ 时,$y'>0$,因此函数在$\left[n\pi, n\pi+\dfrac{\pi}{3}\right]$上单调增加;

当 $n\pi + \dfrac{\pi}{3} < x < n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ 时,$y'<0$,因此函数在$\left[n\pi+\dfrac{\pi}{3}, n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调减少;

当 $n\pi + \dfrac{\pi}{2} < x < n\pi + \dfrac{5\pi}{6}$ 时,$y'>0$,因此函数在$\left[n\pi+\dfrac{\pi}{2}, n\pi+\dfrac{5}{6}\pi\right]$上单调增加;

当 $n\pi + \dfrac{5\pi}{6} < x < (n+1)\pi$ 时,$y'<0$,因此函数在$\left[n\pi+\dfrac{5}{6}\pi, (n+1)\pi\right]$上单调减少.

综上可知,函数在$\left[\dfrac{k\pi}{2}, \dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right]$上单调增加,在$\left[\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调减少$(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

4. 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导,$y=f(x)$ 的图形如图 3-1 所示,则导函数 $f'(x)$ 的图形为图 3-2中所示的四个图形中的哪一个?

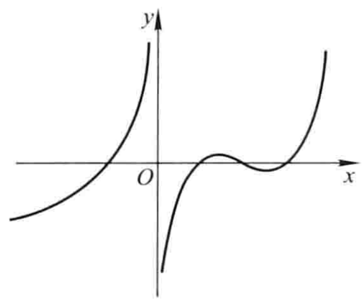
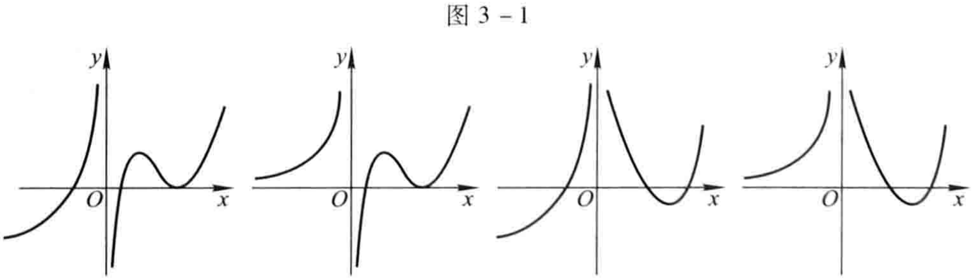


图 3-1



(A) (B) (C) (D)

图 3-2

解　由所给图形知，当 $x<0$ 时，$y=f(x)$ 单调增加，从而 $f'(x)\geqslant 0$，故排除(A)，(C)；当 $x>0$ 时，随着 x 增大，$y=f(x)$ 先单调增加，然后单调减少，再单调增加，因此随着 x 增大，先有 $f'(x)\geqslant 0$，然后 $f'(x)\leqslant 0$，继而又有 $f'(x)\geqslant 0$，故应选(D).

5. 证明下列不等式：

(1) 当 $x>0$ 时，$1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$；

(2) 当 $x>0$ 时，$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$；

(3) 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x+\tan x>2x$；

(4) 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\tan x>x+\frac{1}{3}x^3$；

(5) 当 $x>4$ 时，$2^x>x^2$.

解　(1) 取 $f(t)=1+\frac{1}{2}t-\sqrt{1+t}, t\in[0,x]$.

$$f'(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+t}}=\frac{\sqrt{1+t}-1}{2\sqrt{1+t}}>0,\quad t\in(0,x).$$

因此，函数 $f(t)$ 在 $[0,x]$ 上单调增加，故当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)$，即

$$1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}>1+\frac{1}{2}\cdot 0-\sqrt{1+0}=0,$$

亦即 $1+\frac{x}{2}>\sqrt{1+x}\quad(x>0)$.

(2) 取 $f(t)=1+t\ln(t+\sqrt{1+t^2})-\sqrt{1+t^2}, t\in[0,x]$.

$$f'(t)=\ln(t+\sqrt{1+t^2})+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}=\ln(t+\sqrt{1+t^2})>0, t\in(0,x).$$

因此，函数 $f(t)$ 在 $[0,x]$ 上单调增加，故当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)$，即

$$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}>1+0-1=0,$$

亦即 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}\quad(x>0)$.

(3) 取 $f(x)=\sin x+\tan x-2x, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

$$f'(x)=\cos x+\sec^2x-2,$$

$$f''(x)=-\sin x+2\sec^2x\tan x=\sin x(2\sec^3x-1)>0,\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

因此，$f'(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加，故当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x)>f'(0)=0$，从而 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加，即 $f(x)>f(0)=0$，亦即

$$\sin x+\tan x-2x>0,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$

所以,$\sin x+\tan x>2x,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

(4) 取$f(x)=\tan x-x-\frac{1}{3}x^3,x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

$$f'(x)=\sec^2x-1-x^2=\tan^2x-x^2=(\tan x-x)(\tan x+x).$$

由

$$g'(x)=(\tan x-x)'=\sec^2x-1=\tan^2x>0$$

知$g(x)=\tan x-x$在$[0,x]$上单调增加,即

$$g(x)=\tan x-x>g(0)=0.$$

故$f'(x)>0,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. 从而$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调增加,因此$f(x)>f(0)$,$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. 即当$0<x<\frac{\pi}{2}$时,$\tan x-x-\frac{1}{3}x^3>0$. 从而

$$\tan x>x+\frac{1}{3}x^3\quad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

(5) 取$f(t)=t\ln 2-2\ln t,t\in[4,x]$.

$$f'(t)=\ln 2-\frac{2}{t}=\frac{\ln 4}{2}-\frac{2}{x}>\frac{\ln \mathrm{e}}{2}-\frac{2}{4}=0,$$

故当$x>4$时,$f(x)$单调增加,从而$f(x)>f(4)=0$,即

$$x\ln 2-2\ln x>0,$$

亦即$2^x>x^2(x>4)$.

6. 讨论方程$\ln x=ax$(其中$a>0$)有几个实根?

解　取函数$f(x)=\ln x-ax,x\in(0,+\infty)$.

$$f'(x)=\frac{1}{x}-a.$$

令$f'(x)=0$,得驻点$x=\frac{1}{a}$.

当$0<x<\frac{1}{a}$时,$f'(x)>0$,因此函数$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$内单调增加;当$\frac{1}{a}<x<+\infty$时,$f'(x)<0$,因此函数$f(x)$在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$内单调减少. 从而$f\left(\frac{1}{a}\right)$为最大值,又$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$,故

当$f\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}-1=0$,即$a=\frac{1}{\mathrm{e}}$时,曲线$y=\ln x-ax$与$x$轴仅有一个交点,这时,原方程有惟一实根.

当$f\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}-1>0$,即$0<a<\frac{1}{\mathrm{e}}$时,曲线$y=\ln x-ax$与$x$轴有两个交点,这

时,原方程有两个实根.

当 $f\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}-1<0$,即 $a>\frac{1}{e}$ 时,曲线 $y=\ln x-ax$ 与 x 轴没有交点,这时,原方程没有实根.

7. 单调函数的导函数是否必为单调函数?研究下面这个例子:

$$f(x)=x+\sin x.$$

解 单调函数的导函数不一定是单调函数. 例如函数 $f(x)=x+\sin x$,由于 $f'(x)=1+\cos x\geqslant 0$,且 $f'(x)$ 在任何有限区间内只有有限个零点. 因此函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内为单调增加函数. 但它的导函数 $f'(x)=1+\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内却不是单调函数.

8. 设 I 为一无穷区间,函数 $f(x)$ 在 I 上连续,I 内可导,试证明:如果在 I 的任一有限的子区间上,$f'(x)\geqslant 0$(或 $f'(x)\leqslant 0$),且等号仅在有限多个点处成立,那么 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加(或单调减少).

证 在 I 内任取两点 x_1、x_2,不妨设 $x_1<x_2$. 在 $[x_1,x_2]$ 上应用拉格朗日中值定理,得到

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\geqslant 0\quad(\text{或}\leqslant 0),$$

其中 $\xi\in(x_1,x_2)$,即 $f(x_2)\geqslant f(x_1)$(或 $f(x_2)\leqslant f(x_1)$),因此,$f(x)$ 在 I 上单调不减(或单调不增),从而对任一 $x\in[x_1,x_2]$,有

$$f(x_2)\geqslant f(x)\geqslant f(x_1)\quad(\text{或} f(x_2)\leqslant f(x)\leqslant f(x_1)).$$

若 $f(x_1)=f(x_2)$,则有 $f(x)\equiv f(x_1)$,$x\in[x_1,x_2]$,故 $f'(x)\equiv 0$,$x\in[x_1,x_2]$,这与 $f'(x)=0$ 在 I 的任一有限子区间上仅在有限多个点处成立的假定相矛盾,因此 $f(x_2)>f(x_1)$(或 $f(x_2)<f(x_1)$),即 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加(或单调减少).

9. 判定下列曲线的凹凸性:

(1) $y=4x-x^2$; (2) $y=\text{sh }x$;

(3) $y=x+\frac{1}{x}\quad(x>0)$; (4) $y=x\arctan x$.

解 (1) $y'=4-2x$,$y''=-2<0$. 故曲线 $y=4x-x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是凸的.

(2) $y'=\text{ch }x$,$y''=\text{sh }x$,令 $y''=0$,得 $x=0$.

当 $-\infty<x<0$ 时,$y''<0$,曲线 $y=\text{sh }x$ 在 $(-\infty,0]$ 上是凸的.

当 $0<x<+\infty$ 时,$y''>0$,曲线 $y=\text{sh }x$ 在 $[0,+\infty)$ 上是凹的.

(3) $y'=1-\frac{1}{x^2}$,$y''=\frac{2}{x^3}>0\ (x>0)$,故曲线 $y=x+\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内是凹的.

(4) $y'=\arctan x+\frac{x}{1+x^2}$,$y''=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1+x^2-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2}{(1+x^2)^2}>0$,

故曲线 $y=x\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是凹的.

10. 求下列函数图形的拐点及凹或凸的区间:

(1) $y=x^3-5x^2+3x+5$;　　(2) $y=xe^{-x}$;

(3) $y=(x+1)^4+e^x$;　　(4) $y=\ln(x^2+1)$;

(5) $y=e^{\arctan x}$;　　(6) $y=x^4(12\ln x-7)$.

解　(1) $y'=3x^2-10x+3, y''=6x-10$,令 $y''=0$ 得 $x=\dfrac{5}{3}$.

当 $-\infty<x<\dfrac{5}{3}$ 时,$y''<0$,因此曲线在 $\left(-\infty,\dfrac{5}{3}\right]$ 上是凸的;当 $\dfrac{5}{3}<x<+\infty$ 时,$y''>0$,因此曲线在 $\left[\dfrac{5}{3},+\infty\right)$ 上是凹的. 故点 $\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{20}{27}\right)$ 为拐点.

(2) $y'=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}, y''=-e^{-x}+(1-x)(-e^{-x})=e^{-x}(x-2)$.

令 $y''=0$,得 $x=2$.

当 $-\infty<x<2$ 时,$y''<0$,因此曲线在 $(-\infty,2]$ 上是凸的;当 $2<x<+\infty$ 时,$y''>0$,因此曲线在 $(2,+\infty)$ 上是凹的. 故点 $\left(2,\dfrac{2}{e^2}\right)$ 为拐点.

(3) $y'=4(x+1)^3+e^x, y''=12(x+1)^2+e^x>0$,因此曲线在 $(-\infty,+\infty)$ 内是凹的,曲线没有拐点.

(4) $y'=\dfrac{2x}{x^2+1}, y''=\dfrac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$.

令 $y''=0$,得 $x_1=-1, x_2=1$.

当 $-\infty<x<-1$ 时,$y''<0$,因此曲线在 $(-\infty,-1]$ 上是凸的;当 $-1<x<1$ 时,$y''>0$,因此曲线在 $[-1,1]$ 上是凹的;当 $1<x<+\infty$ 时,$y''<0$,因此曲线在 $[1,+\infty)$ 上是凸的. 曲线有两个拐点,分别为 $(-1,\ln 2)$,$(1,\ln 2)$.

(5) $y'=e^{\arctan x}\dfrac{1}{1+x^2}, y''=\dfrac{-2e^{\arctan x}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}{(1+x^2)^2}$,令 $y''=0$,得 $x=\dfrac{1}{2}$.

当 $-\infty<x<\dfrac{1}{2}$ 时,$y''>0$,因此曲线在 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$ 上是凹的;当 $\dfrac{1}{2}<x<+\infty$ 时,$y''<0$,因此曲线在 $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上是凸的. 故点 $\left(\dfrac{1}{2},e^{\arctan\frac{1}{2}}\right)$ 为拐点.

(6) $y'=4x^3(12\ln x-7)+x^4\cdot 12\dfrac{1}{x}=4x^3(12\ln x-4)$,

$$y''=12x^2(12\ln x-4)+4x^3\cdot 12\frac{1}{x}=144x^2\ln x\,(x>0).$$

令 $y''=0$,得 $x=1$.

当 $0<x<1$ 时,$y''<0$,因此曲线在 $(0,1]$ 上是凸的;当 $1<x<+\infty$ 时,$y''>0$,因此曲线在 $[1,+\infty)$ 上是凹的. 故点 $(1,-7)$ 为拐点.

11. 利用函数图形的凹凸性,证明下列不等式:

(1) $\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \quad (x>0,y>0,x\neq y,n>1)$;

(2) $\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}(x\neq y)$;

(3) $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}\ (x>0,y>0,x\neq y)$.

证　(1) 取函数 $f(t)=t^n,t\in(0,+\infty)$.

$$f'(t)=nt^{n-1},f''(t)=n(n-1)t^{n-2},t\in(0,+\infty).$$

当 $n>1$ 时,$f''(t)>0,t\in(0,+\infty)$. 因此 $f(t)=t^n$ 在 $(0,+\infty)$ 内图形是凹的,故对任何 $x>0,y>0,x\neq y$,恒有

$$\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

即 $\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \quad (x>0,y>0,x\neq y,n>1)$.

(2) 取函数 $f(t)=e^t,t\in(-\infty,+\infty)$. $f'(t)=e^t,f''(t)=e^t>0,t\in(-\infty,+\infty)$. 因此 $f(t)=e^t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内图形是凹的,故对任何 $x,y\in(-\infty,+\infty),x\neq y$,恒有 $\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f\left(\frac{x+y}{2}\right)$,即

$$\frac{1}{2}(e^x+e^y)>e^{\frac{x+y}{2}} \quad (x\neq y).$$

(3) 取函数 $f(t)=t\ln t,t\in(0,+\infty),f'(t)=\ln t+1,f''(t)=\frac{1}{t}>0$, $t\in(0,+\infty)$,因此 $f(t)=t\ln t$ 在 $(0,+\infty)$ 内图形是凹的,故对任何 $x,y\in(0,+\infty),x\neq y$,恒有 $\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f\left(\frac{x+y}{2}\right)$,即

$$\frac{1}{2}(x\ln x+y\ln y)>\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2},$$

亦即

$$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}\ (x\neq y).$$

* **12.** 试证明曲线 $y=\frac{x-1}{x^2+1}$ 有三个拐点位于同一直线上.

证　$$y'=\frac{(x^2+1)-2x(x-1)}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2},$$

$$y''=\frac{(-2x+2)(x^2+1)^2-2(x^2+1)\cdot 2x(-x^2+2x+1)}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{2x^3-6x^2-6x+2}{(x^2+1)^3}$$

$$=\frac{2(x+1)[x-(2-\sqrt{3})][x-(2+\sqrt{3})]}{(x^2+1)^3}.$$

令 $y''=0$,得 $x_1=-1,x_2=2-\sqrt{3},x_3=2+\sqrt{3}$.

当 $-\infty<x<-1$ 时,$y''<0$,因此曲线在 $(-\infty,-1]$ 上是凸的;

当 $-1<x<2-\sqrt{3}$ 时,$y''>0$,因此曲线在 $[-1,2-\sqrt{3}]$ 上是凹的;

当 $2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$ 时,$y''<0$,因此曲线在 $[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}]$ 上是凸的;

当 $2+\sqrt{3}<x<+\infty$ 时,$y''>0$,因此曲线在 $[2+\sqrt{3},+\infty)$ 上是凹的,

故曲线有三个拐点,分别为 $(-1,-1)$,$\left(2-\sqrt{3},\dfrac{1-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})}\right)$,$\left(2+\sqrt{3},\dfrac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})}\right)$.

由于

$$\frac{\dfrac{1-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})}-(-1)}{2-\sqrt{3}-(-1)}=\frac{\dfrac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})}-(-1)}{2+\sqrt{3}-(-1)}=\frac{1}{4},$$

故这三个拐点在一条直线上.

13. 问 a,b 为何值时,点 $(1,3)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点?

解　$y'=3ax^2+2bx,y''=6ax+2b=6a\left(x+\dfrac{b}{3a}\right)$.

令 $y''=0$,得 $x_0=-\dfrac{b}{3a}$.

当 $-\infty<x<-\dfrac{b}{3a}$ 时,$y''<0$,因此曲线在 $\left(-\infty,-\dfrac{b}{3a}\right]$ 上是凸的;

当 $-\dfrac{b}{3a}<x<+\infty$ 时,$y''>0$. 因此曲线在 $\left[-\dfrac{b}{3a},+\infty\right)$ 上是凹的;

当 $x_0=-\dfrac{b}{3a}$ 时,$y_0=a\left(-\dfrac{b}{3a}\right)^3+b\left(-\dfrac{b}{3a}\right)^2=\dfrac{2b^3}{27a^2}$. 由于 y'' 在 x_0 的两侧变号,故点 $\left(-\dfrac{b}{3a},\dfrac{2b^3}{27a^2}\right)$ 为曲线的惟一拐点.

从而要使点 $(1,3)$ 为拐点,则 $\begin{cases}-\dfrac{b}{3a}=1,\\ \dfrac{2b^3}{27a^2}=3,\end{cases}$ 解得 $a=-\dfrac{3}{2},b=\dfrac{9}{2}$.

14. 试决定曲线 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 中的 a,b,c,d,使得 $x=-2$ 处曲线有水平切线,$(1,-10)$ 为拐点,且点 $(-2,44)$ 在曲线上.

解　$y'=3ax^2+2bx+c,y''=6ax+2b$.

根据题意有 $y(-2)=44,y'(-2)=0,y(1)=-10,y''(1)=0$,即

$$\begin{cases} -8a+4b-2c+d=44, \\ 12a-4b+c=0, \\ a+b+c+d=-10, \\ 6a+2b=0. \end{cases}$$

解此方程组得 $a=1,b=-3,c=-24,d=16$.

15. 试决定 $y=k(x^2-3)^2$ 中 k 的值，使曲线的拐点处的法线通过原点.

解　$y'=2k(x^2-3)\cdot 2x=4kx(x^2-3),y''=4k(x^2-3)+4kx\cdot 2x=12k(x-1)(x+1)$.

令 $y''=0$，得 $x_1=-1,x_2=1$.

当 $-\infty<x<-1$ 时，$y''>0$，因此曲线在 $(-\infty,-1]$ 上是凹的；当 $-1<x<1$ 时，$y''<0$，因此曲线在 $[-1,1]$ 上是凸的；当 $1<x<+\infty$ 时，$y''>0$，因此曲线在 $[1,+\infty)$ 上是凹的，从而知 $(-1,4k)$，$(1,4k)$ 为曲线的拐点.

由 $y'|_{x=-1}=8k$ 知过点 $(-1,4k)$ 的法线方程为

$$Y-4k=-\frac{1}{8k}(X+1).$$

要使该法线过原点，则 $(0,0)$ 应满足这方程，将 $X=0,Y=0$ 代入上式，得

$$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}.$$

由 $y'|_{x=1}=-8k$ 知，过点 $(1,4k)$ 的法线方程为

$$Y-4k=\frac{1}{8k}(X-1).$$

同理，要使该法线过原点，将 $X=0,Y=0$ 代入上式得 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}$. 所以，当 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}$ 时，该曲线的拐点处的法线通过原点.

***16**. 设 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内具有三阶连续导数，如果 $f''(x_0)=0$，而 $f'''(x_0)\neq 0$，试问 $(x_0,f(x_0))$ 是否为拐点？为什么？

解　已知 $f'''(x_0)\neq 0$，不妨设 $f'''(x_0)>0$，由于 $f'''(x)$ 在 $x=x_0$ 的某个邻域内连续，因此必存在 $\delta>0$，当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时 $f'''(x)>0$，故在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内 $f''(x)$ 单调增加. 又已知 $f''(x_0)=0$，从而当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时 $f''(x)<f''(x_0)=0$，即函数 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内的图形是凸的，当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f''(x)>f''(x_0)=0$，即函数 $f(x)$ 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内的图形是凹的，所以点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线的拐点.

习题 3-5　函数的极值与最大值最小值

1. 求下列函数的极值：

(1) $y=2x^3-6x^2-18x+7$;　　(2) $y=x-\ln(1+x)$;

(3) $y=-x^4+2x^2$;　　(4) $y=x+\sqrt{1-x}$;

(5) $y=\dfrac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$;　　(6) $y=\dfrac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$;

(7) $y=e^x\cos x$;　　(8) $y=x^{\frac{1}{x}}$;

(9) $y=3-2(x+1)^{\frac{1}{3}}$;　　(10) $y=x+\tan x$.

解　(1) $y'=6x^2-12x-18, y''=12x-12$.

令 $y'=0$ 得驻点 $x_1=-1, x_2=3$.

由 $y''|_{x=-1}=-24<0$ 知 $y|_{x=-1}=17$ 为极大值,由 $y''|_{x=3}=24>0$ 知 $y|_{x=3}=-47$为极小值.

(2) 函数的定义域为$(-1,+\infty)$,在$(-1,+\infty)$内可导,且

$$y'=1-\frac{1}{1+x},\quad y''=\frac{1}{(1+x)^2}\ (x>-1).$$

令 $y'=0$ 得驻点 $x=0$. 由 $y''|_{x=0}=1>0$ 知 $y|_{x=0}=0$ 为极小值.

(3) $y'=-4x^3+4x=-4x(x^2-1), y''=-12x^2+4$.

令 $y'=0$ 得驻点 $x_1=-1, x_2=1, x_3=0$.

由 $y''|_{x=-1}=-8<0$ 知 $y|_{x=-1}=1$ 为极大值,由 $y''|_{x=1}=-8<0$ 知 $y|_{x=1}=1$ 为极大值,由 $y''|_{x=0}=4>0$ 知 $y|_{x=0}=0$ 为极小值.

(4) 函数的定义域为$(-\infty,1]$,在$(-\infty,-1)$内可导,且

$$y'=1-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}=\frac{2\sqrt{1-x}-1}{2\sqrt{1-x}}, y''=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1-x)^{3/2}}.$$

令 $y'=0$ 得驻点 $x=\dfrac{3}{4}$,由 $y''|_{x=\frac{3}{4}}=-2<0$ 知 $y|_{x=\frac{3}{4}}=\dfrac{5}{4}$为极大值.

$$(5)\ y'=\frac{3\sqrt{4+5x^2}-(1+3x)\cdot\dfrac{10x}{2\sqrt{4+5x^2}}}{4+5x^2}=\frac{12-5x}{(4+5x^2)^{3/2}}=\frac{-5\left(x-\dfrac{12}{5}\right)}{(4+5x^2)^{3/2}}.$$

令 $y'=0$ 得驻点 $x=\dfrac{12}{5}$.

当 $-\infty<x<\dfrac{12}{5}$时,$y'>0$,因此函数在$\left(-\infty,\dfrac{12}{5}\right]$上单调增加;当$\dfrac{12}{5}<x<+\infty$ 时 $y'<0$,因此函数在$\left[\dfrac{12}{5},+\infty\right)$上单调减少,从而 $y\left(\dfrac{12}{5}\right)=\dfrac{\sqrt{205}}{10}$为极大值.

$$(6)\ y'=\frac{(6x+4)(x^2+x+1)-(2x+1)(3x^2+4x+4)}{(x^2+x+1)^2}=\frac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}.$$

令 $y'=0$ 得驻点 $x_1=-2, x_2=0$.

当 $-\infty<x<-2$ 时,$y'<0$,因此函数在$(-\infty,-2]$上单调减少;当 $-2<x<0$ 时,$y'>0$,因此函数在$[-2,0]$上单调增加;当 $0<x<+\infty$ 时,$y'<0$,因此函数在

$[0,+\infty)$上单调减少. 从而可知 $y(-2)=\dfrac{8}{3}$为极小值,$y(0)=4$ 为极大值.

(7) $y'=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x(\cos x-\sin x)$,$y''=-2e^x\sin x$.

令 $y'=0$,得驻点 $x_k=2k\pi+\dfrac{\pi}{4}$,$x'_k=2k\pi+\dfrac{5}{4}\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

由 $y''\big|_{x=2k\pi+\frac{\pi}{4}}=-\sqrt{2}e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}<0$ 知 $y\big|_{x=2k\pi+\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$为极大值.

由 $y''\big|_{x'=2k\pi+\frac{5\pi}{4}}=\sqrt{2}\,e^{2k\pi+\frac{5\pi}{4}}>0$ 知 $y\big|_{x=2k\pi+\frac{5\pi}{4}}=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}e^{2k\pi+\frac{5}{4}\pi}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$为极小值.

(8) 函数的定义域为$(0,+\infty)$,在$(0,+\infty)$内可导,且

$$y'=\left(e^{\frac{1}{x}\ln x}\right)'=e^{\frac{1}{x}\ln x}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x),$$

令 $y'=0$,得驻点 $x=e$.

当$0<x<e$ 时,$y'>0$,因此函数在$(0,e]$上单调增加;当 $e<x<+\infty$ 时,$y'<0$,因此函数在$[e,+\infty)$上单调减少,从而可知 $y(e)=e^{\frac{1}{e}}$为极大值.

(9) 当 $x\neq-1$ 时,$y'=-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{(x+1)^{2/3}}<0$. 又 $x=-1$ 时函数有定义. 因此可知函数在$(-\infty,+\infty)$内单调减少,从而函数在$(-\infty,+\infty)$内无极值.

(10) 由 $y'=1+\sec^2x>0$ 知所给函数在$(-\infty,+\infty)$内单调增加,从而函数在$(-\infty,+\infty)$内无极值.

2. 试证明:如果函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 满足条件 $b^2-3ac<0$,那么这函数没有极值.

证　$y'=3ax^2+2bx+c$. 由 $b^2-3ac<0$ 知 $a\neq0$,$c\neq0$,y'是二次三项式,

$$\Delta=(2b)^2-4(3a)\cdot c=4(b^2-3ac)<0.$$

当 $a>0$ 时,y'的图像开口向上,且在 x 轴上方,故 $y'>0$,从而所给函数在$(-\infty,+\infty)$内单调增加. 当 $a<0$ 时,y'的图像开口向下,且在 x 轴下方,故 $y'<0$,从而所给函数在$(-\infty,+\infty)$内单调减少. 因此,只要条件 $b^2-3ac<0$ 成立,所给函数在$(-\infty,+\infty)$内单调,故函数在$(-\infty,+\infty)$内无极值.

3. 试问 a 为何值时,函数$f(x)=a\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$处取得极值? 它是极大值还是极小值? 并求此极值.

解　$f'(x)=a\cos x+\cos 3x$,函数在 $x=\dfrac{\pi}{3}$处取得极值,则$f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=0$,即 $a\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos\pi=0$,故 $a=2$.

又$f''(x)=-2\sin x-3\sin 3x$,$f''\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-2\sin\dfrac{\pi}{3}-3\sin\pi=-\sqrt{3}<0$,因此

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}\sin\pi=\sqrt{3}$为极大值.

4. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数,且 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$,证明:

(1) 当 n 为奇数时,$f(x)$ 在 x_0 处不取得极值;

(2) 当 n 为偶数时,$f(x)$ 在 x_0 处取得极值,且当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时,$f(x_0)$ 为极大值,当 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时,$f(x_0)$ 为极小值.

证　由含佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式及已知条件,得

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n),$$

即 $f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$,由此式可知 $f(x)-f(x_0)$ 在 x_0 某邻域内的符号由 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 在 x_0 某邻域内的符号决定.

(1) 当 n 为奇数时,$(x-x_0)^n$ 在 x_0 两侧异号,所以 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 在 x_0 两侧异号,从而 $f(x)-f(x_0)$ 在 x_0 两侧异号,故 $f(x)$ 在 x_0 处不取得极值.

(2) 当 n 为偶数时,在 x_0 两侧 $(x-x_0)^n>0$,若 $f^{(n)}(x_0)<0$,则 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n<0$,从而 $f(x)-f(x_0)<0$,即 $f(x)<f(x_0)$,故 $f(x_0)$ 为极大值;若 $f^{(n)}(x_0)>0$,则 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n>0$,从而 $f(x)-f(x_0)>0$,即 $f(x)>f(x_0)$,故 $f(x_0)$ 为极小值.

5. 试利用习题 4 的结论,讨论函数 $f(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$ 的极值.

解　$f'(x)=e^x-e^{-x}-2\sin x$,　$f''(x)=e^x+e^{-x}-2\cos x$,　$f'''(x)=e^x-e^{-x}+2\sin x$,$f^{(4)}(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$,故 $f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0$,$f^{(4)}(0)=4>0$,因此函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有极小值,极小值为 4.

6. 求下列函数的最大值、最小值:

(1) $y=2x^3-3x^2$, $-1\leqslant x\leqslant 4$;

(2) $y=x^4-8x^2+2$, $-1\leqslant x\leqslant 3$;

(3) $y=x+\sqrt{1-x}$, $-5\leqslant x\leqslant 1$.

解　(1) 函数在 $[-1,4]$ 上可导,且 $y'=6x^2-6x=6x(x-1)$.

令 $y'=0$,得驻点 $x_1=0$,$x_2=1$. 比较 $y|_{x=-1}=-5$,$y|_{x=0}=0$,$y|_{x=1}=-1$,$y|_{x=4}=80$,得函数的最大值为 $y|_{x=4}=80$,最小值为 $y|_{x=-1}=-5$.

(2) 函数在 $[-1,3]$ 上可导,且

$$y'=4x^3-16x=4x(x-2)(x+2).$$

令 $y'=0$ 得驻点 $x_1=-2$(舍去)，$x_2=0$，$x_3=2$.

比较 $y|_{x=-1}=-5$，$y|_{x=0}=2$，$y|_{x=2}=-14$，$y|_{x=3}=11$，得函数的最大值为 $y|_{x=3}=11$，最小值为 $y|_{x=2}=-14$.

(3) 函数在 $[-5,1)$ 上可导，且 $y'=1-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}=\dfrac{2\sqrt{1-x}-1}{2\sqrt{1-x}}$.

令 $y'=0$，得驻点 $x=\dfrac{3}{4}$. 比较 $y|_{x=-5}=-5+\sqrt{6}$，$y|_{x=\frac{3}{4}}=\dfrac{5}{4}$，$y|_{x=1}=1$，得函数的最大值为 $y|_{x=\frac{3}{4}}=\dfrac{5}{4}$，最小值为 $y|_{x=-5}=\sqrt{6}-5$.

7. 问函数 $y=2x^3-6x^2-18x-7\ (1\leqslant x\leqslant 4)$ 在何处取得最大值？并求出它的最大值.

解　函数在 $[1,4]$ 上可导，且 $y'=6x^2-12x-18=6(x+1)(x-3)$.

令 $y'=0$，得驻点 $x_1=-1$(舍去)，$x_2=3$. 比较 $y|_{x=1}=-29$，$y|_{x=3}=-61$，$y|_{x=4}=-47$，得函数在 $x=1$ 处取得最大值，且最大值为 $y|_{x=1}=-29$.

8. 问函数 $y=x^2-\dfrac{54}{x}\ (x<0)$ 在何处取得最小值？

解　函数在 $(-\infty,0)$ 内可导，且 $y'=2x+\dfrac{54}{x^2}=\dfrac{2(x^3+27)}{x^2}$，$y''=2-\dfrac{108}{x^3}$.

令 $y'=0$，得驻点 $x=-3$. 由 $y''|_{x=-3}=6>0$ 知 $x=-3$ 为极小值点. 又函数在 $(-\infty,0)$ 内的驻点惟一，故极小值点就是最小值点，即 $x=-3$ 为最小值点，且最小值为 $y|_{x=-3}=27$.

9. 问函数 $y=\dfrac{x}{x^2+1}\ (x\geqslant 0)$ 在何处取得最大值？

解　函数在 $[0,+\infty)$ 上可导，且

$$y'=\frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2},$$

$$y''=\frac{-2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}.$$

令 $y'=0$，得驻点 $x=-1$(舍去)，$x=1$. 由 $y''|_{x=1}=\dfrac{-4}{8}=-\dfrac{1}{2}<0$ 知 $x=1$ 为极大值点，又函数在 $[0,+\infty)$ 上的驻点惟一，故极大值点就是最大值点，即 $x=1$ 为最大值点，且最大值为 $y|_{x=1}=\dfrac{1}{2}$.

10. 某车间靠墙壁要盖一间长方形小屋，现有存砖只够砌 20 m 长的墙壁. 问应围成怎样的长方形才能使这间小屋的面积最大？

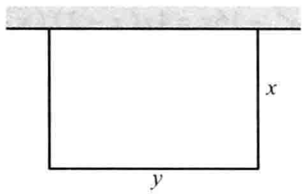


图 3－3

解　如图 3－3,设这间小屋的宽为 x,长为 y,则小屋的面积为 $S=xy$.

已知 $2x+y=20$,即 $y=20-2x$. 故

$$S=x(20-2x)=20x-2x^2,x\in(0,10).$$

$S'=20-4x,S''=-4$. 令 $S'=0$,得驻点 $x=5$. 由 $S''<0$ 知 $x=5$ 为极大值点,又驻点惟一,故极大值点就是最大值点,即当宽为 5 m,长为 10 m 时这间小屋的面积最大.

11. 要造一圆柱形油罐,体积为 V,问底半径 r 和高 h 等于多少时,才能使表面积最小? 这时底直径与高的比是多少?

解　已知 $\pi r^2h=V$,即 $h=\dfrac{V}{\pi r^2}$. 圆柱形油罐的表面积

$$\begin{aligned}A&=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+2\pi r\cdot\frac{V}{\pi r^2}\\&=2\pi r^2+\frac{2V}{r},\quad r\in(0,+\infty).\end{aligned}$$

$$A'=4\pi r-\frac{2V}{r^2},\quad A''=4\pi+\frac{4V}{r^3}.$$

令 $A'=0$,得 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. 由 $A''\Big|_{r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}}=4\pi+8\pi=12\pi>0$,知 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$为极小值点,又驻点惟一,故极小值点就是最小值点. 此时 $h=\dfrac{V}{\pi r^2}=2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}=2r$,即 $2r:h=1:1$,所以当底半径为$r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$和高 $h=2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$时,才能使表面积最小. 这时底直径与高的比为 1∶1.

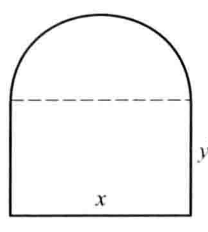


图 3－4

12. 某地区防空洞的截面拟建成矩形加半圆(图 3－4). 截面的面积为5 m^2. 问底宽 x 为多少时才能使截面的周长最小,从而使建造时所用的材料最省?

解　设截面的周长为 l,已知 $l=x+2y+\frac{\pi x}{2}$ 及 $xy+\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2=5$,即 $y=\frac{5}{x}-\frac{\pi x}{8}$. 故

$$l=x+\frac{\pi x}{4}+\frac{10}{x},\quad x\in\left(0,\sqrt{\frac{40}{\pi}}\right).$$

$$l'=1+\frac{\pi}{4}-\frac{10}{x^2},\quad l''=\frac{20}{x^3}.$$

令 $l'=0$,得驻点 $x=\sqrt{\frac{40}{4+\pi}}$. 由 $l''\Big|_{x=\sqrt{\frac{40}{4+\pi}}}=\frac{20}{\left(\frac{40}{4+\pi}\right)^{3/2}}>0$ 知 $x=\sqrt{\frac{40}{4+\pi}}$ 为极小值点,又驻点惟一,故极小值点就是最小值点. 所以当截面的底宽为 $x=\sqrt{\frac{40}{4+\pi}}$ 时,才能使截面的周长最小,从而使建造时所用的材料最省.

13. 设有质量为 5 kg 的物体,置于水平面上,受力 F 的作用而开始移动(图 3－5). 设摩擦系数 $\mu=0.25$,问力 F 与水平线的交角 α 为多少时,才可使力 F 的大小为最小.

解　如图 3－5,力 F 的大小用 $|F|$ 表示,则由 $|F|\cos\alpha=(P-|F|\sin\alpha)\mu$ 知

$$|F|=\frac{\mu P}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha},\quad \alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right).$$

设 $y=\cos\alpha+\mu\sin\alpha,\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$,则 $y'=-\sin\alpha+\mu\cos\alpha$.

令 $y'=0$,得驻点 $\alpha_0=\arctan\mu$. 又 $y''\Big|_{\alpha=\alpha_0}=-\cos\alpha_0-\mu\sin\alpha_0<0$,所以驻点 α_0 为极大值点,又驻点惟一,因此 α_0 为函数 $y=y(\alpha)$ 的最大值点,这时,即 $\alpha=\alpha_0=\arctan(0.25)\approx14°2'$ 时,力 F 的大小为最小.

14. 有一杠杆,支点在它的一端. 在距支点 0.1 m 处挂一质量为 49 kg 的物体. 加力于杠杆的另一端使杠杆保持水平(图 3－6). 如果杠杆的线密度为 5 kg/m,求最省力的杆长?

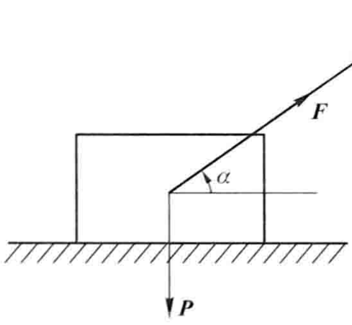


图 3－5

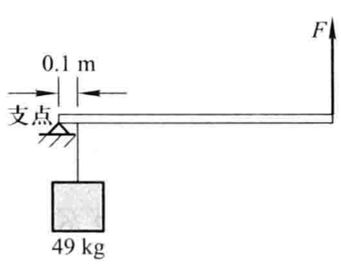


图 3－6

解　如图 3－6,设最省力的杆长为 x(m),则此时杠杆的重力为 $5gx$,由力矩平衡公式

$$x|F|=49g\times0.1+5gx\cdot\frac{x}{2}\quad(x>0),$$

知

$$|F|=\frac{4.9}{x}g+\frac{5}{2}gx,\quad |F|'=-\frac{4.9}{x^2}g+\frac{5}{2}g,$$

$$|F|''=\frac{9.8}{x^3}g.$$

令 $|F|'=0$,得驻点 $x=1.4$. 又 $|F|''\Big|_{x=1.4}=\frac{9.8}{(1.4)^3}g>0$,故 $x=1.4$ 为极小值点,又驻点惟一,因此 $x=1.4$ 也是最小值点,即杆长为 1.4 m 时最省力.

15. 从一块半径为 R 的圆铁片上挖去一个扇形做成一个漏斗(图 3-7). 问留下的扇形的中心角 φ 取多大时,做成的漏斗的容积最大?

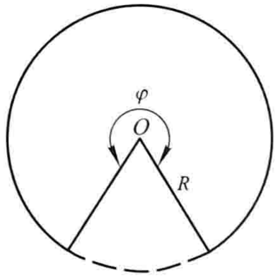


图 3-7

解 如图 3-7,设漏斗的高为 h,顶面的圆半径为 r,则漏斗的容积为 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$,又

$$2\pi r=R\varphi,\quad h=\sqrt{R^2-r^2}.$$

故

$$V=\frac{R^3}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2\varphi^4-\varphi^6}\quad(0<\varphi<2\pi),$$

$$V'=\frac{R^3}{24\pi^2}\cdot\frac{16\pi^2\varphi^3-6\varphi^5}{2\sqrt{4\pi^2\varphi^4-\varphi^6}}=\frac{R^3}{24\pi^2}\cdot\frac{8\pi^2\varphi-3\varphi^3}{\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}}.$$

令 $V'=0$ 得 $\varphi=\sqrt{\frac{8}{3}}\pi=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$. 当 $0<\varphi<\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 时,$V'>0$,故 V 在 $\left[0,\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi\right]$ 内单调增加;当 $\frac{2\sqrt{6}}{3}<\varphi<2\pi$ 时,$V'<0$,故 V 在 $\left[\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi,2\pi\right)$ 内单调减少. 因此 $\varphi=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 为极大值点,又驻点惟一,从而 $\varphi=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 也是最大值点,即当 φ 取 $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 时,做成的漏斗的容积最大.

16. 某吊车的车身高为 1.5 m,吊臂长 15 m. 现在要把一个 6 m 宽、2 m 高的屋架,水平地吊到 6 m 高的柱子上去(图 3-8),问能否吊得上去?

解 如图 3-8,设吊臂对地面的倾角为 φ,屋架能够吊到最大的高度为 h,由

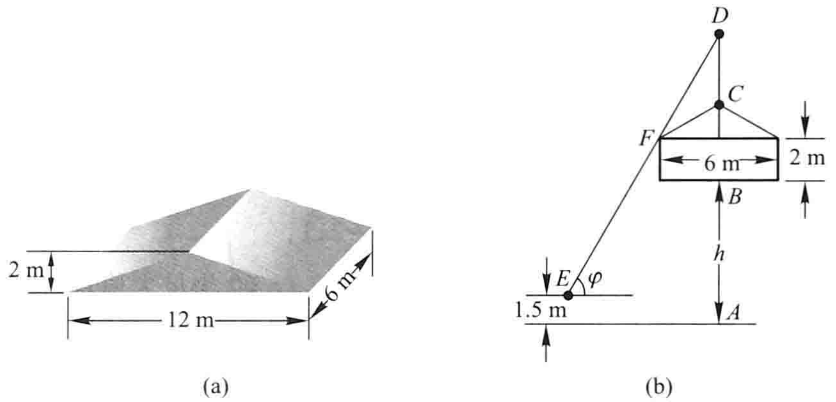


图 3-8

$15\sin\varphi=h-1.5+2+3\tan\varphi$ 知

$$h=15\sin\varphi-3\tan\varphi-\frac{1}{2},$$

$$h'=15\cos\varphi-\frac{3}{\cos^2\varphi},\quad h''=-15\sin\varphi-\frac{6\sin\varphi}{\cos^3\varphi}.$$

令 $h'=0$,得 $\cos\varphi=\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$,即得惟一驻点 $\varphi_0=\arccos\sqrt[3]{\frac{1}{5}}\approx54°13'$. 又 $h''\Big|_{\varphi=\varphi_0}<0$,故 $\varphi_0\approx54°13'$为极大值点也是最大值点. 即当 $\varphi_0\approx54°13'$时,h 达到最大值 $h_0=15\sin54°13'-3\tan54°13'-\frac{1}{2}\approx7.506$ m,而柱子高只有 6 m,所以能吊得上去.

17. 一房地产公司有 50 套公寓要出租. 当月租金定为 4 000 元时,公寓会全部租出去. 当月租金每增加 200 元时,就会多一套公寓租不出去. 而租出去的公寓平均每月需花费 400 元的维修费. 试问房租定为多少时可获得最大收入?

解　设每套月房租为 x 元,则租不出去的房子套数为$\frac{x-4000}{200}=\frac{x}{200}-20$,租出去的套数为 $50-\left(\frac{x}{200}-20\right)=70-\frac{x}{200}$,租出的每套房子获利($x-400$)元. 故总利润为

$$y=\left(70-\frac{x}{200}\right)(x-400)=-\frac{x^2}{200}+72x-28000.$$

$$y'=-\frac{x}{100}+72,\quad y''=\frac{-1}{100}.$$

令 $y'=0$,得驻点 $x=7200$. 由 $y''<0$ 知 $x=7200$ 为极大值点,又驻点惟一,这极大值点就是最大值点. 即当每套月房租定在 7 200 元时,可获得最大收入.

18. 已知制作一个背包的成本为 40 元,如果每一个背包的售出价为 x 元,售出的背包数由

$$n=\frac{a}{x-40}+b(80-x)$$

给出，其中 a,b 为正常数. 问什么样的售出价格能带来最大利润?

解　设利润函数为 $p(x)$，则

$$p(x)=(x-40)n=a+b(x-40)(80-x).$$

$$p'(x)=b(120-2x),$$

令 $p'(x)=0$，得 $x=60$(元). 由 $p''(x)=-2b<0$ 知 $x=60$ 为极大值点，又驻点惟一，这极大值点就是最大值点，即售出价格定在60元时能带来最大利润.

习题3-6　函数图形的描绘

描绘下列函数的图形：

1. $y=\frac{1}{5}(x^4-6x^2+8x+7)$；　　2. $y=\frac{x}{1+x^2}$；

3. $y=e^{-(x-1)^2}$；　　4. $y=x^2+\frac{1}{x}$；

5. $y=\frac{\cos x}{\cos 2x}$.

解　1. (1) 所给函数 $y=\frac{1}{5}(x^4-6x^2+8x+7)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 而

$$y'=\frac{1}{5}(4x^3-12x+8)=\frac{4}{5}(x+2)(x-1)^2,\ y''=\frac{4}{5}(3x^2-3)=\frac{12}{5}(x+1)(x-1).$$

(2) 令 $y'=0$，得 $x=-2,x=1$，令 $y''=0$，得 $x=1,x=-1$. 根据上述点将区间 $(-\infty,+\infty)$ 分成下列四个部分区间：

$$(-\infty,-2],[-2,-1],[-1,1],[1,+\infty).$$

(3) 在各部分区间内 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的符号、相应曲线弧的升降及凹凸以及拐点等如下表：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
y''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$y=f(x)$ 的图形		$\left(-2,-\frac{17}{5}\right)$		拐点		拐点	

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$，图形没有铅直、水平、斜渐近线.

(5) 由 $f(-2)=-\frac{17}{5}$，$f(-1)=-\frac{6}{5}$，$f(1)=2$，$f(0)=\frac{7}{5}$ 得图形上的四个点

$\left(-2,-\frac{17}{5}\right),\left(-1,-\frac{6}{5}\right),(1,2),\left(0,\frac{7}{5}\right)$.

（6）作图如图 3－9.

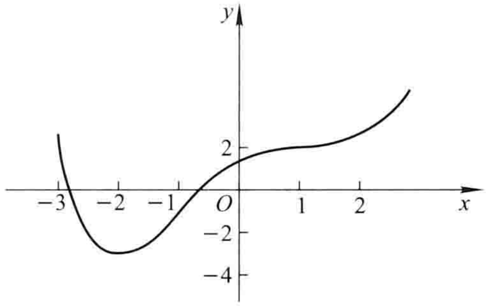


图 3－9

2.（1）所给函数 $y=\frac{x}{1+x^2}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 由于 $y=\frac{x}{1+x^2}$ 是奇函数，它的图形关于原点对称，因此可以只讨论 $[0,+\infty)$ 上该函数的图形，求出

$$y'=\frac{1+x^2-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},$$

$$y''=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

（2）在 $[0,+\infty)$ 内，y' 的零点为 $x=1$，y'' 的零点为 $x=\sqrt{3}$，根据这两点把区间 $[0,+\infty)$ 分成三个区间：$[0,1]$，$[1,\sqrt{3}]$，$[\sqrt{3},+\infty)$.

（3）在 $[0,+\infty)$ 内的各部分区间内 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的符号、相应曲线弧的升降及凹凸以及拐点等如下表：

x	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y'	+	+	0	−	−	−
y''	−	−	−	−	0	+
$y=f(x)$ 的图形	拐点	↗	$\left(1,\frac{1}{2}\right)$	↘	拐点	↘

（4）由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{1+x^2}=0$，所以图形有一条水平渐近线 $y=0$，图形无铅直渐近线及斜渐近线.

（5）由 $f(0)=0, f(1)=\frac{1}{2}, f(\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{4}$ 得在 $[0,+\infty)$ 内图形上的点 $(0,0)$，$\left(1,\frac{1}{2}\right),\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

（6）利用图形的对称性，作出图形如图 3－10.

3.（1）所给函数 $y=e^{-(x-1)^2}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，而

$$y'=-2(x-1)e^{-(x-1)^2},$$

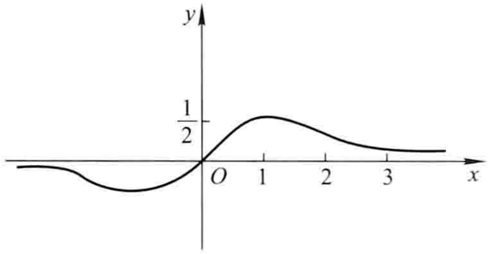


图 3 - 10

$$y''=-4(2x^2-4x+1)e^{-(x-1)^2}.$$

(2) 令 $y'=0$,得驻点 $x=1$;令 $y''=0$,得 $x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$,$x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$,根据上述点将区间 $(-\infty,+\infty)$ 分成四个部分区间:

$$\left(-\infty,1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right],\left[1-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right],\left[1,1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right],\left[1+\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right).$$

(3) 在各部分区间内 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的符号,相应曲线弧的升降及凹凸以及拐点等如下表:

x	$\left(-\infty,1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$	1	$\left(1,1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$
y'	+	+	+	0	-	-	-
y''	+	0	-	-	-	0	+
$y=f(x)$ 的图形	↗	拐点	↗	(1,1)	↘	拐点	↘

(4) 由 $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-(x-1)^2}=0$ 知图形有一条水平渐近线 $y=0$,图形无铅直渐近线及斜渐近线.

(5) 由 $f(1)=1$,$f\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=e^{-\frac{1}{2}}$,$f(0)=e^{-1}$,$f\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=e^{-\frac{1}{2}}$,得图形上的点 $(1,1)$,$\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2},e^{-\frac{1}{2}}\right)$,$(0,e^{-1})$,$\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2},e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

(6) 作图如图 3 - 11.

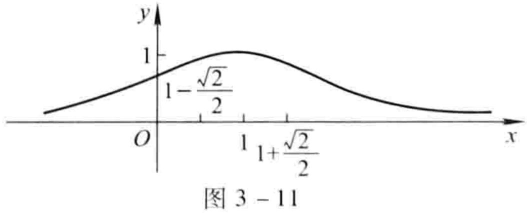


图 3 - 11

4. (1) 所给函数 $y=x^2+\frac{1}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

$$y'=2x-\frac{1}{x^2},\quad y''=2+\frac{2}{x^3}.$$

（2）令 $y'=0$，得 $x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$；令 $y''=0$，得 $x=-1$，又 $x=0$ 时函数无定义，根据上述点，将区间 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 分成四个部分区间：$(-\infty,-1]$，$[-1,0)$，$\left(0,\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$，$\left[\frac{1}{\sqrt[3]{2}},+\infty\right)$.

（3）在各部分区间内 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的符号，相应曲线弧的升降及凹凸以及拐点等如下表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$\left(0,\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},+\infty\right)$
y'	$-$	$-$	$-$		$-$	0	$+$
y''	$+$	0	$-$		$+$	$+$	$+$
$y=f(x)$ 的图形	↘	拐点	↘		↘	$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\right)$	↗

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+\frac{1}{x}\right)=\infty$，所以图形有一条铅直渐近线 $x=0$，图形无水平、斜渐近线.

（5）由 $f(-1)=0$，$f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$ 得在 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 内图形上的点 $(-1,0)$，$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\right)$.

（6）作图如图 3－12.

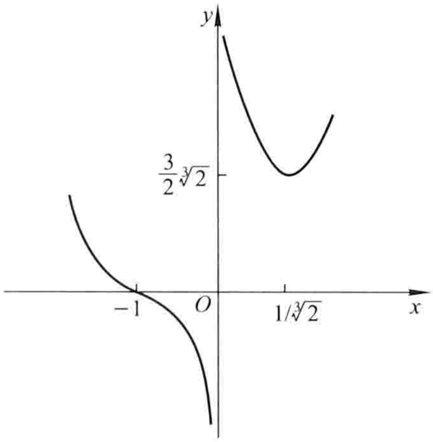


图 3－12

5.（1）所给函数 $y=\frac{\cos x}{\cos 2x}$ 的定义域 $D=\left\{x \mid x\neq\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4}, x\in\mathbf{R}, n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\right\}$.

由于 $y=\dfrac{\cos x}{\cos 2x}$ 是偶函数，它的图形关于 y 轴对称，且由于函数是以 2π 为周期的函数，因此可以只讨论 $[0,\pi]$ 部分的图形. 求出

$$y'=\frac{-\sin x\cos 2x+\cos x\cdot 2\sin 2x}{\cos^2(2x)}=\frac{\sin x(3-2\sin^2 x)}{\cos^2(2x)},$$

$$y''=\frac{\cos x(3+12\sin^2 x-4\sin^4 x)}{\cos^3(2x)}.$$

(2) 令 $y'=0$，得 $x=0,x=\pi$；令 $y''=0$，得 $x=\dfrac{\pi}{2}$；又函数在点 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 及 $x=\dfrac{3}{4}\pi$ 处无定义. 根据这些点把区间 $[0,\pi]$ 分成四个部分区间：$\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$，$\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)$，$\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right]$.

(3) 在 $[0,\pi]$ 内的各部分区间内 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的符号，相应曲线弧的升降及凹凸以及拐点等如下表：

x	0	$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$	$\frac{3\pi}{4}$	$\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$	π
y'	0	+		+	+	+		+	0
y''	+	+		−	+	+		−	−
$y=f(x)$ 的图形	(0,1)				拐点				$(\pi,-1)$

(4) 由 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}f(x)=\infty$ 及 $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}f(x)=\infty$，知图形有两条铅直渐近线：$x=\dfrac{\pi}{4}$ 及 $x=\dfrac{3}{4}\pi$，图形无水平及斜渐近线.

(5) 由 $f(0)=1,f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ 得图形上的点 $(0,1)$，$\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$.

(6) 利用图形对称性及函数的周期性，作图如图 3－13.

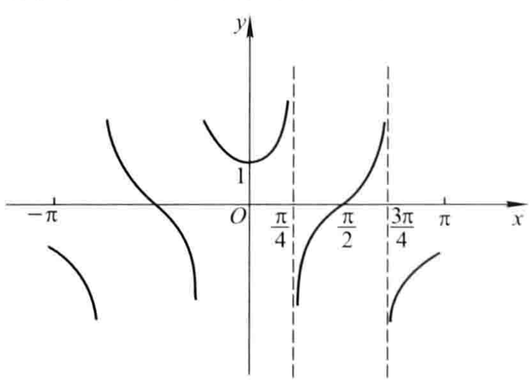


图 3－13

习题 3-7　曲率

1. 求椭圆 $4x^2+y^2=4$ 在点(0,2)处的曲率.

解　由 $8x+2yy'=0$ 知 $y'=\dfrac{-4x}{y}$，$y''=\dfrac{-16}{y^3}$. 故 $y'|_{x=0}=0$，$y''|_{x=0}=-2$，故在点(0,2)处的曲率为

$$K=\left.\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_{(0,2)}=2.$$

2. 求曲线 $y=\ln\sec x$ 在点 (x,y) 处的曲率及曲率半径.

解　$y'=\dfrac{1}{\sec x}\cdot\sec x\tan x=\tan x$，$y''=\sec^2 x$. 故曲率

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{\sec^2 x}{(1+\tan^2 x)^{3/2}}=|\cos x|,$$

曲率半径 $\rho=\dfrac{1}{K}=|\sec x|$.

3. 求抛物线 $y=x^2-4x+3$ 在其顶点处的曲率及曲率半径.

解　抛物线的顶点为 $(2,-1)$，$y'=2x-4$，$y''=2$.

抛物线 $y=x^2-4x+3$ 在其顶点处的曲率

$$K=\left.\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}\right|_{(2,-1)}=2,$$

曲率半径 $\rho=\dfrac{1}{K}=\dfrac{1}{2}$.

4. 求曲线 $x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$ 在 $t=t_0$ 处的曲率.

解　$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}=-\tan t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t}=\frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}.$$

故曲线在 $t=t_0$ 处的曲率为

$$K=\left.\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}\right|_{t=t_0}=\left.\frac{\left|\frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}\right|}{[1+(-\tan t)^2]^{3/2}}\right|_{t=t_0}=\frac{2}{|3a\sin(2t_0)|}.$$

5. 对数曲线 $y=\ln x$ 上哪一点处的曲率半径最小？求出该点处的曲率半径.

解　$y'=\dfrac{1}{x}$，$y''=-\dfrac{1}{x^2}$. 曲线的曲率

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\left|-\frac{1}{x^2}\right|}{\left[1+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right]^{3/2}}=\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}},$$

曲率半径为

$$\rho=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x}.$$

又 $\rho'=\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}(2x^2-1)}{x^2}$. 令 $\rho'=0$ 得驻点 $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2},x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$(舍去).

当 $0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,$\rho'<0$,即 ρ 在 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上单调减少;当 $\frac{\sqrt{2}}{2}<x<+\infty$ 时,$\rho'>0$,即 ρ 在 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 上单调增加. 因此在 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 处 ρ 取得极小值;驻点惟一,从而 ρ 的极小值就是最小值,因此最小的曲率半径为

$$\rho\Big|_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

6. 证明曲线 $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ 在点 (x,y) 处的曲率半径为 $\frac{y^2}{a}$.

证 $y'=\operatorname{sh}\frac{x}{a},y''=\frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}$,曲线在点 (x,y) 处的曲率为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\left|\frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}\right|}{\left(1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{a\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}},$$

曲率半径为 $\rho=\frac{1}{K}=a\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}=\frac{y^2}{a}$.

7. 一飞机沿抛物线路径 $y=\frac{x^2}{10\,000}$(y 轴铅直向上,单位为 m)作俯冲飞行. 在坐标原点 O 处飞机的速度为 $v=200\text{ m/s}$,飞行员体重 $G=70\text{ kg}$. 求飞机俯冲至最低点即原点 O 处时座椅对飞行员的反力.

解 $y'=\frac{2x}{10\,000}=\frac{x}{5\,000},y''=\frac{1}{5\,000}$.

抛物线在坐标原点的曲率半径为

$$\rho=\frac{1}{K}\Big|_{x=0}=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}\Big|_{x=0}=5\,000.$$

所以向心力为 $F_1=\dfrac{mv^2}{\rho}=\dfrac{70\times 200^2}{5\,000}=560(\mathrm{N})$.

座椅对飞行员的反力 F 等于飞行员的离心力及飞行员本身的重量对座椅的压力之和,因此

$$F=mg+F_1=70\times 9.8+560=1\,246(\mathrm{N}).$$

8. 汽车连同载重共 5 t,在抛物线拱桥上行驶,速度为 21.6 km/h,桥的跨度为 10 m,拱的矢高为 0.25 m(图 3-14).求汽车越过桥顶时对桥的压力.

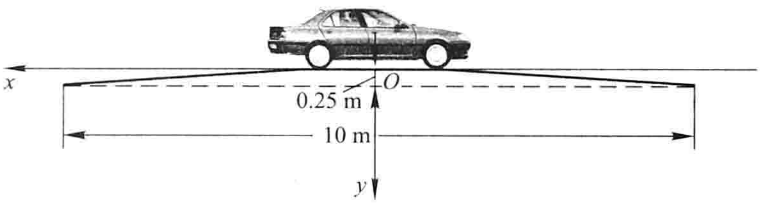


图 3-14

解　设立直角坐标系如图 3-14 所示,设抛物线拱桥方程为

$$y=ax^2.$$

由于抛物线过点(5,0.25),代入方程得 $a=\left.\dfrac{y}{x^2}\right|_{(5,0.25)}=\dfrac{0.25}{25}=0.01.$

$$y'=2ax,\quad y''=2a,$$

因此

$$y'\Big|_{x=0}=0,y''\Big|_{x=0}=0.02,$$

$$\rho\Big|_{x=0}=\frac{1}{K}\Big|_{x=0}=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}\Big|_{x=0}=50.$$

汽车越过桥顶点时对桥的压力为

$$F=mg-\frac{mv^2}{\rho}=5\times 10^3\times 9.8-\frac{5\times 10^3\times\left(\dfrac{21.6\times 10^3}{3\,600}\right)^2}{50}=45\,400(\mathrm{N}).$$

*9. 求曲线 $y=\ln x$ 在与 x 轴交点处的曲率圆方程.

解　解方程组 $\begin{cases}y=\ln x,\\ y=0,\end{cases}$ 得曲线与 x 轴的交点为(1,0).

$$y'=\frac{1}{x},y''=-\frac{1}{x^2},\quad 故\ y'|_{x=1}=1,y''\Big|_{x=1}=-1.$$

设曲线在点(1,0)处的曲率中心为(α,β),则

$$\alpha=\left[x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}\right]_{(1,0)}=1-\frac{1\cdot(1+1^2)}{-1}=3,$$

$$\beta=\left[y+\frac{1+y'^2}{y''}\right]_{(1,0)}=0+\frac{1+1^2}{-1}=-2.$$

曲率半径

$$\rho=\frac{1}{K}\bigg|_{x=1}=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}\bigg|_{x=1}=\frac{(1+1^2)^{\frac{3}{2}}}{1}=\sqrt{8},$$

因此所求的曲率圆方程为$(\xi-3)^2+(\eta+2)^2=8$.

*10. 求曲线 $y=\tan x$ 在点$\left(\frac{\pi}{4},1\right)$处的曲率圆方程.

解　$y'=\sec^2x, y''=2\sec^2x\tan x$,故 $y'|_{x=\frac{\pi}{4}}=2, y''|_{x=\frac{\pi}{4}}=4$.

设曲线在点$\left(\frac{\pi}{4},1\right)$处的曲率中心的坐标为$(\alpha,\beta)$,则

$$\alpha=\left[x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}\right]_{\left(\frac{\pi}{4},1\right)}=\frac{\pi}{4}-\frac{2(1+4)}{4}=\frac{\pi-10}{4},$$

$$\beta=\left[y+\frac{1+y'^2}{y''}\right]_{\left(\frac{\pi}{4},1\right)}=1+\frac{1+4}{4}=\frac{9}{4}.$$

曲率半径

$$\rho=\frac{1}{K}\bigg|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}\bigg|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{5^{\frac{3}{2}}}{4},$$

因此所求的曲率圆方程为$\left(\xi-\frac{\pi-10}{4}\right)^2+\left(\eta-\frac{9}{4}\right)^2=\frac{125}{16}$.

*11. 求抛物线 $y^2=2px$ 的渐屈线方程.

解　由 $2yy'=2p$,及 $y'^2+yy''=0$ 知 $y'=\frac{p}{y}, y''=-\frac{p^2}{y^3}$.

故抛物线 $y^2=2px$ 的渐屈线方程为

$$\begin{cases}\alpha=x-\dfrac{y'(1+y'^2)}{y''}=x-\dfrac{\frac{p}{y}\left[1+\left(\frac{p}{y}\right)^2\right]}{-\frac{p^2}{y^3}}=\dfrac{3y^2}{2p}+p,\\[2em] \beta=y+\dfrac{1+y'^2}{y''}=y+\dfrac{1+\left(\frac{p}{y}\right)^2}{-\frac{p^2}{y^3}}=-\dfrac{y^3}{p^2},\end{cases}$$

其中 y 为参数,消去参数 y 得渐屈线方程为

$$27p\beta^2=8(\alpha-p)^3.$$

习题 3-8　方程的近似解

1. 试证明方程 $x^3-3x^2+6x-1=0$ 在区间$(0,1)$内有惟一的实根,并用二分法求这个根的近似值,使误差不超过 0.01.

解　设函数 $f(x)=x^3-3x^2+6x-1$,$f(x)$在$[0,1]$上连续,且 $f(0)=-1<0$,

$f(1)=3>0$. 由零点定理知至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)=0$，即方程 $x^3-3x^2+6x-1=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

又 $f'(x)=3x^2-6x+6=3(x-1)^2+3>0$，故函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调增加，从而方程 $f(x)=0$，即 $x^3-3x^2+6x-1=0$ 在 $(0,1)$ 内至多有一个实根. 因此方程 $x^3-3x^2+6x-1=0$ 在 $(0,1)$ 内有惟一的实根.

现用二分法求这个实根的近似值：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_n	0	0	0	0.125	0.125	0.157	0.173	0.180	0.180	0.182	0.183
b_n	1	0.5	0.25	0.25	0.188	0.188	0.188	0.188	0.184	0.184	0.184
中点 x_n	0.5	0.25	0.125	0.188	0.157	0.173	0.180	0.184	0.182	0.183	0.183
$f(x_n)$的符号	+	+	−	+	−	−	−	+	−	+	+

故使误差不超过 0.01 的根的近似值为 $\xi=0.183$.

2. 试证明方程 $x^5+5x+1=0$ 在区间 $(-1,0)$ 内有惟一的实根，并用切线法求这个根的近似值，使误差不超过 0.01.

解　设函数 $f(x)=x^5+5x+1$. $f(x)$ 在 $[-1,0]$ 上连续，且 $f(-1)=-5<0$，$f(0)=1>0$. 由零点定理知至少存在一点 $\xi\in(-1,0)$，使 $f(\xi)=0$ 即方程 $x^5+5x+1=0$ 在区间 $(-1,0)$ 内至少有一实根.

又 $f'(x)=5x^4+5>0$，故函数 $f(x)$ 在 $[-1,0]$ 上单调增加，从而方程 $f(x)=0$ 即 $x^5+5x+1=0$ 在 $(-1,0)$ 内至多有一个实根，因此方程 $x^5+5x+1=0$ 在区间 $(-1,0)$ 内有惟一的实根.

现用切线法求这个实根的近似值：

由 $f''(x)=20x^3$，$f''(-1)=-20<0$ 知取 $x_0=-1$，利用递推公式 $x_n=x_{n-1}-\dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$，得：

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=-1-\frac{f(-1)}{f'(-1)}=-0.5,$$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=-0.5-\frac{f(-0.5)}{f'(-0.5)}\approx-0.21,$$

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}=-0.21-\frac{f(-0.21)}{f'(-0.21)}\approx-0.20,$$

$$x_4=x_3-\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}=-0.20-\frac{f(-0.20)}{f'(-0.20)}\approx-0.20.$$

故使误差不超过 0.01 的根的近似值为 $\xi=-0.20$.

3. 用割线法求方程 $x^3+3x-1=0$ 的近似根，使误差不超过 0.01.

解　设 $f(x)=x^3+3x-1$，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=-1<0$，$f(1)=3>0$，由零点定理知至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)=0$；又 $f'(x)=3x^2+3>0$，故 $f(x)$ 在

$[0,1]$上单调增加,从而方程$f(x)=0$在$(0,1)$内有惟一实根.

现用割线法求这个根的近似值:

由$f''(x)=6x, f''(1)=6>0$知取$x_0=1$. 又取$x_1=0.8$,利用递推公式$x_{n+1}=x_n-\dfrac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}\cdot f(x_n)$,得:

$$x_2=x_1-\frac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)}\cdot f(x_1)=0.8-\frac{0.8-1}{f(0.8)-f(1)}\cdot f(0.8)$$
$$\approx 0.449,$$

$$x_3=x_2-\frac{x_2-x_1}{f(x_2)-f(x_1)}\cdot f(x_2)=0.449-\frac{0.449-0.8}{f(0.449)-f(0.8)}\cdot f(0.449)$$
$$\approx 0.345,$$

$$x_4=x_3-\frac{x_3-x_2}{f(x_3)-f(x_2)}\cdot f(x_3)=0.345-\frac{0.345-0.449}{f(0.345)-f(0.449)}\cdot f(0.345)$$
$$\approx 0.323,$$

$$x_5=x_4-\frac{x_4-x_3}{f(x_4)-f(x_3)}\cdot f(x_4)=0.323-\frac{0.323-0.345}{f(0.323)-f(0.345)}\cdot f(0.323)$$
$$\approx 0.322.$$

至此,计算无需再继续,因x_4与x_5的前两位小数相同,故以0.32作为根的近似值,其误差小于0.01.

4. 求方程$x\lg x=1$的近似根,使误差不超过0.01.

解　设函数$f(x)=x\lg x-1$. $f(x)$在$[1,3]$上连续,且

$$f(1)=-1<0,\quad f(3)=3\lg 3-1>0,$$

由零点定理知至少存在一点$\xi\in(1,3)$,使$f(\xi)=0$,即方程$x\lg x=1$在区间$(1,3)$内至少有一实根.

又$f'(x)=\lg x+x\cdot\dfrac{1}{x\ln 10}=\lg x+\dfrac{1}{\ln 10}>0\ (x\geqslant 1)$,故函数$f(x)$在$[1,3]$上单调增加,从而方程$f(x)=0$,即$x\lg x=1$在$(1,3)$内至多有一个实根,因此方程$x\lg x=1$在$(1,3)$内有惟一的实根.

现用二分法求这个根的近似值:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	1	2	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50
b_n	3	3	3	2.75	2.63	2.57	2.53	2.52	2.51
中点 x_n	2	2.50	2.75	2.63	2.57	2.53	2.52	2.51	2.51
$f(x_n)$的符号	−	−	+	+	+	+	+	+	+

故误差不超过0.01的根的近似值为$\xi=2.51$.

总习题三

1. 填空：

设常数 $k>0$，函数 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内零点的个数为________.

解　$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}=\frac{e-x}{xe}$，令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=e$.

当 $0<x<e$ 时，$f'(x)>0$，故函数 $f(x)$ 在 $(0,e]$ 上单调增加；当 $e<x<+\infty$ 时，$f'(x)<0$，故函数 $f(x)$ 在 $[e,+\infty)$ 上单调减少. 从而 $x=e$ 为函数 $f(x)$ 的极大值点. 由于驻点惟一，极大值也是最大值且最大值 $f(e)=k>0$. 又

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty,$$

故曲线 $y=\ln x-\frac{x}{e}+k$ 与 x 轴有两个交点，因此函数 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内的零点的个数为 2.

2. 以下两题中给出了四个结论，从中选出一个正确的结论：

(1) 设在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$，则 $f'(0)$，$f'(1)$，$f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 几个数的大小顺序为(　　).

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$　　(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　　(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

(2) 设 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)>0$，则(　　).

(A) $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值　　(B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(C) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值　　(D) $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

解　(1) 由拉格朗日中值定理知 $f(1)-f(0)=f'(\xi)$，其中 $\xi\in(0,1)$. 由于 $f''(x)>0$，$f'(x)$ 单调增加，故 $f'(0)<f'(\xi)<f'(1)$. 即

$$f'(0)<f(1)-f(0)<f'(1).$$

因此应填(B).

(2) 解法一　取 $f(x)=x^3$，$f'(x)=3x^2$，$f''(x)=6x$，$f'''(x)=6>0$，$x_0=0$，符合题意，但明显排除(A)、(B)、(C). 因此应填(D).

解法二　由已知条件及 $f'''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{x-x_0}>0$ 知，在 x_0 某邻域内，当 $x<x_0$ 时，$f''(x)<0$；当 $x>x_0$ 时，$f''(x)>0$，所以 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

由此可知，在 x_0 的某去心邻域内有 $f'(x)>f'(x_0)=0$，所以 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是单调增加的，从而 $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值. 再由已知条件及极值的第二充分判别

法知，$f'(x_0)$是$f'(x)$的极小值. 综上所述，本题只能选(D).

3. 列举一个函数$f(x)$满足：$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内除某一点外处处可导，但在(a,b)内不存在点ξ，使$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

解　取$f(x)=|x|$，区间为$[-1,1]$. 函数$f(x)$在$[-1,1]$上连续，在$(-1,1)$内除点$x=0$外处处可导，但$f(x)$在$(-1,1)$内不存在点ξ，使$f'(\xi)=0$，即不存在$\xi\in(-1,1)$，使$f(1)-f(-1)=f'(\xi)[1-(-1)]$.

4. 设$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=k$，求$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]$.

解　由拉格朗日中值定理知

$$f(x+a)-f(x)=f'(\xi)a,$$

ξ介于x与$x+a$之间，当$x\to\infty$时，$\xi\to\infty$. 故

$$\lim_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]=\lim_{\xi\to\infty}f'(\xi)a=ka.$$

5. 证明多项式$f(x)=x^3-3x+a$在$[0,1]$上不可能有两个零点.

证　假设多项式$f(x)=x^3-3x+a$在$[0,1]$上有两个零点，即存在$x_1,x_2\in[0,1]$，使$f(x_1)=f(x_2)=0$，不妨设$x_1<x_2$.

函数$f(x)$在$[x_1,x_2]$上连续，在(x_1,x_2)内可导，由罗尔定理知至少存在一点$\xi\in(x_1,x_2)\subset(0,1)$，使$f'(\xi)=0$，但$f'(x)=3x^2-3$在$(0,1)$内恒不等于零，故多项式$f(x)=x^3-3x+a$在$[0,1]$上不可能有两个零点.

6. 设$a_0+\dfrac{a_1}{2}+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}=0$，证明多项式$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$在$(0,1)$内至少有一个零点.

证　取函数$F(x)=a_0x+\dfrac{a_1}{2}x^2+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}x^{n+1}$. $F(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$F(0)=0$，$F(1)=a_0+\dfrac{a_1}{2}+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}=0$，由罗尔定理知至少存在一点$\xi\in(0,1)$，使$F'(\xi)=0$，即多项式$f(x)=F'(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$在$(0,1)$内至少有一个零点.

7. 设$f(x)$在$[0,a]$上连续，在$(0,a)$内可导，且$f(a)=0$，证明存在一点$\xi\in(0,a)$，使$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

证　取函数$F(x)=xf(x)$. $F(x)$在$[0,a]$上连续，在$(0,a)$内可导，且$F(0)=0$，$F(a)=af(a)=0$，由罗尔定理知至少存在一点$\xi\in(0,a)$，使

$$F'(\xi)=[xf(x)]'|_{x=\xi}=f(\xi)+\xi f'(\xi)=0.$$

***8.** 设$0<a<b$，函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，试利用柯西中值定理，证明存在一点$\xi\in(a,b)$，使

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}.$$

证　取函数 $F(x)=\ln x$，$f(x)$、$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F'(x)=\dfrac{1}{x}\neq 0, x\in(a,b)$. 由柯西中值定理知至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

即

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{\dfrac{1}{\xi}},$$

亦即 $f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\dfrac{b}{a}$.

9. 设 $f(x)$，$g(x)$ 都是可导函数，且 $|f'(x)|<g'(x)$，证明：当 $x>a$ 时，

$$|f(x)-f(a)|<g(x)-g(a).$$

分析　要证 $x>a$ 时，$|f(x)-f(a)|<g(x)-g(a)$，即要证

$$-[g(x)-g(a)]<f(x)-f(a)<g(x)-g(a),$$

亦即要证

$$f(x)-g(x)<f(a)-g(a),$$
$$f(x)+g(x)>f(a)+g(a).$$

证　取 $F(x)=f(x)-g(x)$，$G(x)=f(x)+g(x)$，$x\in(a,+\infty)$. 由 $|f'(x)|<g'(x)$ 知

$$f'(x)-g'(x)<0,\quad f'(x)+g'(x)>0,$$

故 $F'(x)=f'(x)-g'(x)<0$，$G'(x)=f'(x)+g'(x)>0$，即当 $x>a$ 时函数 $F(x)$ 单调减少，$G(x)$ 单调增加. 因此

$$F(x)<F(a),\quad G(x)>G(a)\ (x>a).$$

从而

$$f(x)-g(x)<f(a)-g(a), f(x)+g(x)>f(a)+g(a)\quad (x>a).$$

即当 $x>a$ 时，$|f(x)-f(a)|<g(x)-g(a)$.

10. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right]$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$；

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\right)/n\right]^{nx}$　(其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$).

解　(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^x(1+\ln x)}{-1+\dfrac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^x\ln x+x^x-1}{x-1}\cdot x$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^x(\ln x+1)\ln x+x^{x-1}+x^x(\ln x+1)}{1}$$

$$=2.$$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)}$，而

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{2}{\pi}+\ln\arctan x}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{-x^2}{1+x^2}\right)=-\frac{2}{\pi},$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x=e^{-\frac{2}{\pi}}$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}[(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})/n]^{nx}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}nx[\ln(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})-\ln n]}$，

而

$$\lim_{x\to\infty}nx[\ln(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})-\ln n]$$

$$=n\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})-\ln n}{\frac{1}{x}}$$

$$=n\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}[a_1^{\frac{1}{x}}\ln a_1+a_2^{\frac{1}{x}}\ln a_2+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\ln a_n]\left(\dfrac{1}{x}\right)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'}$$

$$=n\cdot\frac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)=\ln(a_1a_2\cdots a_n),$$

故 $\lim\limits_{x\to\infty}[(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})/n]^{nx}=a_1a_2\cdots a_n$.

11. 求下列函数在指定的 x_0 处具有指定阶数及余项的泰勒公式：

(1) $f(x)=x^3\ln x, x_0=1, n=4$,拉格朗日余项;

(2) $f(x)=\arctan x, x_0=0, n=3$,佩亚诺余项;

(3) $f(x)=e^{\sin x}, x_0=0, n=3$,佩亚诺余项;

(4) $f(x)=\ln\cos x, x_0=0, n=6$,佩亚诺余项.

解　(1) $f(1)=0, f'(x)=3x^2\ln x+x^2, f'(1)=1$;

$f''(x)=6x\ln x+5x, f''(1)=5; f'''(x)=6\ln x+11, f'''(1)=11$;

$f^{(4)}(x)=\dfrac{6}{x}, f^{(4)}(1)=6; f^{(5)}(x)=-\dfrac{6}{x^2}, f^{(5)}(\xi)=-\dfrac{6}{\xi^2}$,

因此,

$$x^3\ln x=(x-1)+\frac{5}{2!}(x-1)^2+\frac{11}{3!}(x-1)^3+\frac{6}{4!}(x-1)^4-\frac{6}{5!\xi^2}(x-1)^5,$$

其中 ξ 介于 1 和 x 之间.

(2) $f(0)=0, f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}, f'(0)=1; f''(x)=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}, f''(0)=0; f'''(x)=-\dfrac{2(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}, f'''(0)=-2$;

因此,

$$\arctan x=x-\frac{x^2}{3}+o(x^4).$$

注:也可用下列方法求 $y=\arctan x$ 在 $x=0$ 处的导数.

对 $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$,即$(1+x^2)y'=1$,求 n 阶导数:

$$(1+x^2)y^{(n+1)}+2nxy^{(n)}+n(n-1)y^{(n-1)}=0,$$

令 $x=0$ 得

$$y^{(n+1)}(0)=-n(n-1)y^{(n-1)}(0),$$

由 $y''(0)=0, y'(0)=1$ 得

$$y^{(2m)}(0)=0,$$

$$y^{(2m+1)}(0)=-2m(2m-1)y^{(2m-1)}(0)=(-1)(2m)!.$$

(3) $e^{\sin x}=1+\sin x+\dfrac{1}{2!}\sin^2 x+\dfrac{1}{3!}\sin^3 x+o(x^3)$,又,$\sin x=x-\dfrac{1}{3!}x^3+o(x^4)$,故

$$e^{\sin x}=1+\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)=1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3).$$

(4) $\ln\cos x=\ln[1+(\cos x-1)]=\cos x-1-\dfrac{1}{2}(\cos x-1)^2+\dfrac{1}{3}(\cos x-1)^3+o(x^6)$,又,$\cos x-1=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{24}x^4-\dfrac{1}{720}x^6+o(x^7)$,因此,

$$\ln\cos x=\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{24}x^6\right)+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{8}x^6\right)+o(x^6)$$

$$=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+o(x^6).$$

12. 证明下列不等式:

(1) 当 $0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$ 时,$\frac{\tan x_2}{\tan x_1}>\frac{x_2}{x_1}$;

(2) 当 $x>0$ 时,$\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x}$;

(3) 当 $e<a<b<e^2$ 时,$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$.

证 (1) 取函数 $f(x)=\frac{\tan x}{x}$,$0<x<\frac{\pi}{2}$.

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时,

$$f'(x)=\frac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2}>0(x\sec^2 x-\tan x>x-\tan x>0)$$

故 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加,因此,当 $0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$ 时,

$$f(x_2)>f(x_1),$$

即

$$\frac{\tan x_2}{x_2}>\frac{\tan x_1}{x_1},$$

亦即

$$\frac{\tan x_2}{\tan x_1}>\frac{x_2}{x_1}.$$

(2) 取函数 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x(x>0)$.

当 $x>0$ 时,

$$f'(x)=\ln(1+x)+1-\frac{1}{1+x^2}>0,$$

故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加,因此,当 $x>0$ 时,

$$f(x)>f(0),$$

即 $(1+x)\ln(1+x)-\arctan x>0$,亦即

$$\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x}.$$

(3) 设 $f(x)=\ln^2 x(e<a<x<b<e^2)$.

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,由拉格朗日中值定理知,至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使

$$\ln^2 b - \ln^2 a = \frac{2\ln \xi}{\xi}(b-a).$$

设 $\varphi(t) = \frac{\ln t}{t}$,则 $\varphi'(t) = \frac{1-\ln t}{t^2}$. 当 $t > e$ 时,$\varphi'(t) < 0$,所以 $\varphi(t)$ 在$[e, +\infty)$上单调减少,而 $e < a < \xi < b < e^2$,从而 $\varphi(\xi) > \varphi(e^2)$,即

$$\frac{\ln \xi}{\xi} > \frac{\ln e^2}{e^2} = \frac{2}{e^2},$$

因此,$\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$.

13. 设 $a > 1$,$f(x) = a^x - ax$ 在$(-\infty, +\infty)$内的驻点为 $x(a)$. 问 a 为何值时,$x(a)$最小? 并求出最小值.

解　由 $f'(x) = a^x \ln a - a = 0$,得惟一驻点

$$x(a) = 1 - \frac{\ln \ln a}{\ln a}.$$

考察函数 $x(a) = 1 - \frac{\ln \ln a}{\ln a}$在 $a > 1$ 时的最小值. 令

$$x'(a) = -\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{a}\ln\ln a}{(\ln a)^2} = -\frac{1 - \ln\ln a}{a(\ln a)^2} = 0,$$

得惟一驻点,$a = e^e$. 当 $a > e^e$ 时,$x'(a) > 0$;当 $a < e^e$ 时,$x'(a) < 0$,因此

$$x(e^e) = 1 - \frac{1}{e}$$

为极小值,也是最小值.

14. 求椭圆 $x^2 - xy + y^2 = 3$ 上纵坐标最大和最小的点.

解　在椭圆方程两端分别对 x 求导,得

$$2x - y - xy' + 2yy' = 0,$$

$$y' = \frac{y - 2x}{2y - x}.$$

令 $y' = 0$,得 $y = 2x$. 将 $y = 2x$ 代入椭圆方程后得 $x^2 = 1$,故 $x = \pm 1$. 从而得到椭圆上的点$(1,2)$,$(-1,-2)$. 根据题意即知点$(1,2)$,$(-1,-2)$为椭圆$x^2 - xy + y^2 = 3$上纵坐标最大和最小的点.

15. 求数列$\{\sqrt[n]{n}\}$的最大项.

解　取函数 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ $(x > 0)$,则

$$f'(x) = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \ln x).$$

令 $f'(x) = 0$,得驻点 $x = e$. 当 $0 < x < e$ 时,$f'(x) > 0$;当 $e < x < +\infty$ 时,$f'(x) < 0$,因此点 $x = e$ 为 $f(x)$的极大值点. 由于驻点惟一,极大值点也是最大值点且最大值为$f(e) = e^{\frac{1}{e}}$.

由 $1 < \sqrt{2}$及 $f(x)$在$(e, +\infty)$内单调减少,知

$$\sqrt[3]{3}>\sqrt[4]{4}>\cdots>\sqrt[n]{n}>\cdots$$

又 $\max\{\sqrt{2},\sqrt[3]{3}\}=\sqrt[3]{3}$，故数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项为 $\sqrt[3]{3}$.

16. 曲线弧 $y=\sin x(0<x<\pi)$ 上哪一点处的曲率半径最小？求出该点处的曲率半径.

解　$y'=\cos x, y''=-\sin x$，曲线 $y=\sin x\ (0<x<\pi)$ 的曲率为

$$K=\frac{|-\sin x|}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^{3/2}},$$

由 $K'=\dfrac{2\cos x(1+\sin^2 x)}{(1+\cos^2 x)^{\frac{5}{2}}}=0$ 知 $x=\dfrac{\pi}{2}$.

当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$K'>0$；当 $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ 时，$K'<0$. 因此 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 为 K 的极大值点. 又驻点惟一，故极大值点也是最大值点，且 K 的最大值为

$$K=\left.\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}\right|_{x=\frac{\pi}{2}}=1.$$

此时曲率半径 $\rho=1$ 最小，故曲线弧 $y=\sin x(0<x<\pi)$ 上点 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处的曲率半径最小且曲率半径为 $\rho=1$.

17. 证明方程 $x^3-5x-2=0$ 只有一个正根，并求此正根的近似值，精确到 10^{-3}.

证　取函数 $f(x)=x^3-5x-2, f'(x)=3x^2-5$.

令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=\sqrt{\dfrac{5}{3}}$.

当 $0<x<\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $\left[0,\sqrt{\dfrac{5}{3}}\right]$ 上单调减少，又

$$f(0)=-2<0, f\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)=\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{3}{2}}-5\sqrt{\frac{5}{3}}-2<0.$$

因此方程 $f(x)=0$ 即 $x^3-5x-2=0$ 在 $\left(0,\sqrt{\dfrac{5}{3}}\right)$ 内没有实根.

当 $\sqrt{\dfrac{5}{3}}<x<+\infty$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $\left[\sqrt{\dfrac{5}{3}},+\infty\right)$ 上单调增加，因此方程 $f(x)=0$ 在 $\left[\sqrt{\dfrac{5}{3}},+\infty\right)$ 上至多有一实根，又 $f(3)=10>0$，由零点定理知至少存在一点 $\xi\in\left(\sqrt{\dfrac{5}{3}},3\right)$，使 $f(\xi)=0$，即方程 $f(x)=0$ 亦即 $x^3-5x-2=0$ 在 $\left(\sqrt{\dfrac{5}{3}},3\right)$ 内至少有一实根，因此方程 $x^3-5x-2=0$ 在 $\left(\sqrt{\dfrac{5}{3}},3\right)$ 内只有一正根.

综上，方程 $x^3-5x-2=0$ 只有一个正根.

现在用二分法来求该方程正根的近似值,由 $f(2)=-4<0$,为了方便起见,取区间 $[2,3]$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_n	2	2	2.25	2.375	2.375	2.406	2.406	2.414	2.414	2.414	2.414
b_n	3	2.5	2.5	2.5	2.438	2.438	2.422	2.422	2.418	2.416	2.415
中点 x_n	2.5	2.25	2.375	2.438	2.406	2.422	2.414	2.418	2.416	2.415	2.415
$f(x_n)$ 的符号	+	−	−	+	−	+	−	+	+	+	+

故误差不超过 10^{-3} 的正根的近似值为 $\xi=2.415$.

* **18.** 设 $f''(x_0)$ 存在,证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0).$$

证 $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}+\frac{f'(x_0-h)-f'(x_0)}{-h}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[f''(x_0)+f''(x_0)]$$

$$=f''(x_0).$$

19. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导,且 $f''(x)\geqslant 0$. 证明对于 (a,b) 内任意两点 x_1,x_2 及 $0\leqslant t\leqslant 1$,有

$$f[(1-t)x_1+tx_2]\leqslant(1-t)f(x_1)+tf(x_2).$$

证 由 $x_1,x_2\in(a,b)$ 知 $x_0=(1-t)x_1+tx_2\in(a,b)$,利用泰勒公式有

$$f(x_1)=f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi_1)(x_1-x_0)^2,\ \xi_1 \text{ 介于 } x_1 \text{ 与 } x_0 \text{ 之间};$$

$$f(x_2)=f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi_2)(x_2-x_0)^2,\ \xi_2 \text{ 介于 } x_2 \text{ 与 } x_0 \text{ 之间}.$$

由 $f''(x)\geqslant 0$ 知 $f''(\xi_1)\geqslant 0$, $f''(\xi_2)\geqslant 0$,故

$$f(x_1)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0) \text{ 及 } f(x_2)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0),$$

因此,

$$\begin{aligned}&(1-t)f(x_1)+tf(x_2)\\ \geqslant&(1-t)f(x_0)+tf(x_0)+f'(x_0)[(1-t)(x_1-x_0)+t(x_2-x_0)]\\ =&f(x_0)+f'(x_0)[(1-t)x_1+tx_2-x_0]=f(x_0),\end{aligned}$$

即 $f[(1-t)x_1+tx_2]\leqslant(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$.

20. 试确定常数 a 和 b;使 $f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$ 为当 $x\to 0$ 时关于 x 的 5 阶无穷小.

解 利用泰勒公式

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x - a\sin x - \frac{b}{2}\sin 2x \\
&= x - a\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right] - \frac{b}{2}\left[2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} + o(x^5)\right] \\
&= (1 - a - b)x + \left(\frac{a}{6} + \frac{2b}{3}\right)x^3 - \left(\frac{a}{120} + \frac{2b}{15}\right)x^5 + o(x^5).
\end{aligned}
$$

按题意,应有

$$
\begin{cases}
1 - a - b = 0, \\
\dfrac{a}{6} + \dfrac{2b}{3} = 0, \\
\dfrac{a}{120} + \dfrac{2b}{15} \neq 0,
\end{cases}
$$

得 $a = \frac{4}{3}, b = -\frac{1}{3}$. 因此,当 $a = \frac{4}{3}, b = -\frac{1}{3}$ 时,$f(x) = x - (a + b\cos x)\sin x$ 是 $x \to 0$ 时关于 x 的 5 阶无穷小.

第四章

不定积分

习题 4－1　不定积分的概念与性质

1. 利用导数验证下列等式：

(1) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$；

(2) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$；

(3) $\int \frac{2x}{(x^2+1)(x+1)^2}\mathrm{d}x = \arctan x+\frac{1}{x+1}+C$；

(4) $\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\tan x+\sec x|+C$；

(5) $\int x\cos x\mathrm{d}x = x\sin x+\cos x+C$；

(6) $\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)+C$.

解　(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C] = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

(2) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C\right) = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\cdot x-\sqrt{x^2-1}}{x^2} = \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}.$$

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan x+\frac{1}{x+1}+C\right) = \frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)(x+1)^2}$.

(4) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln|\tan x+\sec x|+C) = \frac{1}{\tan x+\sec x}\cdot(\sec^2x+\sec x\tan x) = \sec x$.

(5) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\sin x+\cos x+C) = \sin x+x\cos x-\sin x = x\cos x$.

(6) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)+C\right] = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)+\frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\cos x+\sin x) = \mathrm{e}^x\sin x.$$

2. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$；　　　　(2) $\int x\sqrt{x}\mathrm{d}x$；

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$;　　(4) $\int x^2 \sqrt[3]{x} dx$;

(5) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x}}$;　　(6) $\int \sqrt[m]{x^n} dx$;

(7) $\int 5x^3 dx$;　　(8) $\int (x^2 - 3x + 2) dx$;

(9) $\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}}$($g$ 是常数);　　(10) $\int (x^2 + 1)^2 dx$;

(11) $\int (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x^3} - 1) dx$;　　(12) $\int \frac{(1 - x)^2}{\sqrt{x}} dx$;

(13) $\int \left(2e^x + \frac{3}{x}\right) dx$;　　(14) $\int \left(\frac{3}{1 + x^2} - \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}\right) dx$;

(15) $\int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right) dx$;　　(16) $\int 3^x e^x dx$;

(17) $\int \frac{2 \cdot 3^x - 5 \cdot 2^x}{3^x} dx$;　　(18) $\int \sec x(\sec x - \tan x) dx$;

(19) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$;　　(20) $\int \frac{dx}{1 + \cos 2x}$;

(21) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$;　　(22) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$;

(23) $\int \cot^2 x dx$;　　(24) $\int \cos \theta(\tan \theta + \sec \theta) d\theta$;

(25) $\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$;　　(26) $\int \frac{3x^4 + 2x^2}{x^2 + 1} dx$.

解 (1) $\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + C = -\frac{1}{x} + C$.

(2) $\int x\sqrt{x} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{\frac{3}{2} + 1} x^{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C$.

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{-\frac{1}{2} + 1} x^{-\frac{1}{2}+1} + C = 2\sqrt{x} + C$.

(4) $\int x^2 \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{7}{3}} dx = \frac{1}{\frac{7}{3} + 1} x^{\frac{7}{3}+1} + C = \frac{3}{10} x^{\frac{10}{3}} + C$.

(5) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x}} = \int x^{-\frac{5}{2}} dx = \frac{1}{-\frac{5}{2} + 1} x^{-\frac{5}{2}+1} + C = -\frac{2}{3} x^{-\frac{3}{2}} + C$.

(6) $\int \sqrt[m]{x^n}\,dx = \dfrac{1}{\dfrac{n}{m}+1} x^{\frac{n}{m}+1} + C = \dfrac{m}{m+n} x^{\frac{m+n}{m}} + C.$

(7) $\int 5x^3\,dx = \dfrac{5}{3+1}x^{3+1} + C = \dfrac{5}{4}x^4 + C.$

(8) $\int (x^2 - 3x + 2)\,dx = \int x^2\,dx - 3\int x\,dx + 2\int dx = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x + C.$

(9) $\int \dfrac{dh}{\sqrt{2gh}} = \dfrac{1}{\sqrt{2g}}\int h^{-\frac{1}{2}}\,dh = \dfrac{1}{\sqrt{2g}} \times 2\sqrt{h} + C = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} + C.$

(10) $$\int (x^2+1)^2\,dx = \int (x^4 + 2x^2 + 1)\,dx = \int x^4\,dx + 2\int x^2\,dx + \int dx$$
$$= \frac{x^5}{5} + \frac{2}{3}x^3 + x + C.$$

(11) $$\int (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x^3}-1)\,dx = \int (x^2 + x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} - 1)\,dx$$
$$= \int x^2\,dx + \int x^{\frac{3}{2}}\,dx - \int x^{\frac{1}{2}}\,dx - \int dx$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x + C.$$

(12) $$\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}\,dx = \int (x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})\,dx$$
$$= \int x^{\frac{3}{2}}\,dx - 2\int x^{\frac{1}{2}}\,dx + \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$
$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C.$$

(13) $\int \left(2e^x + \dfrac{3}{x}\right)dx = 2\int e^x\,dx + 3\int \dfrac{dx}{x} = 2e^x + 3\ln|x| + C.$

(14) $$\int \left(\frac{3}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = 3\int \frac{dx}{1+x^2} - 2\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= 3\arctan x - 2\arcsin x + C.$$

(15) $\int e^x\left(1 - \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right)dx = \int e^x\,dx - \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = e^x - 2x^{\frac{1}{2}} + C.$

(16) $\int 3^x e^x\,dx = \int (3e)^x\,dx = \dfrac{(3e)^x}{\ln(3e)} + C = \dfrac{3^x e^x}{\ln 3 + 1} + C.$

(17) $$\int \frac{2\cdot 3^x - 5\cdot 2^x}{3^x}\,dx = 2\int dx - 5\int \left(\frac{2}{3}\right)^x dx = 2x - \frac{5}{\ln\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^x + C$$
$$= 2x - \frac{5}{\ln 2 - \ln 3}\left(\frac{2}{3}\right)^x + C.$$

(18) $\int \sec x(\sec x-\tan x)\mathrm{d}x=\int \sec^2 x\mathrm{d}x-\int \sec x\tan x\mathrm{d}x$

$=\tan x-\sec x+C.$

(19) $\int \cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\int\frac{1+\cos x}{2}\mathrm{d}x=\frac{x+\sin x}{2}+C.$

(20) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos 2x}=\int\frac{\sec^2 x}{2}\mathrm{d}x=\frac{\tan x}{2}+C.$

(21) $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x=\sin x-\cos x+C.$

(22) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int(\csc^2 x-\sec^2 x)\mathrm{d}x$

$=\int\csc^2 x\mathrm{d}x-\int\sec^2 x\mathrm{d}x=-(\cot x+\tan x)+C.$

(23) $\int\cot^2 x\mathrm{d}x=\int\csc^2 x\mathrm{d}x-\int\mathrm{d}x=-\cot x-x+C.$

(24) $\int\cos\theta(\tan\theta+\sec\theta)\mathrm{d}\theta=\int\sin\theta\mathrm{d}\theta+\int\mathrm{d}\theta=-\cos\theta+\theta+C.$

(25) $\int\frac{x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x=x-\arctan x+C.$

(26) $\int\frac{3x^4+2x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int 3x^2\mathrm{d}x-\int\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x=x^3-x+\arctan x+C.$

3. 含有未知函数的导数的方程称为微分方程,例如方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)$,其中$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$为未知函数的导数,$f(x)$为已知函数.如果将函数 $y=\varphi(x)$代入微分方程,使微分方程成为恒等式,那么函数 $y=\varphi(x)$就称为这个微分方程的解.求下列微分方程满足所给条件的解:

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x-2)^2,y|_{x=2}=0$;

(2) $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{2}{t^3},\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1}=1,x|_{t=1}=1.$

解　(1)

$$y=\int(x-2)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(x-2)^3+C,$$

由 $y|_{x=2}=0$,得 $C=0$,于是所求的解为 $y=\frac{1}{3}(x-2)^3$.

(2)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\int\frac{2}{t^3}\mathrm{d}t=-\frac{1}{t^2}+C_1,$$

由 $\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1}=1$,得 $C_1=2$,故 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{t^2}+2$,

$$x=\int\left(-\frac{1}{t^2}+2\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{t}+2t+C_2,$$

由 $x|_{t=1}=1$,得 $C_2=-2$,于是所求的解为 $x=\dfrac{1}{t}+2t-2$.

4. 汽车以 20 m/s 的速度行驶,刹车后匀减速行驶了 50 m 停住,求刹车加速度.可执行下列步骤:

(1) 求微分方程$\dfrac{d^2s}{dt^2}=-k$ 满足条件$\left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t=0}=20$ 及 $s|_{t=0}=0$ 的解;

(2) 求使$\dfrac{ds}{dt}=0$ 的 t 值;

(3) 求使 $s=50$ 的 k 值.

解　(1)
$$\frac{ds}{dt}=\int -k\mathrm{d}t=-kt+C_1,$$

由$\left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t=0}=20$,得 $C_1=20$,故

$$\frac{ds}{dt}=-kt+20,$$

$$s=\int(-kt+20)\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}kt^2+20t+C_2,$$

由 $s|_{t=0}=0$,得 $C_2=0$,于是所求的解为

$$s=-\frac{1}{2}kt^2+20t.$$

(2) 令$\dfrac{ds}{dt}=0$,解得 $t=\dfrac{20}{k}$.

(3) 根据题意,当 $t=\dfrac{20}{k}$时,$s=50$,即

$$-\frac{1}{2}k\left(\frac{20}{k}\right)^2+\frac{400}{k}=50,$$

解得 $k=4$,即得刹车加速度为 $-4\ \mathrm{m/s^2}$.

5. 一曲线通过点$(e^2,3)$,且在任一点处的切线的斜率等于该点横坐标的倒数,求该曲线的方程.

解　设曲线方程为 $y=f(x)$,则点(x,y)处的切线斜率为$f'(x)$,由条件得

$$f'(x)=\frac{1}{x},$$

因此 $f(x)$为$\dfrac{1}{x}$的一个原函数,故有 $f(x)=\displaystyle\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$.

又,根据条件曲线过点$(e^2,3)$,有 $f(e^2)=3$ 解得 $C=1$,即得所求曲线方程为

$$y=\ln x+1.$$

6. 一物体由静止开始运动,经 t 秒后的速度是 $3t^2$(m/s),问

(1) 在 3 秒后物体离开出发点的距离是多少?

(2) 物体走完 360 m 需要多少时间?

解 (1) 设此物体自原点沿横轴正向由静止开始运动,位移函数为 $s=s(t)$,则

$$s(t)=\int v(t)\mathrm{d}t=\int 3t^2\mathrm{d}t=t^3+C,$$

由假设可知 $s(0)=0$,故 $s(t)=t^3$,于是所求距离为 $s(3)=27(\mathrm{m})$.

(2) 由 $t^3=360$,得 $t=\sqrt[3]{360}\approx 7.11(\mathrm{s})$.

7. 证明函数 $\arcsin(2x-1)$,$\arccos(1-2x)$ 和 $2\arctan\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ 都是 $\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ 的原函数.

证 $$[\arcsin(2x-1)]'=\frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}\cdot 2=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}},$$

$$[\arccos(1-2x)]'=-\frac{1}{\sqrt{1-(1-2x)^2}}\cdot(-2)=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}},$$

$$\left(2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)'=2\frac{1}{1+\dfrac{x}{1-x}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{x}}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}.$$

故结论成立.

习题 4-2 换元积分法

1. 在下列各式等号右端的空白处填入适当的系数,使等式成立(例如:$\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\mathrm{d}(4x+7)$):

(1) $\mathrm{d}x=\_\_\mathrm{d}(ax)$; (2) $\mathrm{d}x=\_\_\mathrm{d}(7x-3)$;

(3) $x\mathrm{d}x=\_\_\mathrm{d}(x^2)$; (4) $x\mathrm{d}x=\_\_\mathrm{d}(5x^2)$;

(5) $x\mathrm{d}x=\_\_\mathrm{d}(1-x^2)$; (6) $x^3\mathrm{d}x=\_\_\mathrm{d}(3x^4-2)$;

(7) $\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\_\_\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x})$; (8) $\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\_\_\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}})$;

(9) $\sin\dfrac{3}{2}x\mathrm{d}x=\_\_\mathrm{d}(\cos\dfrac{3}{2}x)$; (10) $\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\_\_\mathrm{d}(5\ln|x|)$;

(11) $\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\_\_\mathrm{d}(3-5\ln|x|)$; (12) $\dfrac{\mathrm{d}x}{1+9x^2}=\_\_\mathrm{d}(\arctan 3x)$;

(13) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\_\_\mathrm{d}(1-\arcsin x)$; (14) $\dfrac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\_\_\mathrm{d}(\sqrt{1-x^2})$.

解 (1) $\dfrac{1}{a}$; (2) $\dfrac{1}{7}$; (3) $\dfrac{1}{2}$; (4) $\dfrac{1}{10}$; (5) $-\dfrac{1}{2}$;

(6) $\dfrac{1}{12}$; (7) $\dfrac{1}{2}$; (8) -2; (9) $-\dfrac{2}{3}$; (10) $\dfrac{1}{5}$;

(11) $-\frac{1}{5}$;　(12) $\frac{1}{3}$;　(13) -1;　(14) -1.

2. 求下列不定积分(其中 a、b、ω、φ 均为常数):

(1) $\int e^{5t}dt$;　(2) $\int (3-2x)^3dx$;

(3) $\int \frac{dx}{1-2x}$;　(4) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}}$;

(5) $\int (\sin ax - e^{\frac{x}{b}})dx$;　(6) $\int \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$;

(7) $\int xe^{-x^2}dx$;　(8) $\int x\cos(x^2)dx$;

(9) $\int \frac{x}{\sqrt{2-3x^2}}dx$;　(10) $\int \frac{3x^3}{1-x^4}dx$;

(11) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}dx$;　(12) $\int \cos^2(\omega t+\varphi)\sin(\omega t+\varphi)dt$;

(13) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$;　(14) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$;

(15) $\int \tan^{10}x\cdot\sec^2 xdx$;　(16) $\int \frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}$;

(17) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$;　(18) $\int \frac{10^{2\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

(19) $\int \tan\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$;　(20) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$;

(21) $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}dx$;　(22) $\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$;

(23) $\int \frac{\ln\tan x}{\cos x\sin x}dx$;　(24) $\int \cos^3 xdx$;

(25) $\int \cos^2(\omega t+\varphi)dt$;　(26) $\int \sin 2x\cos 3xdx$;

(27) $\int \cos x\cos\frac{x}{2}dx$;　(28) $\int \sin 5x\sin 7xdx$;

(29) $\int \tan^3 x\sec xdx$;　(30) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$;

(31) $\int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}dx$;　(32) $\int \frac{x^3}{9+x^2}dx$;

(33) $\int \frac{dx}{2x^2-1}$;　(34) $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$;

(35) $\int \frac{x}{x^2-x-2}\mathrm{d}x$;

(36) $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}(a>0)$;

(37) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$;

(38) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$;

(39) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\mathrm{d}x$;

(40) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{2x}}$;

(41) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-x^2}}$;

(42) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}$;

(43) $\int \frac{x-1}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$;

(44) $\int \frac{x^3+1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$.

解 (1) 令 $u=5t$,由第一类换元法得

$$\int \mathrm{e}^{5t}\mathrm{d}t=\frac{1}{5}\int \mathrm{e}^{u}\mathrm{d}u=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{u}+C=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{5t}+C.$$

(2) 令 $u=3-2x$,由第一类换元法得

$$\int (3-2x)^3\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int u^3\mathrm{d}u=-\frac{u^4}{8}+C=-\frac{(3-2x)^4}{8}+C.$$

(3) 令 $u=1-2x$,由第一类换元法得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-2x}=-\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u}=-\frac{1}{2}\ln|u|+C=-\frac{1}{2}\ln|1-2x|+C.$$

(4) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{2-3x}}=\int -\frac{1}{3}(2-3x)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}(2-3x)$$
$$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(2-3x)^{\frac{2}{3}}+C=-\frac{1}{2}(2-3x)^{\frac{2}{3}}+C.$$

(5) $$\int (\sin ax-\mathrm{e}^{\frac{x}{b}})\mathrm{d}x=\int \sin ax\mathrm{d}x-\int \mathrm{e}^{\frac{x}{b}}\mathrm{d}x$$
$$=\int \frac{1}{a}\sin ax\mathrm{d}(ax)-\int b\mathrm{e}^{\frac{x}{b}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{b}\right)$$
$$=\frac{1}{a}(-\cos ax)-b\mathrm{e}^{\frac{x}{b}}+C=-\frac{\cos ax}{a}-b\mathrm{e}^{\frac{x}{b}}+C.$$

(6) $$\int \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\int 2\sin\sqrt{t}\mathrm{d}\sqrt{t}=-2\cos\sqrt{t}+C.$$

(7) $$\int x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}(-x^2)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}+C.$$

(8) $$\int x\cos(x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \cos(x^2)\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}\sin(x^2)+C.$$

(9) $$\int \frac{x}{\sqrt{2-3x^2}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{6}\int (2-3x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(2-3x^2)$$

$$= -\frac{1}{6}\cdot 2(2-3x^2)^{\frac{1}{2}}+C=-\frac{\sqrt{2-3x^2}}{3}+C.$$

(10) $\int\frac{3x^3}{1-x^4}dx=-\frac{3}{4}\int\frac{1}{1-x^4}d(1-x^4)=-\frac{3}{4}\ln|1-x^4|+C.$

(11) $\int\frac{x+1}{x^2+2x+5}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5}=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)+C.$

(12) $\int\cos^2(\omega t+\varphi)\sin(\omega t+\varphi)dt=-\frac{1}{\omega}\int\cos^2(\omega t+\varphi)d[\cos(\omega t+\varphi)]$

$$=-\frac{1}{3\omega}\cos^3(\omega t+\varphi)+C.$$

(13) $\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx=-\int\frac{1}{\cos^3 x}d(\cos x)=\frac{1}{2\cos^2 x}+C.$

(14) $\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx=\int\frac{d(\sin x-\cos x)}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}=\frac{3}{2}(\sin x-\cos x)^{\frac{2}{3}}+C.$

(15) $\int\tan^{10}x\cdot\sec^2 x dx=\int\tan^{10}x d(\tan x)=\frac{1}{11}\tan^{11}x+C.$

(16) $\int\frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}=\int\frac{d(\ln x)}{\ln x\ln\ln x}=\int\frac{d(\ln\ln x)}{\ln\ln x}=\ln|\ln\ln x|+C.$

(17) $\int\frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{d(\arcsin x)}{(\arcsin x)^2}=-\frac{1}{\arcsin x}+C.$

(18) $\int\frac{10^{2\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int-10^{2\arccos x}d(\arccos x)=-\frac{10^{2\arccos x}}{2\ln 10}+C.$

(19) $\int\tan\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}\int\tan\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}$

$$=\int\tan\sqrt{1+x^2}d(\sqrt{1+x^2})$$

$$=-\ln\left|\cos\sqrt{1+x^2}\right|+C.$$

(20) $\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx=\int\frac{2\arctan\sqrt{x}}{1+x}d\sqrt{x}=\int 2\arctan\sqrt{x}d(\arctan\sqrt{x})$

$$=(\arctan\sqrt{x})^2+C.$$

(21) $\int\frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}dx=\int\frac{d(x\ln x)}{(x\ln x)^2}=-\frac{1}{x\ln x}+C.$

(22) $\int\frac{dx}{\sin x\cos x}=\int\csc 2x d(2x)=\ln|\csc 2x-\cot 2x|+C=\ln|\tan x|+C.$

(23) $\int\frac{\ln\tan x}{\cos x\sin x}dx=\int\frac{\ln\tan x}{\tan x}d(\tan x)=\int\ln\tan x d(\ln\tan x)$

$$=\frac{(\ln\tan x)^2}{2}+C.$$

(24) $\int \cos^3 x\mathrm{d}x = \int (1-\sin^2 x)\mathrm{d}(\sin x) = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$

(25) $\int \cos^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t = \int \frac{\cos 2(\omega t+\varphi)+1}{2}\mathrm{d}t = \frac{\sin 2(\omega t+\varphi)}{4\omega} + \frac{t}{2} + C.$

(26) $\int \sin 2x\cos 3x\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C.$

(27) $\int \cos x\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\left(\cos\frac{3}{2}x + \cos\frac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{3}\sin\frac{3}{2}x + \sin\frac{1}{2}x + C.$

(28) $\int \sin 5x\sin 7x\mathrm{d}x = \int -\frac{1}{2}(\cos 12x - \cos 2x)\mathrm{d}x$

$= -\frac{1}{24}\sin 12x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

(29) $\int \tan^3 x\sec x\mathrm{d}x = \int (\sec^2 x - 1)\mathrm{d}(\sec x) = \frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C.$

(30) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} = \int \frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+1} = \int \frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^{2x}+1} = \arctan(\mathrm{e}^x) + C.$

(31) $\int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{2x}{3}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{3}\right)^2}} + \frac{1}{8}\int \frac{\mathrm{d}(9-4x^2)}{\sqrt{9-4x^2}}$

$= \frac{\arcsin\frac{2x}{3}}{2} + \frac{\sqrt{9-4x^2}}{4} + C.$

(32) $\int \frac{x^3}{9+x^2}\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}x - \frac{9}{2}\int \frac{\mathrm{d}(9+x^2)}{9+x^2} = \frac{x^2}{2} - \frac{9}{2}\ln(9+x^2) + C.$

(33) $\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2-1} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{\sqrt{2}x-1} - \frac{1}{\sqrt{2}x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-1}{\sqrt{2}x+1}\right| + C.$

(34) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x-2)} = \int \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + C.$

(35) $\int \frac{x}{x^2-x-2}\mathrm{d}x = \int \frac{x}{(x-2)(x+1)}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$

$= \frac{2}{3}\ln|x-2| + \frac{1}{3}\ln|x+1| + C.$

(36) 设 $x = a\sin u\left(-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}\right)$,则$\sqrt{a^2-x^2} = a\cos u$,$\mathrm{d}x = a\cos u\mathrm{d}u$,于是

$$\int \frac{x^2 \mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int a^2 \sin^2 u \mathrm{d}u = a^2 \int \frac{1 - \cos 2u}{2} \mathrm{d}u$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(u - \frac{\sin 2u}{2} \right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + C.$$

(37) 当 $x > 1$ 时,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2 - 1}} \xlongequal{x = \frac{1}{t}} - \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - t^2}} = -\arcsin t + C$$

$$= -\arcsin \frac{1}{x} + C,$$

当 $x < -1$ 时,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2 - 1}} \xlongequal{x = \frac{1}{t}} \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin \frac{1}{x} + C,$$

故在 $(-\infty, -1)$ 或 $(1, +\infty)$ 内,有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2 - 1}} = -\arcsin \frac{1}{|x|} + C.$$

(38) 设 $x = \tan u\left(-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2} \right)$,则 $\sqrt{x^2 + 1} = \sec u$, $\mathrm{d}x = \sec^2 u \mathrm{d}u$,于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}} = \int \cos u \mathrm{d}u = \sin u + C = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} + C.$$

(39) 当 $x > 3$ 时,令 $x = 3\sec u\left(0 \leqslant u < \frac{\pi}{2} \right)$,

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} \mathrm{d}x = \int 3\tan^2 u \mathrm{d}u = 3\int (\sec^2 u - 1) \mathrm{d}u = 3\tan u - 3u + C$$

$$= \sqrt{x^2 - 9} - 3\arccos \frac{3}{x} + C;$$

当 $x < -3$ 时,令 $x = 3\sec u\left(\frac{\pi}{2} < u \leqslant \pi \right)$,

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} \mathrm{d}x = -\int 3\tan^2 u \mathrm{d}u = -3\int (\sec^2 u - 1) \mathrm{d}u = -3\tan u + 3u + C'$$

$$= \sqrt{x^2 - 9} + 3\arccos \frac{3}{x} + C'$$

$$= \sqrt{x^2 - 9} - 3\arccos \frac{3}{-x} + C' + 3\pi,$$

故可统一写作 $\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\mathrm{d}x=\sqrt{x^2-9}-3\arccos\frac{3}{|x|}+C.$

(40) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{2x}}\xlongequal{x=\frac{u^2}{2}}\int\frac{u\mathrm{d}u}{1+u}=u-\ln(1+u)+C=\sqrt{2x}-\ln(1+\sqrt{2x})+C.$

(41) 令 $x=\sin t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$,则$\sqrt{1-x^2}=\cos t,\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$,于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{\cos t}{1+\cos t}\mathrm{d}t=\int\frac{2\cos^2\frac{t}{2}-1}{2\cos^2\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=t-\tan\frac{t}{2}+C$$

$$=t-\frac{\sin t}{1+\cos t}+C=\arcsin x-\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}+C.$$

(42) 设 $x=\sin t\left(-\frac{\pi}{4}<t<\frac{\pi}{2}\right)$,则$\sqrt{1-x^2}=\cos t,\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$,于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{\cos t\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t},$$

记 $I_1=\int\frac{\cos t\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t},I_2=\int\frac{\sin t\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t}$,利用

$$I_1+I_2=\int\mathrm{d}t=t+C,$$

$$I_1-I_2=\int\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}(\sin t+\cos t)}{\sin t+\cos t}=\ln|\sin t+\cos t|+C,$$

求得

$$I_1=\int\frac{\cos t\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t}=\frac{1}{2}(t+\ln|\sin t+\cos t|)+C,$$

即求得在$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$内,有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}(\arcsin x+\ln|x+\sqrt{1-x^2}|)+C;$$

再设 $x=\sin t\left(-\frac{\pi}{2}<t<-\frac{\pi}{4}\right)$,重复上面的过程,可得在$\left(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$内有与上面不定积分形式相同的结果. 从而在$\left(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$或$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$内,有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}(\arcsin x+\ln|x+\sqrt{1-x^2}|)+C.$$

(43) $\int \frac{x-1}{x^2+2x+3}dx = \int \frac{x+1-2}{(x+1)^2+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d[(x+1)^2+2]}{(x+1)^2+2} - \sqrt{2}\int \frac{d\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) - \sqrt{2}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

(44) 设 $x=\tan t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$,则 $x^2+1=\sec^2 t, dx=\sec^2 t dt$,于是

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+1}{(x^2+1)^2}dx &= \int \frac{\tan^3 t+1}{\sec^2 t}dt\\ &= \int \frac{\cos^2 t-1}{\cos t}d(\cos t) + \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt\\ &= \frac{1}{2}\cos^2 t - \ln\cos t + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t + C\\ &= \frac{1}{2}\cos^2 t - \ln\cos t + \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin t\cos t + C.\end{aligned}$$

按 $\tan t = x$ 作辅助三角形(图 4-1),便有

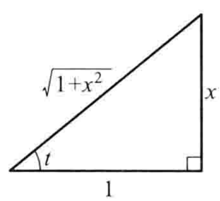


图 4-1

$$\cos t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

于是

$$\int \frac{x^3+1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1+x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\arctan x + C.$$

习题 4-3 分部积分法

求下列不定积分:

1. $\int x\sin x dx$.

2. $\int \ln x dx$.

3. $\int \arcsin x dx$.

4. $\int xe^{-x}dx$.

5. $\int x^2\ln x dx$.

6. $\int e^{-x}\cos x dx$.

7. $\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx.$

8. $\int x\cos\frac{x}{2}dx.$

9. $\int x^2\arctan x dx.$

10. $\int x\tan^2 x dx.$

11. $\int x^2\cos x dx.$

12. $\int te^{-2t}dt.$

13. $\int \ln^2 x dx.$

14. $\int x\sin x\cos x dx.$

15. $\int x^2\cos^2\frac{x}{2}dx.$

16. $\int x\ln(x-1)dx.$

17. $\int (x^2-1)\sin 2x dx.$

18. $\int \frac{\ln^3 x}{x^2}dx.$

19. $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx.$

20. $\int \cos\ln x dx.$

21. $\int (\arcsin x)^2 dx.$

22. $\int e^x\sin^2 x dx.$

23. $\int x\ln^2 x dx.$

24. $\int e^{\sqrt{3x+9}}dx.$

解 1. $$\int x\sin x dx = -\int x d(\cos x) = -x\cos x + \int\cos x dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

2. $$\int \ln x dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C.$$

3. $$\int \arcsin x dx = x\arcsin x - \int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

4. $$\int xe^{-x}dx = -\int x de^{-x} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$$

5. $$\int x^2\ln x dx = \frac{1}{3}\int \ln x d(x^3) = \frac{x^3\ln x}{3} - \frac{1}{3}\int x^3\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^3\ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C.$$

6. $$\begin{aligned}\int e^{-x}\cos x dx &= -\int \cos x d(e^{-x}) = -e^{-x}\cos x + \int e^{-x}(-\sin x)dx\\ &= -e^{-x}\cos x + \int \sin x d(e^{-x})\\ &= -e^{-x}\cos x + e^{-x}\sin x - \int e^{-x}\cos x dx,\end{aligned}$$

故有

$$\int e^{-x}\cos x dx = \frac{e^{-x}(\sin x - \cos x)}{2} + C.$$

7. $$\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx = -\frac{1}{2}\int \sin\frac{x}{2}d(e^{-2x})$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{8}\int\cos\frac{x}{2}d(e^{-2x})$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{8}e^{-2x}\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\int e^{-2x}\cdot\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{8}\left(4\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)e^{-2x} - \frac{1}{16}\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx,$$

故

$$\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx = -\frac{2}{17}\left(4\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)e^{-2x} + C.$$

8. $\int x\cos\frac{x}{2}dx = 2\int xd\left(\sin\frac{x}{2}\right) = 2x\sin\frac{x}{2} - 2\int\sin\frac{x}{2}dx$

$$= 2x\sin\frac{x}{2} + 4\cos\frac{x}{2} + C.$$

9. $\int x^2\arctan x dx = \frac{1}{3}\int\arctan x d(x^3) = \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{3}\int\frac{x^3}{1+x^2}dx$

$$= \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{3}\int\left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + C.$$

10. $\int x\tan^2 x dx = \int x(\sec^2 x - 1)dx = \int xd(\tan x) - \frac{x^2}{2}$

$$= x\tan x + \ln|\cos x| - \frac{x^2}{2} + C.$$

11. $\int x^2\cos x dx = \int x^2 d(\sin x) = x^2\sin x - \int 2x\sin x dx$

$$= x^2\sin x + \int 2xd(\cos x)$$

$$= x^2\sin x + 2x\cos x - \int 2\cos x dx$$

$$= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$$

12. $\int te^{-2t}dt = -\frac{1}{2}\int td(e^{-2t}) = -\frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{2}\int e^{-2t}dt$

$$= -\frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} + C.$$

13. $\int\ln^2 x dx = x\ln^2 x - \int 2\ln x dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + \int 2dx$

$$= x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C.$$

14. $\int x\sin x\cos x\mathrm{d}x = \int -\frac{x}{4}\mathrm{d}(\cos 2x) = -\frac{x\cos 2x}{4} + \frac{1}{4}\int \cos 2x\mathrm{d}x$

$= -\frac{x\cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{8} + C.$

15. $\int x^2\cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int x^2(1+\cos x)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}\int x^2\mathrm{d}(\sin x)$

$= \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\sin x - \int x\sin x\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\sin x + \int x\mathrm{d}(\cos x)$

$= \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\sin x + x\cos x - \int \cos x\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\sin x + x\cos x - \sin x + C.$

16. $\int x\ln(x-1)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \ln(x-1)\mathrm{d}(x^2-1)$

$= \frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x-1) - \frac{1}{2}\int (x+1)\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x-1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + C.$

17. $\int (x^2-1)\sin 2x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int (x^2-1)\mathrm{d}(\cos 2x)$

$= -\frac{1}{2}(x^2-1)\cos 2x + \int x\cos 2x\mathrm{d}x$

$= -\frac{1}{2}(x^2-1)\cos 2x + \frac{1}{2}\int x\mathrm{d}(\sin 2x)$

$= -\frac{1}{2}(x^2-1)\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\mathrm{d}x$

$= -\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{3}{2}\right)\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + C.$

18. $\int \frac{\ln^3 x}{x^2}\mathrm{d}x = \int -\ln^3 x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\ln^3 x}{x} - 3\int \ln^2 x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$

$= -\frac{\ln^3 x}{x} - 3\left[\frac{\ln^2 x}{x} + 2\int \ln x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)\right]$

$= -\frac{\ln^3 x + 3\ln^2 x + 6\ln x + 6}{x} + C.$

19. $\int \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x \xlongequal{x=u^3} \int 3u^2\mathrm{e}^u\mathrm{d}u = \int 3u^2\mathrm{d}(\mathrm{e}^u) = 3u^2\mathrm{e}^u - \int 6u\mathrm{d}(\mathrm{e}^u)$

$= (3u^2-6u+6)\mathrm{e}^u + C = 3\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}(x^{2/3} - 2x^{1/3} + 2) + C.$

20. $\int \cos \ln x \mathrm{d}x \xlongequal{x=\mathrm{e}^u} \int \mathrm{e}^u \cos u \mathrm{d}u$,

而

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^u \cos u\mathrm{d}u &= \int \cos u\mathrm{d}(\mathrm{e}^u) = \mathrm{e}^u\cos u + \int \mathrm{e}^u \sin u\mathrm{d}u\\ &= \mathrm{e}^u\cos u + \int \sin u\mathrm{d}(\mathrm{e}^u)\\ &= \mathrm{e}^u\cos u + \mathrm{e}^u\sin u - \int \mathrm{e}^u\cos u\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

因此 $\int \mathrm{e}^u\cos u\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{e}^u(\cos u+\sin u)}{2}+C$,故有

$$\int \cos \ln x\mathrm{d}x = \frac{x(\cos \ln x + \sin \ln x)}{2}+C.$$

21. $$\begin{aligned}\int (\arcsin x)^2\mathrm{d}x &= x(\arcsin x)^2 - \int \frac{2x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\\ &= x(\arcsin x)^2 + \int 2\arcsin x\mathrm{d}(\sqrt{1-x^2})\\ &= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C.\end{aligned}$$

22. $\int \mathrm{e}^x\sin^2 x\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int \mathrm{e}^x(1-\cos 2x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x - \dfrac{1}{2}\int \mathrm{e}^x\cos 2x\mathrm{d}x$,

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^x\cos 2x\mathrm{d}x &= \int \cos 2x\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x\cos 2x + 2\int \mathrm{e}^x\sin 2x\mathrm{d}x\\ &= \mathrm{e}^x\cos 2x + 2\int \sin 2x\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)\\ &= \mathrm{e}^x\cos 2x + 2\mathrm{e}^x\sin 2x - 4\int \mathrm{e}^x\cos 2x\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

得 $\int \mathrm{e}^x\cos 2x\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^x\cos 2x + 2\mathrm{e}^x\sin 2x}{5}+C$,因此有

$$\int \mathrm{e}^x\sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x - \frac{1}{5}\mathrm{e}^x\sin 2x - \frac{1}{10}\mathrm{e}^x\cos 2x + C.$$

23. $$\begin{aligned}\int x\ln^2 x\mathrm{d}x &= \int \ln^2 x\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int x\ln x\mathrm{d}x\\ &= \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int \ln x\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \int \frac{x}{2}\mathrm{d}x\\ &= \frac{x^2}{4}(2\ln^2 x - 2\ln x + 1) + C.\end{aligned}$$

24. 设 $\sqrt{3x+9}=u$,即 $x=\dfrac{1}{3}(u^2-9)$,$\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}u\mathrm{d}u$,则

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{3x+9}}\mathrm{d}x = \int \frac{2}{3}u\mathrm{e}^u\mathrm{d}u = \int \frac{2}{3}u\mathrm{d}(\mathrm{e}^u)$$

$$=\frac{2}{3}ue^{u}-\int\frac{2}{3}e^{u}du=\frac{2}{3}ue^{u}-\frac{2}{3}e^{u}+C$$

$$=\frac{2}{3}e^{\sqrt{3x+9}}(\sqrt{3x+9}-1)+C.$$

习题4-4　有理函数的积分

求下列不定积分:

1. $\int\frac{x^3}{x+3}dx.$
2. $\int\frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx.$
3. $\int\frac{x+1}{x^2-2x+5}dx.$
4. $\int\frac{dx}{x(x^2+1)}.$
5. $\int\frac{3}{x^3+1}dx.$
6. $\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx.$
7. $\int\frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$
8. $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}dx.$
9. $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}.$
10. $\int\frac{1}{x^4-1}dx.$
11. $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}.$
12. $\int\frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2}dx.$
13. $\int\frac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2}dx.$
14. $\int\frac{dx}{3+\sin^2x}.$
15. $\int\frac{dx}{3+\cos x}.$
16. $\int\frac{dx}{2+\sin x}.$
17. $\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}.$
18. $\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}.$
19. $\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}.$
20. $\int\frac{(\sqrt{x})^3-1}{\sqrt{x}+1}dx.$
21. $\int\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}dx.$
22. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}.$
23. $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}.$
24. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}.$

解　1. $\int\frac{x^3}{x+3}dx=\int\left(x^2-3x+9-\frac{27}{x+3}\right)dx$

$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+9x-27\ln|x+3|+C.$$

2. $\int\frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx=\int\frac{d(x^2+3x-10)}{x^2+3x-10}=\ln|x^2+3x-10|+C.$

3. $$\int \frac{x+1}{x^2-2x+5}\mathrm{d}x = \int \frac{x-1}{(x-1)^2+4}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5) + \arctan\frac{x-1}{2} + C.$$

4. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{x^2+1}$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

5. $$\int \frac{3}{1+x^3}\mathrm{d}x = \int \frac{3}{(1+x)(x^2-x+1)}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{1+x} + \frac{2-x}{x^2-x+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \ln|1+x| - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x$$

$$= \ln|1+x| - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \sqrt{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\mathrm{d}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \ln|1+x| - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

6. $$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\mathrm{d}x = \int \left[\frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + \frac{1}{x+1} + C.$$

7. $$\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \int \left[-\frac{1}{2(x+1)} + \frac{2}{x+2} - \frac{3}{2(x+3)}\right]\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x+1| + 2\ln|x+2| - \frac{3}{2}\ln|x+3| + C.$$

8. $$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}\mathrm{d}x = \int \left(x^2+x+1+\frac{8}{x} - \frac{3}{x-1} - \frac{4}{x+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 8\ln|x| - 3\ln|x-1| - 4\ln|x+1| + C.$$

9. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+x)} = \int \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1+x}{2(x^2+1)}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{x^2+1}$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + C.$$

10. $\int \frac{1}{x^4-1}dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}dx$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\arctan x + C.$$

11. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)} = \int \left(\frac{-x}{x^2+1} + \frac{x+1}{x^2+x+1}\right)dx$

$$= -\frac{\ln(x^2+1)}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} +$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$$

$$= -\frac{\ln(x^2+1)}{2} + \frac{\ln(x^2+x+1)}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

12. $\int \frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}dx + \int \frac{2x dx}{(x^2+1)^2}$

$$= \arctan x - \frac{1}{x^2+1} + C.$$

13. $\int \frac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2}dx = \int \left[-\frac{1}{x^2+x+1} + \frac{x-1}{(x^2+x+1)^2}\right]dx$

$$= -\int \frac{1}{x^2+x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^2} - \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx,$$

令 $u=x+\frac{1}{2}$,并记 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$,则

$$\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx = \int \frac{1}{(u^2+a^2)^2}du = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{u}{u^2+a^2} + \int \frac{1}{u^2+a^2}du\right]$$

$$= \frac{u}{2a^2(u^2+a^2)} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{1}{u^2+a^2}du,$$

由此得

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx$$

$$= \int \frac{1}{u^2+a^2}du + \frac{3}{2}\left[\frac{u}{2a^2(u^2+a^2)} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{1}{u^2+a^2}du\right]$$

$$= \frac{3u}{4a^2(u^2+a^2)} + \left(\frac{3}{4a^2}+1\right)\int \frac{1}{u^2+a^2}du$$

$$= \frac{3u}{4a^2(u^2+a^2)} + \frac{1}{a}\left(\frac{3}{4a^2}+1\right)\arctan\frac{u}{a} + C_1$$

$$=\frac{2x+1}{2(x^2+x+1)}+\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C_1,$$

因此有

$$\int\frac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2(x^2+x+1)}-\frac{2x+1}{2(x^2+x+1)}-\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=-\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

14. $$\int\frac{\mathrm{d}x}{3+\sin^2x}=-\int\frac{\mathrm{d}(\cot x)}{3\csc^2x+1}\xlongequal{u=\cot x}-\int\frac{\mathrm{d}u}{3u^2+4}$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{3}u}{2}+C$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{3}\cot x}{2}+C.$$

15. 令 $u=\tan\frac{x}{2}$,则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{3+\cos x}=\int\frac{1}{3+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u=\int\frac{1}{2+u^2}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}+C.$$

16. 令 $u=\tan\frac{x}{2}$,则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}=\int\frac{1}{2+\frac{2u}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u=\int\frac{1}{u^2+u+1}\mathrm{d}u$$

$$=\int\frac{1}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\mathrm{d}u=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C.$$

17. 令 $u=\tan\frac{x}{2}$,则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}=\int\frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = \ln|1+u| + C = \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

18. 令 $u=\tan\frac{x}{2}$,则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x-\cos x+5} = \int \frac{1}{\frac{4u}{1+u^2}-\frac{1-u^2}{1+u^2}+5}\cdot\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

$$= \int \frac{1}{3u^2+2u+2}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(u+\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}\mathrm{d}\left(u+\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3u+1}{\sqrt{5}} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + C.$$

19. 令 $u=\sqrt[3]{x+1}$,即 $x=u^3-1$,则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+1}} = \int \frac{3u^2}{1+u}\mathrm{d}u = \int\left(3u-3+\frac{3}{1+u}\right)\mathrm{d}u$$

$$= \frac{3}{2}u^2-3u+3\ln|1+u|+C$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-3\sqrt[3]{x+1}+3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+1}\right|+C.$$

20. $$\int \frac{(\sqrt{x})^3-1}{\sqrt{x}+1}\mathrm{d}x = \int\left(x-\sqrt{x}+1-\frac{2}{\sqrt{x}+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x-\int\frac{4t}{t+1}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x-4\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x-4\sqrt{x}+4\ln(\sqrt{x}+1)+C.$$

21. 令 $u=\sqrt{x+1}$,即 $x=u^2-1$,则

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\mathrm{d}x = \int\frac{u-1}{u+1}\cdot 2u\mathrm{d}u = 2\int\left(u-2+\frac{2}{u+1}\right)\mathrm{d}u$$

$$= u^2-4u+4\ln|u+1|+C$$

$$= x-4\sqrt{x+1}+4\ln(\sqrt{x+1}+1)+C_1\ (C_1=C+1).$$

22. 令 $u=\sqrt[4]{x}$,即 $x=u^4$,则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}=\int\frac{1}{u^2+u}\cdot 4u^3\mathrm{d}u=4\int\left(u-1+\frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u$$

$$=2u^2-4u+4\ln|u+1|+C$$

$$=2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(\sqrt[4]{x}+1)+C.$$

23. 解法一

令 $u=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$,即 $x=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$,则

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int u\cdot\frac{1+u^2}{1-u^2}\cdot\frac{-4u}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u=\int\frac{-4u^2}{(1-u^2)(1+u^2)}\mathrm{d}u$$

$$=\int\left(\frac{2}{1+u^2}-\frac{1}{1-u}-\frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u$$

$$=2\arctan u+\ln|1-u|-\ln|1+u|+C$$

$$=2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+C.$$

解法二

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int\frac{1-x}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\xlongequal{x=\sin u}\int\frac{1-\sin u}{\sin u}\mathrm{d}u$$

$$=\int\csc u\mathrm{d}u-\int\mathrm{d}u=\ln|\csc u-\cot u|-u+C$$

$$=\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{|x|}-\arcsin x+C.$$

24. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}=\int\frac{1}{x^2-1}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\mathrm{d}x$,

令 $u=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$,即$x=\dfrac{u^3+1}{u^3-1}$,得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}=\int\frac{u}{\left(\dfrac{u^3+1}{u^3-1}\right)^2-1}\cdot\frac{-6u^2}{(u^3-1)^2}\mathrm{d}u=-\frac{3}{2}\int\mathrm{d}u$$

$$=-\frac{3}{2}u+C=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C.$$

习题 4－5 积分表的使用

利用积分表计算下列不定积分:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}}$.

2. $\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx$.

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x+x^2}}$.

4. $\int \sqrt{2x^2+9}dx$.

5. $\int \sqrt{3x^2-2}dx$.

6. $\int e^{2x}\cos x dx$.

7. $\int x\arcsin \frac{x}{2}dx$.

8. $\int \frac{dx}{(x^2+9)^2}$.

9. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

10. $\int e^{-2x}\sin 3x dx$.

11. $\int \sin 3x\sin 5x dx$.

12. $\int \ln^3 x dx$.

13. $\int \frac{1}{x^2(1-x)}dx$.

14. $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$.

15. $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$.

16. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$.

17. $\int \frac{x}{(2+3x)^2}dx$.

18. $\int \cos^6 x dx$.

19. $\int x^2\sqrt{x^2-2}dx$.

20. $\int \frac{1}{2+5\cos x}dx$.

21. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-1}}$.

22. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$.

23. $\int \frac{x+5}{x^2-2x-1}dx$.

24. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x-x^2}}$.

25. $\int \frac{x^4}{25+4x^2}dx$.

解　注意:下列各题中最后括号内所标的是所用积分公式在教材上册附录Ⅳ积分表中的编号.

1. $$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{\sqrt{(2x)^2-3^2}} = \frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{(2x)^2-3^2}\right|+C$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2-9}\right|+C. (45)$$

2. $$\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+2^2}d(x+1) = \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+C. (19)$$

3. $$\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x+x^2}} = \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2+1}} = \ln[x-2+\sqrt{(x-2)^2+1}]+C$$
$$= \ln(x-2+\sqrt{5-4x+x^2})+C. (31)$$

4. $\int\sqrt{2x^2+9}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\sqrt{(\sqrt{2}x)^2+3^2}\,d(\sqrt{2}x)$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{\sqrt{2}x}{2}\sqrt{(\sqrt{2}x)^2+3^2}+\frac{3^2}{2}\ln\left[\sqrt{2}x+\sqrt{(\sqrt{2}x)^2+3^2}\right]\right\}+C$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{2x^2+9}+\frac{9\sqrt{2}}{4}\ln(\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+9})+C.\ (39)$$

5. $\int\sqrt{3x^2-2}\,dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\sqrt{(\sqrt{3}x)^2-(\sqrt{2})^2}\,d(\sqrt{3}x)$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}x}{2}\sqrt{(\sqrt{3}x)^2-(\sqrt{2})^2}-\right.$$

$$\left.\frac{(\sqrt{2})^2}{2}\ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{(\sqrt{3}x)^2-(\sqrt{2})^2}\right|\right]+C$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{3x^2-2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-2}\right|+C.\ (53)$$

6. $\int e^{2x}\cos x\,dx=\frac{1}{2^2+1^2}e^{2x}(\sin x+2\cos x)+C$

$$=\frac{1}{5}e^{2x}(\sin x+2\cos x)+C.\ (129)$$

7. $\int x\arcsin\frac{x}{2}dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2^2}{4}\right)\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{4}\sqrt{2^2-x^2}+C$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-1\right)\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{4}\sqrt{4-x^2}+C.\ (114)$$

8. $\int\frac{dx}{(x^2+9)^2}=\int\frac{dx}{(x^2+3^2)^2}$

$$=\frac{x}{2(2-1)3^2(x^2+3^2)}+\frac{2\times2-3}{2(2-1)3^2}\int\frac{dx}{x^2+3^2}$$

$$=\frac{x}{18(x^2+9)}+\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}+C$$

$$=\frac{x}{18(x^2+9)}+\frac{1}{54}\arctan\frac{x}{3}+C.\ (20,19)$$

9. $\int\frac{dx}{\sin^3x}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x}{\sin^2x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin x}$

$$=-\frac{\cos x}{2\sin^2x}+\frac{1}{2}\ln|\csc x-\cot x|+C.\ (97,88)$$

10. $\int e^{-2x}\sin 3x\,dx=\frac{1}{(-2)^2+3^2}e^{-2x}(-2\sin 3x-3\cos 3x)+C$

$$=-\frac{e^{-2x}}{13}(2\sin 3x+3\cos 3x)+C.\ (128)$$

11. $\int \sin 3x\sin 5x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2(3+5)}\sin(3+5)x + \frac{1}{2(3-5)}\sin(3-5)x + C$

$= -\frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$ (101)

12. $\int \ln^3 x\mathrm{d}x = x(\ln x)^3 - 3\int \ln^2 x\mathrm{d}x$

$= x(\ln x)^3 - 3\left[x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\mathrm{d}x\right]$

$= x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6\int \ln x\mathrm{d}x$

$= x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6(x\ln x - x) + C$

$= x\ln^3 x - 3x\ln^2 x + 6x\ln x - 6x + C.$ (135,132)

13. $\int \frac{1}{x^2(1-x)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} - \ln\left|\frac{1-x}{x}\right| + C.$ (6)

14. $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x = 2\sqrt{x-1} - \int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$

$= 2\sqrt{x-1} - 2\arctan\sqrt{x-1} + C.$ (17,15)

15. $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$= \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x + C.$ (20,19)

16. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = \arccos\frac{1}{|x|} + C.$ (51)

17. $\int \frac{x}{(2+3x)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\left(\ln|2+3x| + \frac{2}{2+3x}\right) + C.$ (7)

18. $\int \cos^6 x\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\cos^5 x\sin x + \frac{5}{6}\int \cos^4 x\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{6}\cos^5 x\sin x + \frac{5}{6}\left(\frac{1}{4}\cos^3 x\sin x + \frac{3}{4}\int \cos^2 x\mathrm{d}x\right)$

$= \frac{1}{6}\cos^5 x\sin x + \frac{5}{24}\cos^3 x\sin x + \frac{5}{8}\int \cos^2 x\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{6}\cos^5 x\sin x + \frac{5}{24}\cos^3 x\sin x + \frac{5}{8}\left(\frac{1}{2}\cos x\sin x + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x\right)$

$= \frac{1}{6}\cos^5 x\sin x + \frac{5}{24}\cos^3 x\sin x + \frac{5}{16}\cos x\sin x + \frac{5}{16}x + C.$ (96)

19. $\int x^2\sqrt{x^2-2}\mathrm{d}x = \frac{x}{8}(2x^2-2)\sqrt{x^2-2} - \frac{4}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right| + C$

$= \frac{x}{4}(x^2-1)\sqrt{x^2-2} - \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right| + C.$ (56)

20. $\int \frac{1}{2+5\cos x}dx = \frac{1}{7}\sqrt{\frac{7}{3}}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{7}{3}}}{\tan\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{7}{3}}}\right| + C$

$$= \frac{1}{\sqrt{21}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}+\sqrt{7}}{\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}-\sqrt{7}}\right| + C.\ (106)$$

21. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-1}} = -\frac{\sqrt{2x-1}}{-x} - \frac{2}{-2}\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-1}}$

$$= \frac{\sqrt{2x-1}}{x} + 2\arctan\sqrt{2x-1} + C.\ (16,15)$$

22. 解法一

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.\ (59,61)$$

解法二

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = (x+1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - 2\arcsin\sqrt{\frac{1-x}{2}} + C$$

$$= \sqrt{1-x^2} - 2\arcsin\sqrt{\frac{1-x}{2}} + C.\ (80)$$

23. $\int \frac{x+5}{x^2-2x-1}dx = \int \frac{x}{x^2-2x-1}dx + 5\int \frac{1}{x^2-2x-1}dx$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-1| - \frac{-2}{2}\int \frac{1}{x^2-2x-1}dx + 5\int \frac{1}{x^2-2x-1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-1| + 6\cdot\frac{1}{\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}\cdot$$

$$\ln\left|\frac{2x-2-\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2x-2+\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-1| + \frac{3}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-(\sqrt{2}+1)}{x+(\sqrt{2}-1)}\right| + C.\ (30,29)$$

24. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x-x^2}} = -\sqrt{1+x-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C.\ (78)$

25. $\int \frac{x^4}{25+4x^2}dx = \int\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{25}{16} + \frac{625}{16}\cdot\frac{1}{25+4x^2}\right)dx$

$$= \frac{x^3}{12} - \frac{25}{16}x + \frac{625}{32}\int \frac{1}{5^2+(2x)^2}d(2x)$$

$$= \frac{x^3}{12} - \frac{25}{16}x + \frac{625}{32} \cdot \frac{1}{5}\arctan\frac{2x}{5} + C$$

$$= \frac{x^3}{12} - \frac{25}{16}x + \frac{125}{32}\arctan\frac{2x}{5} + C. (19)$$

总习题四

1. 填空:

(1) $\int x^3 e^x dx =$ ________;

(2) $\int \frac{x+5}{x^2-6x+13}dx =$ ________.

解　(1) $\int x^3 e^x dx = \int x^3 d(e^x) = x^3 e^x - 3\int x^2 d(e^x)$

$$= x^3e^x - 3\left[x^2e^x - \int 2x d(e^x)\right] = x^3e^x - 3x^2e^x + 6\left(xe^x - \int e^x dx\right)$$

$$= x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + C,$$

因此,应填 $x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + C$.

(2) $\int \frac{x+5}{x^2-6x+13}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2-6x+13)'}{x^2-6x+13}dx + \int \frac{8}{x^2-6x+13}dx$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13) + \int \frac{8}{(x-3)^2+4}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13) + 4\arctan\frac{x-3}{2} + C,$$

因此,应填 $\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13) + 4\arctan\frac{x-3}{2} + C$.

2. 以下两题中给出了四个结论,从中选出一个正确的结论:

(1) 已知 $f'(x) = \frac{1}{x(1+2\ln x)}$,且 $f(1) = 1$,则 $f(x)$ 等于(　　).

(A) $\ln(1+2\ln x) + 1$　　(B) $\frac{1}{2}\ln(1+2\ln x) + 1$

(C) $\frac{1}{2}\ln(1+2\ln x) + \frac{1}{2}$　　(D) $2\ln(1+2\ln x) + 1$

(2) 在下列等式中,正确的结果是(　　).

(A) $\int f'(x)dx = f(x)$　　(B) $\int df(x) = f(x)$

(C) $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$　　(D) $d\int f(x)dx = f(x)$

解　(1) 由微积分基本定理,有

$$f(x)-f(1)=\int_1^x f'(t)\mathrm{d}t=\int_1^x \frac{1}{t(1+2\ln t)}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_1^x \frac{1}{1+2\ln t}\mathrm{d}(1+2\ln t)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln(1+2\ln t)\right]_1^x=\frac{1}{2}\ln(1+2\ln x),$$

根据条件 $f(1)=1$，得 $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln(1+2\ln x)+1$. 故选(B).

(2) 根据微分运算与积分运算的关系，可知

$$\int \mathrm{d}f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x),$$

$$\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x,$$

故选(C).

3. 已知 $\dfrac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int x^3 f'(x)\mathrm{d}x$.

解　根据条件，有 $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{\sin x}{x}+C$，即 $f(x)=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)'=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，因此

$$\int x^3 f'(x)\mathrm{d}x=x^3 f(x)-\int 3x^2 f(x)\mathrm{d}x=x(x\cos x-\sin x)-3\int x^2\mathrm{d}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$=x^2\cos x-x\sin x-3\left(x^2\cdot\frac{\sin x}{x}-\int\frac{\sin x}{x}\cdot 2x\mathrm{d}x\right)$$

$$=x^2\cos x-4x\sin x-6\cos x+C.$$

4. 求下列不定积分(其中 a,b 为常数)：

(1) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$；　(2) $\displaystyle\int\frac{x}{(1-x)^3}\mathrm{d}x$；

(3) $\displaystyle\int\frac{x^2}{a^6-x^6}\mathrm{d}x\ (a>0)$；　(4) $\displaystyle\int\frac{1+\cos x}{x+\sin x}\mathrm{d}x$；

(5) $\displaystyle\int\frac{\ln\ln x}{x}\mathrm{d}x$；　(6) $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x$；

(7) $\displaystyle\int\tan^4 x\mathrm{d}x$；　(8) $\displaystyle\int\sin x\sin 2x\sin 3x\mathrm{d}x$；

(9) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^6+4)}$；　(10) $\displaystyle\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\mathrm{d}x\ (a>0)$；

(11) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}$；　(12) $\displaystyle\int x\cos^2 x\mathrm{d}x$；

(13) $\displaystyle\int\mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x$；　(14) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}$；

(15) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$;　　(16) $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{5/2}}$;

(17) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$;　　(18) $\int \sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,dx$;

(19) $\int \ln(1+x^2)\,dx$;　　(20) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx$;

(21) $\int \arctan\sqrt{x}\,dx$;　　(22) $\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}dx$;

(23) $\int \frac{x^3}{(1+x^8)^2}dx$;　　(24) $\int \frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}dx$;

(25) $\int \frac{dx}{16-x^4}$;　　(26) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$;

(27) $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$;　　(28) $\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx$;

(29) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx$;　　(30) $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}$;

(31) $\int \frac{e^{3x}+e^x}{e^{4x}-e^{2x}+1}dx$;　　(32) $\int \frac{xe^x}{(e^x+1)^2}dx$;

(33) $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$;　　(34) $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$;

(35) $\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x\,dx$;　　(36) $\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

(37) $\int \frac{\cot x}{1+\sin x}dx$;　　(38) $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos x}$;

(39) $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$;　　(40) $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$.

解　(1) $\int \frac{dx}{e^x-e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x}-1} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{e^x+1}\right)d(e^x)$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{|e^x-1|}{e^x+1}+C.$$

(2) $\int \frac{x}{(1-x)^3}dx \xlongequal{u=1-x} \int\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u^3}\right)du = -\frac{1}{u}+\frac{1}{2u^2}+C$

$$= -\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2(1-x)^2}+C.$$

(3) $\int \frac{x^2}{a^6-x^6}dx = \int \frac{d(x^3)}{3(a^6-x^6)} \xlongequal{u=x^3} \int \frac{du}{3(a^6-u^2)}$

$$= \frac{1}{6a^3}\int\left(\frac{1}{a^3+u}+\frac{1}{a^3-u}\right)du$$

$$=\frac{1}{6a^3}\ln\left|\frac{a^3+u}{a^3-u}\right|+C=\frac{1}{6a^3}\ln\left|\frac{a^3+x^3}{a^3-x^3}\right|+C.$$

(4) $\displaystyle\int\frac{1+\cos x}{x+\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(x+\sin x)}{x+\sin x}=\ln|x+\sin x|+C.$

(5) $\displaystyle\int\frac{\ln\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int\ln\ln x\mathrm{d}(\ln x)=\ln x\ln\ln x-\int\ln x\cdot\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$

$$=\ln x(\ln\ln x-1)+C.$$

(6) $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(\sin^2x)}{1+\sin^4x}=\frac{\arctan(\sin^2x)}{2}+C.$

(7) $\displaystyle\int\tan^4x\mathrm{d}x=\int\tan^2x(\sec^2x-1)\mathrm{d}x$

$$=\int\tan^2x\mathrm{d}(\tan x)-\int(\sec^2x-1)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\tan^3x-\tan x+x+C.$$

(8) $\displaystyle\int\sin x\sin 2x\sin 3x\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2}(\cos x-\cos 3x)\sin 3x\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int\cos x\sin 3x\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\cos 3x\sin 3x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}\int(\sin 2x+\sin 4x)\mathrm{d}x-\frac{1}{12}\sin^23x$$

$$=-\frac{1}{16}\cos 4x-\frac{1}{8}\cos 2x-\frac{1}{12}\sin^23x+C.$$

(9) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^6+4)}\overset{x=\frac{1}{u}}{=\!=\!=}\int\frac{-u^5\mathrm{d}u}{1+4u^6}=-\frac{1}{24}\int\frac{\mathrm{d}(1+4u^6)}{1+4u^6}$

$$=-\frac{1}{24}\ln(1+4u^6)+C=-\frac{1}{24}\ln\frac{x^6+4}{x^6}+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{24}\ln(x^6+4)+C.$$

(10) 解法一

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\mathrm{d}x=\int\frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=a\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

解法二 令 $u=\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$,即 $x=a\dfrac{u^2-1}{u^2+1}$,则

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\mathrm{d}x=\int u\cdot\frac{4au}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u=\int-2au\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+u^2}\right)$$

$$= -\frac{2au}{1+u^2}+\int\frac{2a}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

$$= -\frac{2au}{1+u^2}+2a\arctan u+C$$

$$=(x-a)\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}+2a\arctan\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}+C$$

$$=-\sqrt{a^2-x^2}+2a\arctan\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}+C.$$

(11) 解法一

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$\xlongequal{x=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sec u}\int\sec u\mathrm{d}u=\ln|\sec u+\tan u|+C$$

$$=\ln\left|2x+1+2\sqrt{x(1+x)}\right|+C.$$

解法二　当 $x>0$ 时,因为 $\frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{1+x}}$,故令 $u=\sqrt{\frac{x}{1+x}}$,即 $x=\frac{u^2}{1-u^2}$,则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}=\int\frac{2}{1-u^2}\mathrm{d}u=\int\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}\right|+C$$

$$=\ln\left|2x+1+2\sqrt{x(1+x)}\right|+C,$$

当 $x<-1$ 时,同样可得 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}=\ln\left|2x+1+2\sqrt{x(1+x)}\right|+C.$

(12) $\int x\cos^2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int x(1+\cos 2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int x\mathrm{d}(2x+\sin 2x)$

$$=\frac{x(2x+\sin 2x)}{4}-\frac{1}{4}\int(2x+\sin 2x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2}{4}+\frac{x\sin 2x}{4}+\frac{\cos 2x}{8}+C.$$

(13) 当 $a\neq 0$ 时,

$$\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int\cos bx\mathrm{d}(e^{ax})$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}\int \sin bx\mathrm{d}(e^{ax})$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x.$$

因此有

$$\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx) + C,$$

当 $a = 0$ 时，

$$\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{\sin bx}{b} + C, & b \neq 0, \\ x + C, & b = 0. \end{cases}$$

(14) 令 $u = \sqrt{1+e^x}$，即作换元 $x = \ln(u^2 - 1)$，得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^x}} = \int \frac{2\mathrm{d}u}{u^2-1} = \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C = \ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + C.$$

(15) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}} \xlongequal{x=\frac{1}{u}} -\int \frac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \sqrt{1-u^2} + C = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C,$

易知当 $x < 0$ 和 $x > 0$ 时的结果相同.

(16) 设 $x = a\sin u\left(-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos u$，$\mathrm{d}x = a\cos u\mathrm{d}u$，

于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2-x^2)^{5/2}} = \frac{1}{a^4}\int \sec^4 u\mathrm{d}u = \frac{1}{a^4}\int (\tan^2 u + 1)\mathrm{d}(\tan u)$$

$$= \frac{\tan^3 u}{3a^4} + \frac{\tan u}{a^4} + C$$

$$= \frac{1}{3a^4}\left[\frac{x^3}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} + \frac{3x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right] + C.$$

(17) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{1+x^2}} \xlongequal{x=\frac{1}{u}} \int \frac{-u^3\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = -\int\left(u\sqrt{1+u^2} - \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)\mathrm{d}u$

$$= -\frac{1}{3}(1+u^2)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{1+u^2} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{x^3} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C,$$

易知当 $x < 0$ 和 $x > 0$ 时结果相同.

(18) $\int \sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,dx \xlongequal{x=u^2} \int 2u^2\sin u\,du = -\int 2u^2 d(\cos u)$

$$= -2u^2\cos u + \int 4u\cos u\,du$$

$$= -2u^2\cos u + \int 4u\,d(\sin u)$$

$$= -2u^2\cos u + 4u\sin u - \int 4\sin u\,du$$

$$= -2u^2\cos u + 4u\sin u + 4\cos u + C$$

$$= -2x\cos\sqrt{x} + 4\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 4\cos\sqrt{x} + C.$$

(19) $\int \ln(1+x^2)\,dx = x\ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}dx$

$$= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x + C.$$

(20) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx = \int \tan^2 x\sec x\,dx = \int \sec^3 x\,dx - \int \sec x\,dx$

$$= \left(\frac{1}{2}\sec x\tan x + \frac{1}{2}\int \sec x\,dx\right) - \int \sec x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\sec x\tan x - \frac{1}{2}\int \sec x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\sec x\tan x - \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C.$$

(21) $\int \arctan\sqrt{x}\,dx = \int \arctan\sqrt{x}\,d(1+x) = (1+x)\arctan\sqrt{x} - \int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

$$= (1+x)\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + C.$$

(22) $\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}dx = \int \frac{\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx = \pm\sqrt{2}\int \csc\frac{x}{2}d\left(\frac{x}{2}\right)$

$$= \pm\sqrt{2}\ln\left|\csc\frac{x}{2} - \cot\frac{x}{2}\right| + C,$$

上式当 $\cos\frac{x}{2} > 0$ 时取正,当 $\cos\frac{x}{2} < 0$ 时取负.

当 $\cos\frac{x}{2} > 0$ 时,$\ln\left|\csc\frac{x}{2} - \cot\frac{x}{2}\right| = \ln\frac{1-\cos\frac{x}{2}}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$

$$= \ln\left(\left|\csc\frac{x}{2}\right| - \left|\cot\frac{x}{2}\right|\right),$$

当 $\cos\frac{x}{2}<0$ 时，$\ln\left|\csc\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2}\right|=\ln\frac{1-\cos\frac{x}{2}}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$

$$=\ln\left(\left|\csc\frac{x}{2}\right|+\left|\cot\frac{x}{2}\right|\right)=-\ln\left(\left|\csc\frac{x}{2}\right|-\left|\cot\frac{x}{2}\right|\right),$$

因此有

$$\int\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}\mathrm{d}x=\sqrt{2}\ln\left(\left|\csc\frac{x}{2}\right|-\left|\cot\frac{x}{2}\right|\right)+C.$$

(23) $\int\frac{x^3}{(1+x^8)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\frac{1}{(1+x^8)^2}\mathrm{d}(x^4)\xlongequal{u=x^4}\frac{1}{4}\int\frac{1}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u,$

设 $u=\tan t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $1+u^2=\sec^2 t,\mathrm{d}u=\sec^2 t\mathrm{d}t$，于是

$$\text{原式}=\frac{1}{4}\int\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{2t+\sin 2t}{16}+C$$

$$=\frac{\arctan x^4}{8}+\frac{x^4}{8(1+x^8)}+C.$$

(24) $\int\frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}\mathrm{d}x\xlongequal{u=x^4}\frac{1}{4}\int\frac{u^2}{u^2+3u+2}\mathrm{d}u$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1+\frac{1}{u+1}-\frac{4}{u+2}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{4}u+\frac{1}{4}\ln|1+u|-\ln|2+u|+C$$

$$=\frac{x^4}{4}+\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{2+x^4}+C.$$

(25) $\int\frac{\mathrm{d}x}{16-x^4}=\int\frac{1}{(2-x)(2+x)(4+x^2)}\mathrm{d}x$

$$=\int\left[\frac{1}{32(2-x)}+\frac{1}{32(2+x)}+\frac{1}{8(4+x^2)}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{32}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|+\frac{1}{16}\arctan\frac{x}{2}+C.$$

(26) 解法一

令 $u=\tan\frac{x}{2}$，得

$$\int\frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{4u}{(1+u)^2(1+u^2)}\mathrm{d}u=\int\left[\frac{-2}{(1+u)^2}+\frac{2}{1+u^2}\right]\mathrm{d}u$$

$$=\frac{2}{1+u}+2\arctan u+C=\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+x+C.$$

解法二

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx = \int \frac{\sin x(1-\sin x)}{\cos^2 x}dx$$

$$= -\int \frac{1}{\cos^2 x}d(\cos x) - \int(\sec^2 x - 1)dx$$

$$= \sec x - \tan x + x + C.$$

(27) $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx = \int \frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx + \int \tan\frac{x}{2}dx$

$$= \int x d\left(\tan\frac{x}{2}\right) + \int \tan\frac{x}{2}dx$$

$$= x\tan\frac{x}{2} + C.$$

(28) $\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x}dx = \int xe^{\sin x}\cos x dx - \int e^{\sin x}\tan x\sec x dx$

$$= \int x d(e^{\sin x}) - \int e^{\sin x}d(\sec x)$$

$$= xe^{\sin x} - \int e^{\sin x}dx - \left(\sec x e^{\sin x} - \int e^{\sin x}dx\right)$$

$$= (x - \sec x)e^{\sin x} + C.$$

(29) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx \xlongequal{x=u^6} \int \frac{6}{u(u+1)}du = 6\int\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)du$

$$= 6\ln\left|\frac{u}{1+u}\right| + C = \ln\frac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^6} + C.$$

(30) $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2} \xlongequal{x=\ln u} \int \frac{du}{u(1+u)^2} = \int\left[\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u} - \frac{1}{(1+u)^2}\right]du$

$$= \ln u - \ln(1+u) + \frac{1}{1+u} + C$$

$$= x - \ln(1+e^x) + \frac{1}{1+e^x} + C.$$

(31) $\int \frac{e^{3x}+e^x}{e^{4x}-e^{2x}+1}dx = \int \frac{e^x+e^{-x}}{e^{2x}-1+e^{-2x}}dx = \int \frac{d(e^x-e^{-x})}{(e^x-e^{-x})^2+1}$

$$= \arctan(e^x - e^{-x}) + C.$$

(32) $\int \frac{xe^x}{(e^x+1)^2}dx = -\int x d\left(\frac{1}{e^x+1}\right) = -\frac{x}{e^x+1} + \int \frac{dx}{e^x+1}$

$$= -\frac{x}{e^x+1} + \int \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}}$$

$$= -\frac{x}{e^x+1} - \ln(1+e^{-x}) + C.$$

(33) $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x = x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{2x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

$$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - \int 2\ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}(\sqrt{1+x^2})$$

$$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + 2x + C.$$

(34) $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x \xlongequal{x=\frac{1}{u}} \int \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u = -\int \ln u\mathrm{d}((1+u^2)^{-\frac{1}{2}})$

$$= -\frac{\ln u}{\sqrt{1+u^2}} + \int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}$$

$$= \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C.$$

(35) 设 $x=\sin u\left(-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}\right)$，则$\sqrt{1-x^2}=\cos u$，$\mathrm{d}x=\cos u\mathrm{d}u$，于是

$\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x\mathrm{d}x = \int u\cos^2 u\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int u(1+\cos 2u)\mathrm{d}u$

$$= \frac{1}{4}\int u\mathrm{d}(2u+\sin 2u)$$

$$= \frac{u(2u+\sin 2u)}{4} - \frac{1}{4}\int (2u+\sin 2u)\mathrm{d}u$$

$$= \frac{u^2}{4} + \frac{u}{4}\sin 2u - \frac{\sin^2 u}{4} + C$$

$$= \frac{(\arcsin x)^2}{4} + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \frac{x^2}{4} + C.$$

(36) 设 $x=\cos u(0<u<\pi)$，则$\sqrt{1-x^2}=\sin u$，$\mathrm{d}x=-\sin u\mathrm{d}u$，于是

$\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -\int u\cos^3 u\mathrm{d}u = -\int u\mathrm{d}\left(\sin u - \frac{1}{3}\sin^3 u\right)$

$$= -u\left(\sin u - \frac{1}{3}\sin^3 u\right) + \int \left(\sin u - \frac{1}{3}\sin^3 u\right)\mathrm{d}u$$

$$= -u\left(\sin u - \frac{1}{3}\sin^3 u\right) - \frac{1}{3}\int (2+\cos^2 u)\mathrm{d}(\cos u)$$

$$= -u\left(\sin u - \frac{1}{3}\sin^3 u\right) - \frac{2}{3}\cos u - \frac{1}{9}\cos^3 u + C$$

$$= -\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}(2+x^2)\arccos x - \frac{1}{9}x(6+x^2) + C.$$

(37) $\int \frac{\cot x}{1+\sin x}dx = \int \frac{\cos x}{\sin x(1+\sin x)}dx = \int\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{1+\sin x}\right)d(\sin x)$

$$= \ln\left|\frac{\sin x}{1+\sin x}\right| + C.$$

(38) $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos x} = -\int \cot x\sec^2 x d(\cot x) \xlongequal{u=\cot x} -\int u\left(1+\frac{1}{u^2}\right)du$

$$= -\frac{u^2}{2} - \ln|u| + C = -\frac{\cot^2 x}{2} - \ln|\cot x| + C.$$

(39) $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x} = \int \frac{d(\cos x)}{(2+\cos x)(\cos^2 x - 1)}$

$$\xlongequal{u=\cos x} \int \frac{du}{(2+u)(u^2-1)}$$

$$= \int\left[\frac{1}{6(u-1)} - \frac{1}{2(u+1)} + \frac{1}{3(u+2)}\right]du$$

$$= \frac{1}{6}\ln|u-1| - \frac{1}{2}\ln|u+1| + \frac{1}{3}\ln|u+2| + C$$

$$= \frac{1}{6}\ln(1-\cos x) - \frac{1}{2}\ln(1+\cos x) + \frac{1}{3}\ln(2+\cos x) + C.$$

(40) 解法一

$$\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)^2 - \frac{1}{2}}{\sin x+\cos x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int(\sin x+\cos x)dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin x+\cos x}dx$$

$$= \frac{1}{2}(-\cos x+\sin x) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin x+\cos x}dx,$$

令 $u=\tan\frac{x}{2}$,则 $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $dx = \frac{2}{1+u^2}du$,故有

$$\int \frac{1}{\sin x+\cos x}dx = \int \frac{2}{2u+1-u^2}du = -\int \frac{2}{(u-1)^2-(\sqrt{2})^2}du$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{u-1-\sqrt{2}}du + \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{u-1+\sqrt{2}}du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u-1+\sqrt{2}}{u-1-\sqrt{2}}\right| + C',$$

因此有

$$\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx = \frac{1}{2}(\sin x-\cos x) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\tan\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right| + C.$$

解法二

$$\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}x \xlongequal{u=x+\frac{\pi}{4}} \int \frac{2\sin^2 u-1}{2\sqrt{2}\sin u}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \sin u\mathrm{d}u - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \csc u\mathrm{d}u$$

$$= -\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

第五章

定积分

习题 5 - 1　定积分的概念与性质

*1. 利用定积分定义计算由抛物线 $y=x^2+1$,两直线 $x=a$、$x=b(b>a)$ 及 x 轴所围成的图形的面积.

解　由于函数 $f(x)=x^2+1$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,因此可积,为计算方便,不妨把 $[a,b]$ 分成 n 等份,则分点为 $x_i=a+\dfrac{i(b-a)}{n}(i=0,1,2,\cdots,n)$,每个小区间长度为 $\Delta x_i=\dfrac{b-a}{n}$,取 ξ_i 为小区间的右端点 x_i,则

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\\&=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(a+\frac{i(b-a)}{n}\right)^2+1\right]\frac{b-a}{n}\\&=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(a^2+1)+2\frac{a(b-a)^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{(b-a)^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2\\&=(b-a)(a^2+1)+a(b-a)^2\frac{(n+1)}{n}+(b-a)^3\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时,上式极限为

$$(b-a)(a^2+1)+a(b-a)^2+\frac{1}{3}(b-a)^3=\frac{b^3-a^3}{3}+b-a,$$

即为所求图形的面积.

*2. 利用定积分定义计算下列积分:

(1) $\int_a^b x\mathrm{d}x(a<b)$;　　(2) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解　由于被积函数在积分区间上连续,因此把积分区间分成 n 等份,并取 ξ_i 为小区间的右端点,得到

$$\begin{aligned}(1)\ \int_a^b x\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[a+\frac{i(b-a)}{n}\right]\frac{b-a}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\left[a(b-a)+\frac{(b-a)^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\right]\\&=a(b-a)+\frac{(b-a)^2}{2}=\frac{b^2-a^2}{2}.\end{aligned}$$

(2) $\int_0^1 e^x dx = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}e^{\frac{i}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(e^{\frac{1}{n}})^{n+1}-1}{n(e^{\frac{1}{n}}-1)}$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(e^{\frac{n+1}{n}}-1)}{\lim\limits_{n\to\infty}n(e^{\frac{1}{n}}-1)} = e-1.$$

3. 利用定积分的几何意义,证明下列等式:

(1) $\int_0^1 2x dx = 1$;　　(2) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$;

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx = 0$;　　(4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$.

证 (1) 根据定积分的几何意义,定积分$\int_0^1 2x dx$表示由直线 $y = 2x$、$x = 1$ 及 x 轴围成的图形的面积,该图形是三角形,底边长为1,高为2,因此面积为1,即$\int_0^1 2x dx = 1$.

(2) 根据定积分的几何意义,定积分$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$表示的是由曲线 $y = \sqrt{1-x^2}$ 以及 x 轴、y 轴围成的在第 I 象限内的图形面积,即单位圆的四分之一的图形,因此有$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$.

(3) 由于函数 $y = \sin x$ 在区间 $[0,\pi]$ 上非负,在区间 $[-\pi,0]$ 上非正. 根据定积分的几何意义,定积分$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx$表示曲线 $y = \sin x(x\in[0,\pi])$ 与 x 轴所围成的图形 D_1 的面积减去曲线 $y = \sin x(x\in[-\pi,0])$ 与 x 轴所围成的图形 D_2 的面积,显然图形 D_1 与 D_2 的面积是相等的,因此有$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx = 0$.

(4) 由于函数 $y = \cos x$ 在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上非负. 根据定积分的几何意义,定积分$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$表示曲线 $y = \cos x\left(x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$与 x 轴和 y 轴所围成的图形 D_1 的面积加上曲线 $y = \cos x\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]\right)$与 x 轴和 y 轴所围成的图形 D_2 的面积,而图形 D_1 的面积和图形 D_2 的面积显然相等,因此有$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$.

4. 利用定积分的几何意义,求下列积分:

(1) $\int_0^t x dx (t > 0)$;　　(2) $\int_{-2}^{4}\left(\frac{x}{2}+3\right)dx$;

(3) $\int_{-1}^{2}|x|dx$;　　(4) $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}dx$.

解 (1) 根据定积分的几何意义,$\int_0^t x dx$表示的是由直线 $y = x$, $x = t$ 以及 x 轴所

围成的直角三角形面积,该直角三角形的两条直角边的长均为 t,因此面积为$\frac{t^2}{2}$,故有$\int_0^t x\mathrm{d}x = \frac{t^2}{2}$.

(2) 根据定积分的几何意义,$\int_{-2}^{4}\left(\frac{x}{2}+3\right)\mathrm{d}x$ 表示的是由直线 $y = \frac{x}{2}+3, x = -2, x = 4$ 以及 x 轴所围成的梯形的面积,该梯形的两底长分别为$\frac{-2}{2}+3 = 2$ 和$\frac{4}{2}+3 = 5$,梯形的高为 $4-(-2) = 6$,因此面积为 21. 故有$\int_{-2}^{4}\left(\frac{x}{2}+3\right)\mathrm{d}x = 21$.

(3) 根据定积分的几何意义,$\int_{-1}^{2}|x|\mathrm{d}x$ 表示的是由折线 $y = |x|$ 和直线 $x = -1, x = 2$ 以及 x 轴所围成的图形的面积. 该图形由两个等腰直角三角形组成,一个由直线$y = -x, x = -1$ 和 x 轴所围成,其直角边长为 1,面积为$\frac{1}{2}$;另一个由直线 $y = x, x = 2$ 和 x 轴所围成,其直角边长为 2,面积为 2. 因此$\int_{-1}^{2}|x|\mathrm{d}x = \frac{5}{2}$.

(4) 根据定积分的几何意义,$\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$ 表示的是由上半圆周 $y = \sqrt{9-x^2}$ 以及 x 轴所围成的半圆的面积,因此有$\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{9}{2}\pi$.

5. 设 $a < b$,问 a、b 取什么值时,积分$\int_a^b (x-x^2)\mathrm{d}x$ 取得最大值?

解　根据定积分几何意义,$\int_a^b (x-x^2)\mathrm{d}x$ 表示的是由 $y = x-x^2, x = a, x = b$,以及 x 轴所围成的图形在 x 轴上方部分的面积减去 x 轴下方部分面积. 因此如果下方部分面积为 0,上方部分面积为最大时,$\int_a^b (x-x^2)\mathrm{d}x$ 的值最大,即当 $a = 0, b = 1$ 时,积分$\int_a^b (x-x^2)\mathrm{d}x$ 取得最大值.

6. 已知 $\ln 2 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$,试用抛物线法公式(1-6)求出 ln2 的近似值(取 $n = 10$,计算时取 4 位小数).

解　计算 y_i 并列表

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.000 0	0.100 0	0.200 0	0.300 0	0.400 0	0.500 0	0.600 0	0.700 0	0.800 0	0.900 0	1.000 0
y_i	1.000 0	0.909 1	0.833 3	0.769 2	0.714 3	0.666 7	0.625 0	0.588 2	0.555 6	0.526 3	0.500 0

按抛物线法公式(1-6),求得

$$s = \frac{1}{30}\left[(y_0+y_{10})+2(y_2+y_4+y_6+y_8)+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)\right]$$

$\approx 0.6931.$

7. 设$\int_{-1}^{1}3f(x)\,dx=18,\int_{-1}^{3}f(x)\,dx=4,\int_{-1}^{3}g(x)\,dx=3.$ 求

(1) $\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$;　　(2) $\int_{1}^{3}f(x)\,dx$;

(3) $\int_{3}^{-1}g(x)\,dx$;　　(4) $\int_{-1}^{3}\frac{1}{5}[4f(x)+3g(x)]\,dx.$

解　(1) $\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}3f(x)\,dx=6.$

(2) $\int_{1}^{3}f(x)\,dx=\int_{-1}^{3}f(x)\,dx-\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=-2.$

(3) $\int_{3}^{-1}g(x)\,dx=-\int_{-1}^{3}g(x)\,dx=-3.$

(4) $\int_{-1}^{3}\frac{1}{5}[4f(x)+3g(x)]\,dx=\frac{4}{5}\int_{-1}^{3}f(x)\,dx+\frac{3}{5}\int_{-1}^{3}g(x)\,dx=5.$

8. 水利工程中要计算拦水闸门所受的水压力.已知闸门上水的压强p与水深h存在函数关系,且有$p=9.8h(\mathrm{kN/m^2})$.若闸门高$H=3\,\mathrm{m}$,宽$L=2\,\mathrm{m}$,求水面与闸门顶相齐时闸门所受的水压力P.

解　在区间$[0,3]$上插入$n-1$个分点$0=h_0<h_1<\cdots<h_n=3$,取$\xi_i\in[h_{i-1},h_i]$,并记$\Delta h_i=h_i-h_{i-1}$,得到闸门所受水压力的近似值为$\sum_{i=1}^{n}p(\xi_i)2\Delta h_i$,根据定积分的定义可知闸门所受的水压力为

$$P=\int_0^3 2p(h)\,dh=19.6\int_0^3 h\,dh,$$

由于被积函数连续,而连续函数是可积的,因此积分值与积分区间的分法和ξ_i的取法无关.为方便计算,对区间$[0,3]$进行n等分,并取ξ_i为小区间的端点$h_i=\frac{3i}{n}$,于是

$$\int_0^3 h\,dh=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{9i}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{9(n+1)}{2n}=\frac{9}{2},$$

故

$$P=19.6\int_0^3 h\,dh=88.2\ (\mathrm{kN}).$$

9. 证明定积分性质:

(1) $\int_a^b kf(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$($k$是常数);　(2) $\int_a^b 1\cdot dx=\int_a^b dx=b-a.$

证　根据定积分的定义,在区间$[a,b]$中插入$n-1$个点$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$,记$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$,任取$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$,则

(1) $\int_a^b kf(x)\,dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}kf(\xi_i)\Delta x_i=k\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=k\int_a^b f(x)\,dx.$

(2) $\int_a^b 1 \cdot \mathrm{d}x = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i = \lim\limits_{\lambda \to 0}(b-a) = b-a.$

10. 估计下列各积分的值:

(1) $\int_1^4 (x^2+1)\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(1+\sin^2 x)\mathrm{d}x$;

(3) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x\arctan x\mathrm{d}x$;　　(4) $\int_2^0 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x.$

解　(1) 在区间$[1,4]$上,$2 \leqslant x^2+1 \leqslant 17$,因此有

$$6 = \int_1^4 2\mathrm{d}x \leqslant \int_1^4 (x^2+1)\mathrm{d}x \leqslant \int_1^4 17\mathrm{d}x = 51.$$

(2) 在区间$\left[\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right]$上,$1 = 1+0 \leqslant 1+\sin^2 x \leqslant 1+1 = 2$,因此有

$$\pi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}\mathrm{d}x \leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(1+\sin^2 x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} 2\mathrm{d}x = 2\pi.$$

(3) 在区间$\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right]$上,函数$f(x) = x\arctan x$是单调增加的,因此$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \leqslant f(x) \leqslant f(\sqrt{3})$,即$\frac{\pi}{6\sqrt{3}} \leqslant x\arctan x \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{3}}$,故有

$$\frac{\pi}{9} = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\mathrm{d}x \leqslant \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x\arctan x\mathrm{d}x \leqslant \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\pi}{\sqrt{3}}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\pi.$$

(4) 设$f(x) = x^2 - x, x \in [0,2]$,则$f'(x) = 2x-1$,$f(x)$在$[0,2]$上的最大值、最小值必为$f(0)$,$f\left(\frac{1}{2}\right)$,$f(2)$中的最大值和最小值,即最大值和最小值分别为$f(2) = 2$和$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$,因此有

$$2\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}} = \int_0^2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^2 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^2 \mathrm{e}^2\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^2,$$

而$\int_2^0 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x = -\int_0^2 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x$,故$-2\mathrm{e}^2 \leqslant \int_2^0 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x \leqslant -2\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$.

11. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续,证明$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$.

证　记$a = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$,则由定积分性质5,得

$$\int_0^1 [f(x)-a]^2\mathrm{d}x \geqslant 0,$$

即

$$\begin{aligned}\int_0^1 [f(x)-a]^2\mathrm{d}x &= \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x - 2a\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + a^2\\ &= \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x - \left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \geqslant 0,\end{aligned}$$

由此结论成立.

12. 设 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明

（1）若在 $[a,b]$ 上，$f(x)\geqslant 0$，且 $f(x)\not\equiv 0$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$；

（2）若在 $[a,b]$ 上，$f(x)\geqslant 0$，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，则在 $[a,b]$ 上，$f(x)\equiv 0$；

（3）若在 $[a,b]$ 上，$f(x)\leqslant g(x)$，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$，则在 $[a,b]$ 上，$f(x)\equiv g(x)$.

证　（1）根据条件必定存在 $x_0\in[a,b]$，使得 $f(x_0)>0$. 由函数 $f(x)$ 在 x_0 连续可知，存在 $a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b$，使得当 $x\in[\alpha,\beta]$ 时 $f(x)\geqslant\dfrac{f(x_0)}{2}$. 因此有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^\alpha f(x)\mathrm{d}x+\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x+\int_\beta^b f(x)\mathrm{d}x,$$

由定积分性质得到：

$$\int_a^\alpha f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0,\quad \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_\alpha^\beta\frac{f(x_0)}{2}\mathrm{d}x=\frac{\beta-\alpha}{2}f(x_0)>0,\quad \int_\beta^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

故得到结论 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$.

（2）用反证法. 如果 $f(x)\not\equiv 0$，则由（1）得到 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$，与假设条件矛盾，因此结论成立.

（3）因为 $h(x)=g(x)-f(x)\geqslant 0$，且

$$\int_a^b h(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0,$$

由（2）可得在 $[a,b]$ 上

$$h(x)\equiv 0,$$

从而结论成立.

13. 根据定积分的性质及第 12 题的结论，说明下列各对积分哪一个的值较大：

（1）$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ 还是 $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$？

（2）$\int_1^2 x^2\mathrm{d}x$ 还是 $\int_1^2 x^3\mathrm{d}x$？

（3）$\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x$ 还是 $\int_1^2(\ln x)^2\mathrm{d}x$？

（4）$\int_0^1 x\mathrm{d}x$ 还是 $\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x$？

（5）$\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 还是 $\int_0^1(1+x)\mathrm{d}x$？

解 (1) 在区间$[0,1]$上$x^2 \geqslant x^3$,因此$\int_0^1 x^2 dx$比$\int_0^1 x^3 dx$大.

(2) 在区间$[1,2]$上$x^2 \leqslant x^3$,因此$\int_1^2 x^3 dx$比$\int_1^2 x^2 dx$大.

(3) 在区间$[1,2]$上由于$0 \leqslant \ln x \leqslant 1$,得$\ln x \geqslant (\ln x)^2$,因此$\int_1^2 \ln x dx$比$\int_1^2 (\ln x)^2 dx$大.

(4) 由教材第三章第一节例1可知,当$x>0$时,$\ln(1+x)<x$,因此$\int_0^1 x dx$比$\int_0^1 \ln(1+x) dx$大.

(5) 由于当$x>0$时$\ln(1+x)<x$,故此时有$1+x<e^x$,因此$\int_0^1 e^x dx$比$\int_0^1 (1+x) dx$大.

习题 5-2 微积分基本公式

1. 试求函数$y=\int_0^x \sin t dt$当$x=0$及$x=\frac{\pi}{4}$时的导数.

解 $\frac{dy}{dx}=\sin x$,因此$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0$,$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. 求由参数表达式$x=\int_0^t \sin u du$,$y=\int_0^t \cos u du$所确定的函数对x的导数$\frac{dy}{dx}$.

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{\cos t}{\sin t}=\cot t$.

3. 求由$\int_0^y e^t dt+\int_0^x \cos t dt=0$所决定的隐函数对$x$的导数$\frac{dy}{dx}$.

解 方程两端分别对x求导,得$e^y\frac{dy}{dx}+\cos x=0$,故$\frac{dy}{dx}=-e^{-y}\cos x$.

4. 当x为何值时,函数$I(x)=\int_0^x te^{-t^2}dt$有极值?

解 容易知道$I(x)$可导,而$I'(x)=xe^{-x^2}=0$只有惟一解$x=0$. 当$x<0$时$I'(x)<0$,当$x>0$时$I'(x)>0$,故$x=0$为函数$I(x)$的惟一的极值点(极小值点).

5. 计算下列各导数:

(1) $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt$; (2) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$;

(3) $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt$.

解　(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 2x\sqrt{1+x^4}$.

(2) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{x^3}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{x^3}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} - \int_0^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}\right) = \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}.$$

(3) $$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_0^{\cos x}\cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\sin x}\cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t\right]\\ &= -\sin x\cos(\pi\cos^2 x) - \cos x\cos(\pi\sin^2 x)\\ &= -\sin x\cos(\pi - \pi\sin^2 x) - \cos x\cos(\pi\sin^2 x)\\ &= (\sin x - \cos x)\cos(\pi\sin^2 x).\end{aligned}$$

6. 证明 $f(x) = \displaystyle\int_1^x\sqrt{1+t^3}\,\mathrm{d}t$ 在 $[-1,+\infty)$ 上是单调增加函数，并求 $(f^{-1})'(0)$.

证　显然 $f(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上可导，且当 $x>-1$ 时，$f'(x)=\sqrt{1+x^3}>0$，因此 $f(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 是单调增加函数.

注意到 $f(1)=0$，故 $(f^{-1})'(0)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

7. 设 $f(x)$ 具有三阶连续导数，$y=f(x)$ 的图形如图 5－1 所示. 问下列积分中的哪一个积分值为负？

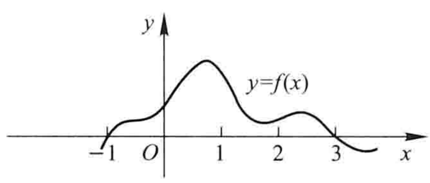


图 5－1

(A) $\displaystyle\int_{-1}^3 f(x)\,\mathrm{d}x$　　(B) $\displaystyle\int_{-1}^3 f'(x)\,\mathrm{d}x$

(C) $\displaystyle\int_{-1}^3 f''(x)\,\mathrm{d}x$　　(D) $\displaystyle\int_{-1}^3 f'''(x)\,\mathrm{d}x$

解　根据 $y=f(x)$ 的图形可知，在区间 $[-1,3]$ 上 $f(x)\geqslant 0$，且 $f(-1)=f(3)=0$，$f'(-1)>0$，$f''(-1)<0$，$f'(3)<0$，$f''(3)>0$. 因此

$$\int_{-1}^3 f(x)\,\mathrm{d}x > 0,\quad \int_{-1}^3 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(3)-f(-1)=0,$$

$\displaystyle\int_{-1}^3 f''(x)\,\mathrm{d}x = f'(3)-f'(-1)<0$，$\displaystyle\int_{-1}^3 f'''(x)\,\mathrm{d}x = f''(3)-f''(-1)>0$. 故选(C).

8. 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_0^a(3x^2-x+1)\,\mathrm{d}x$；　　(2) $\displaystyle\int_1^2\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)\mathrm{d}x$；

(3) $\int_4^9 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x$; (4) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$;

(5) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$; (6) $\int_0^{\sqrt{3}a} \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$;

(7) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$; (8) $\int_{-1}^0 \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$;

(9) $\int_{-\mathrm{e}-1}^{-2} \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$; (10) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\theta \mathrm{d}\theta$;

(11) $\int_0^{2\pi} |\sin x|\mathrm{d}x$;

(12) $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$,其中 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\leqslant 1, \\ \frac{1}{2}x^2, & x>1. \end{cases}$

解 (1) $\int_0^a (3x^2-x+1)\mathrm{d}x = \left[x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^a$

$$= a^3-\frac{1}{2}a^2+a = a\left(a^2-\frac{1}{2}a+1\right).$$

(2) $\int_1^2 \left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3x^3}\right]_1^2 = \frac{21}{8}$.

(3) $\int_4^9 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x = \int_4^9 (\sqrt{x}+x)\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{x^2}{2}\right]_4^9 = \frac{271}{6}$.

(4) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\arctan x]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$.

(5) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{3}$.

(6) $\int_0^{\sqrt{3}a} \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \left[\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\right]_0^{\sqrt{3}a} = \frac{\pi}{3a}$.

(7) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}} = \left[\arcsin\frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$.

(8) $\int_{-1}^0 \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \left(3x^2+\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$

$$= [x^3+\arctan x]_{-1}^0 = 1+\frac{\pi}{4}.$$

(9) $\int_{-\mathrm{e}-1}^{-2} \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = [\ln|1+x|]_{-\mathrm{e}-1}^{-2} = -1$.

(10) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\theta \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2\theta-1)\mathrm{d}\theta = [\tan\theta-\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1-\frac{\pi}{4}$.

(11) $\int_0^{2\pi}|\sin x|\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}(-\sin x)\mathrm{d}x$

$$=[-\cos x]_0^{\pi}+[\cos x]_{\pi}^{2\pi}=4.$$

(12) $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(x+1)\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{1}{2}x^2\mathrm{d}x$

$$=\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{6}\right]_1^2=\frac{8}{3}.$$

9. 设 $k\in\mathbf{N}_+$,试证下列各题:

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\mathrm{d}x=0$;　　(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\mathrm{d}x=0$;

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\mathrm{d}x=\pi$;　　(4) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\mathrm{d}x=\pi$.

解 (1) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{k}\sin kx\right]_{-\pi}^{\pi}=0.$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{k}\cos kx\right]_{-\pi}^{\pi}=0.$

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2kx)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x=\pi$, 其中由(1)得到$\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2kx\mathrm{d}x=0$.

(4) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2kx)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x=\pi$, 其中由(1)得到$\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2kx\mathrm{d}x=0$.

10. 设 $k,l\in\mathbf{N}_+$,且 $k\neq l$. 证明:

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin lx\mathrm{d}x=0$;　　(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos lx\mathrm{d}x=0$;

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin lx\mathrm{d}x=0$.

解 (1) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin lx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(k+l)x-\sin(k-l)x]\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(k+l)x\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(k-l)x\mathrm{d}x$$

$$=0,$$

其中由上一题$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(k+l)x\mathrm{d}x=0$, $\int_{-\pi}^{\pi}\sin(k-l)x\mathrm{d}x=0$.

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos lx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(k+l)x+\cos(k-l)x]\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k+l)x\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k-l)x\mathrm{d}x$$

$$= 0,$$

其中由上一题$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k+l)x\mathrm{d}x = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k-l)x\mathrm{d}x = 0$.

(3) $$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin lx\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(k+l)x-\cos(k-l)x]\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k+l)x\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k-l)x\mathrm{d}x$$
$$= 0,$$

其中由上一题$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k+l)x\mathrm{d}x = 0$,$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k-l)x\mathrm{d}x = 0$.

11. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t}{x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x t\mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{d}t}$.

解 (1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2}{1} = 1.$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x t\mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{d}t} = \lim_{x\to 0}\frac{2\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{x\mathrm{e}^{2x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\mathrm{e}^{x^2}}{1} = 2.$$

12. 设

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x\in[0,1), \\ x, & x\in[1,2]. \end{cases}$$

求 $\Phi(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在$[0,2]$上的表达式,并讨论 $\Phi(x)$ 在$(0,2)$内的连续性.

解 当 $x\in[0,1)$ 时,$\Phi(x) = \int_0^x t^2\mathrm{d}t = \dfrac{x^3}{3}$;当 $x\in[1,2]$ 时,$\Phi(x) = \int_0^1 t^2\mathrm{d}t + \int_1^x t\mathrm{d}t = \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{6}$,即

$$\Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3}, & x\in[0,1), \\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{6}, & x\in[1,2]. \end{cases}$$

由于$\lim\limits_{x\to 1^-}\Phi(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3}{3} = \dfrac{1}{3}$,$\lim\limits_{x\to 1^+}\Phi(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{6}\right) = \dfrac{1}{3}$,且 $\Phi(1) = \dfrac{1}{3}$,故函数 $\Phi(x)$ 在 $x = 1$ 处连续,而在其他点处显然连续,因此函数 $\Phi(x)$ 在区间$(0,2)$内连续.

注 事实上,由于$f(x)$ 在$(0,2)$内连续,故 $\Phi(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在$(0,2)$内可导,

因此 $\Phi(x)$ 必在(0,2)内连续. 我们甚至有以下更强的结论:

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界并可积,则 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上连续. 按照连续函数定义不难证明这一结论. 作为练习,请读者自己证明之.

13. 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant \pi,\\ 0, & x<0 \text{ 或 } x>\pi.\end{cases}$$

求 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式.

解 当 $x<0$ 时, $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=0$;

当 $0\leqslant x\leqslant \pi$ 时, $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x \dfrac{1}{2}\sin t\,\mathrm{d}t=\dfrac{1-\cos x}{2}$;

当 $x>\pi$ 时, $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^\pi f(t)\,\mathrm{d}t+\int_\pi^x f(t)\,\mathrm{d}t$

$$=\int_0^\pi \frac{1}{2}\sin t\,\mathrm{d}t=1.$$

即

$$\Phi(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1-\cos x}{2}, & 0\leqslant x\leqslant \pi,\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$$

14. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导且 $f'(x)\leqslant 0$,

$$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

证明在 (a,b) 内有 $F'(x)\leqslant 0$.

证 $F'(x)=\dfrac{1}{(x-a)^2}\left[(x-a)f(x)-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]$

$$=\frac{1}{(x-a)^2}[(x-a)f(x)-(x-a)f(\xi)]\quad(\xi\in(a,x)\subset[a,b])$$

$$=\frac{x-\xi}{x-a}f'(\eta)\quad(\eta\in(\xi,x)\subset(a,b)),$$

由条件可知结论成立.

15. 设 $F(x)=\int_0^x \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$,求 $F'(0)$.

解 $$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}}{1}=1.$$

16. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$. 证明函数

$$y=e^{-x}\int_0^x e^t f(t)\,dt$$

满足微分方程 $\frac{dy}{dx}+y=f(x)$，并求 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)$.

证
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=-e^{-x}\int_0^x e^t f(t)\,dt+e^{-x}\cdot e^x f(x)\\&=-y+f(x),\end{aligned}$$

因此 $y(x)$ 满足微分方程 $\frac{dy}{dx}+y=f(x)$.

由条件 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，从而存在 $X_0>0$，当 $x>X_0$ 时，有

$$f(x)>\frac{1}{2}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\int_0^x e^t f(t)\,dt&=\int_0^{X_0}e^t f(t)\,dt+\int_{X_0}^x e^t f(t)\,dt\\&\geqslant\int_0^{X_0}e^t f(t)\,dt+\int_{X_0}^x\frac{1}{2}e^{X_0}\,dt\\&=\int_0^{X_0}e^t f(t)\,dt+\frac{1}{2}e^{X_0}(x-X_0),\end{aligned}$$

故，当 $x\to+\infty$ 时，$\int_0^x e^t f(t)\,dt\to+\infty$，从而利用洛必达法则，有

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^t f(t)\,dt}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x f(x)}{e^x}=1.$$

习题 5-3　定积分的换元法和分部积分法

1. 计算下列定积分：

(1) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)dx$;　(2) $\int_{-2}^{1}\frac{dx}{(11+5x)^3}$;

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^3\varphi\,d\varphi$;　(4) $\int_0^{\pi}(1-\sin^3\theta)\,d\theta$;

(5) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2u\,du$;　(6) $\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\,dx$;

(7) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{8-2y^2}\,\mathrm{d}y$;

(8) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$;

(9) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\,(a>0)$;

(10) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}$;

(11) $\int_{-1}^{1}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{5-4x}}$;

(12) $\int_1^4\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$;

(13) $\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}-1}$;

(14) $\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{3a^2-x^2}}\,(a>0)$;

(15) $\int_0^1 te^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$;

(16) $\int_1^{e^2}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

(17) $\int_{-2}^{0}\frac{(x+2)\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$;

(18) $\int_0^2\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2-2x+2)^2}$;

(19) $\int_{-\pi}^{\pi}x^4\sin x\mathrm{d}x$;

(20) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos^4\theta\mathrm{d}\theta$;

(21) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;

(22) $\int_{-5}^{5}\frac{x^3\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}\mathrm{d}x$;

(23) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos 2x\mathrm{d}x$;

(24) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$;

(25) $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x$;

(26) $\int_0^{2\pi}|\sin(x+1)|\,\mathrm{d}x$.

解　(1) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

$$=\left[-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=0.$$

(2) $\int_{-2}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(11+5x)^3}=\int_{-2}^{1}\frac{\mathrm{d}(11+5x)}{5(11+5x)^3}=\left[-\frac{1}{10(11+5x)^2}\right]_{-2}^{1}=\frac{51}{512}.$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^3\varphi\mathrm{d}\varphi=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\mathrm{d}(\cos\varphi)=\left[-\frac{1}{4}\cos^4\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}.$

(4) $\int_0^{\pi}(1-\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta=\pi+\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)\mathrm{d}(\cos\theta)$

$$\xlongequal{u=\cos\theta}\pi+\int_1^{-1}(1-u^2)\mathrm{d}u=\pi-\frac{4}{3}.$$

(5) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2u)\mathrm{d}u$

$$=\frac{1}{2}\left[u+\frac{1}{2}\sin 2u\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

(6) $\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=\sqrt{2}\sin u}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2 u\mathrm{d}u=2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$

(7) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{8-2y^2}\mathrm{d}y \xlongequal{y=2\sin u} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}4\sqrt{2}\cos^2 u\mathrm{d}u$

$$= 2\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2u)\mathrm{d}u$$

$$= 2\sqrt{2}\left[u+\frac{1}{2}\sin 2u\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(\pi+2).$$

(8) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x \xlongequal{x=\sin u} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}\mathrm{d}u = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\csc^2 u-1)\mathrm{d}u$

$$= [-\cot u-u]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1-\frac{\pi}{4}.$$

(9) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x \xlongequal{x=a\sin u} \int_0^{\frac{\pi}{2}}a^4\sin^2 u\cos^2 u\mathrm{d}u = \frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2u)^2\mathrm{d}(2u)$

$$\xlongequal{t=2u} \frac{a^4}{8}\int_0^{\pi}\sin^2 t\mathrm{d}t = \frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^4}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16}a^4.$$

(10) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}} \xlongequal{x=\frac{1}{u}} \int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{-u}{\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u = \left[-\sqrt{1+u^2}\right]_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$$= \sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

(11) 令$u=\sqrt{5-4x}$,即 $x=\frac{5-u^2}{4}$,得

$$\int_{-1}^{1}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{5-4x}} = \int_3^1\frac{u^2-5}{8}\mathrm{d}u = \left[\frac{u^3}{24}-\frac{5}{8}u\right]_3^1 = \frac{1}{6}.$$

(12) 令 $u=\sqrt{x}$,即 $x=u^2$,得

$$\int_1^4\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} = \int_1^2\frac{2u\mathrm{d}u}{1+u} = [2u-2\ln(1+u)]_1^2 = 2+2\ln\frac{2}{3}.$$

(13) 令 $u=\sqrt{1-x}$,即 $x=1-u^2$,得

$$\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}-1} = \int_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{-2u\mathrm{d}u}{u-1} = -2[u+\ln(1-u)]_{\frac{1}{2}}^{0} = 1-2\ln 2.$$

(14) $\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{3a^2-x^2}} = -\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{\mathrm{d}(3a^2-x^2)}{\sqrt{3a^2-x^2}}$

$$= -\left[\sqrt{3a^2-x^2}\right]_0^{\sqrt{2}a} = (\sqrt{3}-1)a.$$

(15) $\int_0^1 t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = -\int_0^1\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}\left(-\frac{t^2}{2}\right) = \left[-\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^1 = 1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$

(16) $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} \xlongequal{x=e^u} \int_0^2 \frac{du}{\sqrt{1+u}} = [2\sqrt{1+u}]_0^2 = 2\sqrt{3}-2.$

(17) $\int_{-2}^0 \frac{(x+2)dx}{x^2+2x+2} = \int_{-2}^0 \frac{(x+1)+1}{(x+1)^2+1}dx$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+\arctan(x+1)\right]_{-2}^0$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

(18) 令 $x=1+\tan u$,则 $dx=\sec^2 u du$,因此

$$\int_0^2 \frac{xdx}{(x^2-2x+2)^2} = \int_0^2 \frac{xdx}{[(x-1)^2+1]^2} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\tan u)du}{\sec^2 u}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 u du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2u)du$$

$$= \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}.$$

(19) 由于被积函数为奇函数,因此$\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x dx = 0.$

(20) 由于被积函数为偶函数,因此

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4\theta d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4\theta d\theta = 8\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi.$$

(21) 由于被积函数为偶函数,因此有

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin x)^2 d(\arcsin x)$$

$$= \frac{2}{3}[(\arcsin x)^3]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi^3}{324}.$$

(22) 由于被积函数为奇函数,因此

$$\int_{-5}^5 \frac{x^3\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}dx = 0.$$

(23) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cos 2x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x(1-2\sin^2 x)dx$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-2\sin^2 x)d(\sin x)$$

$$= \left[\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}.$$

或者

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos 3x+\cos x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\sin 3x+\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}.$$

(24) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\sin x\mathrm{d}x$

$$\xlongequal{u=\cos x}-2\int_1^0\sqrt{u}\mathrm{d}u=\frac{4}{3}.$$

(25) $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sqrt{2}\sin x\mathrm{d}x=\sqrt{2}[-\cos x]_0^{\pi}=2\sqrt{2}.$

(26) $\int_0^{2\pi}|\sin(x+1)|\mathrm{d}x\xlongequal{x=u-1}\int_1^{2\pi+1}|\sin u|\mathrm{d}u,$

由于 $|\sin x|$ 是以 π 为周期的周期函数,因此

$$\text{上式}=2\int_0^{\pi}|\sin u|\mathrm{d}u=4.$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x.$$

证 令 $x=a+b-u$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(a+b-u)\mathrm{d}u=\int_a^b f(a+b-u)\mathrm{d}u$$

$$=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x.$$

3. 证明:$\int_x^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\quad(x>0).$

证 $\int_x^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\xlongequal{t=\frac{1}{u}}-\int_{\frac{1}{x}}^1\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$

4. 证明:$\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x=\int_0^1 x^n(1-x)^m\mathrm{d}x(m,n\in\mathbf{N}).$

证 令 $x=1-u$,则

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x=\int_1^0-(1-u)^m u^n\mathrm{d}u=\int_0^1 x^n(1-x)^m\mathrm{d}x.$$

5. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,$n\in\mathbf{Z}$,证明

$$\int_{\frac{n}{2}\pi}^{\frac{n+1}{2}\pi}f(|\sin x|)\mathrm{d}x=\int_{\frac{n}{2}\pi}^{\frac{n+1}{2}\pi}f(|\cos x|)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

证 令 $x=u+\frac{n}{2}\pi$,则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$,因此

$$\int_{\frac{n}{2}\pi}^{\frac{n+1}{2}\pi}f(|\sin x|)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\left|\sin\left(u+\frac{n}{2}\pi\right)\right|\right)\mathrm{d}u$$

$$=\begin{cases}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin u)\mathrm{d}u, & n\text{ 为偶数},\\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos u)\mathrm{d}u, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

$$\int_{\frac{n}{2}\pi}^{\frac{n+1}{2}\pi} f(|\cos x|)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\left|\cos\left(u+\frac{n}{2}\pi\right)\right|\right)\mathrm{d}u$$

$$=\begin{cases}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos u)\mathrm{d}u, & n\text{ 为偶数},\\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin u)\mathrm{d}u, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

由于 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$,因此结论成立.

6. 若 $f(x)$ 是连续的奇函数,证明 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是偶函数;若 $f(x)$ 是连续的偶函数,证明 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是奇函数.

证　记 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,则有

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{t=-u} -\int_0^x f(-u)\mathrm{d}u,$$

当 $f(x)$ 为奇函数时,$F(-x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=F(x)$,故 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是偶函数.

当 $f(x)$ 为偶函数时,$F(-x)=-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=-F(x)$,故 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是奇函数.

7. 计算下列定积分:

(1) $\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} t\sin\omega t\mathrm{d}t$($\omega$ 为常数);　　(4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$;

(5) $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;　　(6) $\int_0^1 x\arctan x\mathrm{d}x$;

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2x}\cos x\mathrm{d}x$;　　(8) $\int_1^2 x\log_2 x\mathrm{d}x$;

(9) $\int_0^{\pi} (x\sin x)^2\mathrm{d}x$;　　(10) $\int_1^{\mathrm{e}} \sin(\ln x)\mathrm{d}x$;

(11) $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} |\ln x|\mathrm{d}x$;　　(12) $\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\mathrm{d}x(m\in\mathbf{N}_+)$;

(13) $J_m=\int_0^{\pi} x\sin^m x\mathrm{d}x(m\in\mathbf{N}_+)$.

解 (1) $\int_0^1 xe^{-x}dx = -\int_0^1 xd(e^{-x}) = -[xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx$

$$= -e^{-1} + [-e^{-x}]_0^1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

(2) $\int_1^e x\ln xdx = \int_1^e \frac{\ln x}{2}d(x^2) = [\frac{1}{2}x^2\ln x]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}dx = \frac{e^2+1}{4}.$

(3) $\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} t\sin\omega tdt = -\frac{1}{\omega}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} td(\cos\omega t) = -\frac{1}{\omega}[t\cos\omega t]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} + \frac{1}{\omega}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos\omega tdt$

$$= -\frac{2\pi}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}[\sin\omega t]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = -\frac{2\pi}{\omega^2}.$$

(4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x}dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} xd(\cot x) = [-x\cot x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cot xdx$

$$= -\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\pi}{4} + [\ln\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{9}\right)\pi + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

(5) $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \int_1^4 2\ln xd\sqrt{x} = [2\sqrt{x}\ln x]_1^4 - \int_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}}dx$

$$= 8\ln 2 - [4\sqrt{x}]_1^4 = 4(2\ln 2 - 1).$$

(6) $\int_0^1 x\arctan xdx = \frac{1}{2}\int_0^1 \arctan xd(x^2)$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\arctan x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}[x - \arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos xdx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xd(e^{2x})$

$$= \frac{1}{2}[e^{2x}\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin xdx$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xd(e^{2x})$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}[e^{2x}\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos xdx,$$

因此有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos xdx = \frac{1}{5}(e^{\pi} - 2).$$

(8) $\int_1^2 x\log_2 xdx = \frac{1}{2}\int_1^2 \log_2 xd(x^2)$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2\log_2 x\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{x}{\ln 2}\mathrm{d}x$$

$$= 2 - \frac{1}{4\ln 2}\left[x^2\right]_1^2 = 2 - \frac{3}{4\ln 2}.$$

(9) $\int_0^{\pi}(x\sin x)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}x^2(1-\cos 2x)\mathrm{d}x$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}(\sin 2x)$$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4}\left[x^2\sin 2x\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}x\sin 2x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}(\cos 2x)$$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4}\left[x\cos 2x\right]_0^{\pi} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos 2x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}.$$

(10) $\int_1^{\mathrm{e}}\sin(\ln x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=\mathrm{e}^u} \int_0^1 \mathrm{e}^u\sin u\mathrm{d}u = \left[\mathrm{e}^u\sin u\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^u\cos u\mathrm{d}u$

$$= \mathrm{e}\sin 1 - \left[\mathrm{e}^u\cos u\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^u\sin u\mathrm{d}u$$

$$= \mathrm{e}(\sin 1 - \cos 1) + 1 - \int_0^1 \mathrm{e}^u\sin u\mathrm{d}u,$$

所以，$\int_1^{\mathrm{e}}\sin(\ln x)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}}{2}(\sin 1 - \cos 1) + \frac{1}{2}.$

(11) $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}|\ln x|\mathrm{d}x = -\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1}\ln x\mathrm{d}x + \int_1^{\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}x$

$$= -\left[x\ln x\right]_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} + \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1}\mathrm{d}x + \left[x\ln x\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x$$

$$= 2 - \frac{2}{\mathrm{e}}.$$

(12) $\int_0^1(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\mathrm{d}x \xlongequal{x=\sin u} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+1}u\mathrm{d}u$

$$= \begin{cases} \dfrac{m}{m+1}\cdot\dfrac{m-2}{m-1}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & m\text{ 为奇数}, \\ \dfrac{m}{m+1}\cdot\dfrac{m-2}{m-1}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2}{3}, & m\text{ 为偶数}, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot m}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(m+1)}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & m\text{ 为奇数}, \\ \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot m}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(m+1)}, & m\text{ 为偶数}. \end{cases}$$

(13) 由教材本节的例 6,可得

$$J_m = \int_0^{\pi} x\sin^m x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^m x\mathrm{d}x.$$

而

$$\int_0^{\pi}\sin^m x\mathrm{d}x \xlongequal{x=\frac{\pi}{2}+t} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^m t\mathrm{d}t$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m t\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\mathrm{d}x,$$

故

$$J_m = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\mathrm{d}x.$$

从而有

$$J_m = \begin{cases} \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot (m-1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot m}\cdot \pi, & m \text{ 为大于 1 的奇数}, \\ \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot m}\cdot \dfrac{\pi^2}{2}, & m \text{ 为偶数}, \end{cases}$$

$$J_1 = \pi.$$

习题 5-4　反常积分

1. 判定下列各反常积分的收敛性,如果收敛,计算反常积分的值:

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4}$;　(2) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$;

(3) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x\,(a>0)$;　(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)(1+x^2)}$;

(5) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}\sin\omega t\mathrm{d}t\,(p>0,\omega>0)$;　(6) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$;

(7) $\int_0^1\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$;　(8) $\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2}$;

(9) $\int_1^2\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}$;　(10) $\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$.

解　(1) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4} = \left[-\frac{1}{3x^3}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{3}$.

(2) $\int_1^t\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_1^t = 2\sqrt{t}-2$,当 $t\to+\infty$ 时,该极限不存在,故该反常积分发散.

(3) $\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx = \left[-\frac{1}{a}e^{-ax}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a}$.

(4) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1-x}{1+x^2}\right)dx$

$$= \left[\frac{1}{4}\ln\frac{(1+x)^2}{1+x^2} + \frac{1}{2}\arctan x\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{\pi}{4}.$$

(5) $\int e^{-pt}\sin\omega t\,dt = -\frac{1}{p}\int \sin\omega t\,d(e^{-pt})$

$$= -\frac{1}{p}e^{-pt}\sin\omega t + \frac{\omega}{p}\int e^{-pt}\cos\omega t\,dt$$

$$= -\frac{1}{p}e^{-pt}\sin\omega t - \frac{\omega}{p^2}\int \cos\omega t\,d(e^{-pt})$$

$$= -\frac{1}{p}e^{-pt}\sin\omega t - \frac{\omega}{p^2}e^{-pt}\cos\omega t - \frac{\omega^2}{p^2}\int e^{-pt}\sin\omega t\,dt,$$

因此,

$$\int e^{-pt}\sin\omega t\,dt = \frac{-pe^{-pt}\sin\omega t - \omega e^{-pt}\cos\omega t}{p^2+\omega^2} + C,$$

故

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}\sin\omega t\,dt = \left[\frac{-pe^{-pt}\sin\omega t - \omega e^{-pt}\cos\omega t}{p^2+\omega^2}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

(6) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} + \int_0^{+\infty} \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}$

$$= [\arctan(x+1)]_{-\infty}^{0} + [\arctan(x+1)]_0^{+\infty} = \pi.$$

(7) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[-\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = 1$.

(8) $\int_0^t \frac{dx}{(1-x)^2} = \left[\frac{1}{1-x}\right]_0^t = \frac{1}{1-t} - 1$，当 $t\to 1$ 时极限不存在,故原反常积分发散.

(9) $\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}} \xlongequal{x=u^2+1} 2\int_0^1 (u^2+1)\,du = \frac{8}{3}$.

(10) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \int_1^e \frac{d(\ln x)}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} = [\arcsin \ln x]_1^e = \frac{\pi}{2}$.

2. 当 k 为何值时,反常积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 收敛?当 k 为何值时,这反常积分发散?又当

k 为何值时,这反常积分取得最小值?

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k} = \int \frac{\mathrm{d}(\ln x)}{(\ln x)^k} = \begin{cases} \ln \ln x + C, & k = 1, \\ -\frac{1}{(k-1)\ln^{k-1}x} + C, & k \neq 1, \end{cases}$

因此当$k \leqslant 1$ 时,反常积分发散;当 $k > 1$ 时,该反常积分收敛,此时

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k} = \left[-\frac{1}{(k-1)\ln^{k-1}x} \right]_2^{+\infty} = \frac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}.$$

记 $f(k) = \frac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}$, 则

$$f'(k) = -\frac{1}{(k-1)^2(\ln 2)^{2k-2}}[(\ln 2)^{k-1} + (k-1)(\ln 2)^{k-1}\ln \ln 2]$$

$$= -\frac{1+(k-1)\ln \ln 2}{(k-1)^2(\ln 2)^{k-1}},$$

令 $f'(k) = 0$,得 $k = 1 - \frac{1}{\ln \ln 2}$. 当 $1 < k < 1 - \frac{1}{\ln \ln 2}$ 时,$f'(k) < 0$,当 $k > 1 - \frac{1}{\ln \ln 2}$ 时,$f'(k) > 0$,故 $k = 1 - \frac{1}{\ln \ln 2}$ 为函数 $f(k)$ 的最小值点,即当 $k = 1 - \frac{1}{\ln \ln 2}$ 时所给反常积分取得最小值.

3. 利用递推公式计算反常积分 $I_n = \int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x (n \in \mathbf{N})$.

解 $I_0 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = [-\mathrm{e}^{-x}]_0^{+\infty} = 1.$

当 $n \geqslant 1$ 时,

$$I_n = -\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x}) = -[x^n\mathrm{e}^{-x}]_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = nI_{n-1},$$

故有 $I_n = n!$.

4. 计算反常积分 $\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x$.

解
$$\int \ln x\mathrm{d}x = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x = x\ln x - x + C,$$

因此

$$\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x = [x\ln x - x]_0^1 = -1 - \lim_{x \to 0^+}(x\ln x - x) = -1.$$

*习题 5-5 反常积分的审敛法 Γ 函数

1. 判定下列反常积分的收敛性:

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}\mathrm{d}x$; (2) $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$;

(3) $\int_1^{+\infty} \sin\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$； (4) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x|\sin x|}$；

(5) $\int_1^{+\infty} \frac{x\arctan x}{1+x^3}\mathrm{d}x$； (6) $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(\ln x)^3}$；

(7) $\int_0^1 \frac{x^4\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$； (8) $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$.

解 (1) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=1$，因此 $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{5}{3}}\cdot\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}=1$，因此 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$收敛.

(3) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot\sin\frac{1}{x^2}=1$，因此 $\int_1^{+\infty}\sin\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 收敛.

(4) 由于当 $x\geqslant 0$ 时，$\frac{1}{1+x|\sin x|}\geqslant\frac{1}{1+x}$，且 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x}$ 发散，因此 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x|\sin x|}$ 发散.

(5) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot\frac{x\arctan x}{1+x^3}=\frac{\pi}{2}$，因此 $\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{1+x^3}\mathrm{d}x$ 收敛.

(6) $x=1$ 是被积函数的瑕点. 由于 $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)\cdot\frac{1}{(\ln x)^3}=+\infty$，因此 $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{(\ln x)^3}$ 发散.

(7) $x=1$ 是被积函数的瑕点. 由于 $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{2}$，因此 $\int_0^1\frac{x^4\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$ 收敛.

(8) 被积函数有两个瑕点：$x=1$，$x=2$. 由于 $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}=-1$，因此 $\int_1^{1.5}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$收敛；又因为 $\lim\limits_{x\to2^-}(x-2)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}=1$，因此 $\int_{1.5}^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$收敛，故 $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$收敛.

2. 设反常积分 $\int_1^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛，证明反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

解 因为 $\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\frac{f^2(x)+\frac{1}{x^2}}{2}$，由于 $\int_1^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 也收敛，因此

$\int_1^{+\infty}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\mathrm{d}x$ 收敛. 即 $\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

3. 用 Γ 函数表示下列积分,并指出这些积分的收敛范围:

(1) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x\,(n>0)$; (2) $\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^{+\infty}x^m\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x\,(n\neq 0)$.

解 (1) 令 $u=x^n$,即 $x=u^{\frac{1}{n}}$,

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}u^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}u=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right),$$

在 $n>0$ 时都收敛.

(2) 令 $u=\ln\frac{1}{x}$,即 $x=\mathrm{e}^{-u}$,

$$\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p\mathrm{d}x=\int_{+\infty}^0-u^p\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}u^p\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\Gamma(p+1),$$

当 $p>-1$ 时收敛.

(3) 令 $u=x^n$,即 $x=u^{\frac{1}{n}}$.

当 $n>0$ 时, $\int_0^{+\infty}x^m\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{n}u^{\frac{m+1}{n}-1}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$,

当 $n<0$ 时, $\int_0^{+\infty}x^m\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x=\int_{+\infty}^0\frac{1}{n}u^{\frac{m+1}{n}-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=-\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$,

故 $\int_0^{+\infty}x^m\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x=\frac{1}{|n|}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$,当 $\frac{m+1}{n}>0$ 时收敛.

4. 证明 $\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2k-1)\sqrt{\pi}}{2^k}$,其中 $k\in\mathbf{N}_+$.

证 $$\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)=\frac{2k-1}{2}\Gamma\left(\frac{2k-1}{2}\right)=\frac{2k-1}{2}\cdot\frac{2k-3}{2}\Gamma\left(\frac{2k-3}{2}\right)$$

$$=\frac{2k-1}{2}\cdot\frac{2k-3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2k-1)}{2^k}\sqrt{\pi}.$$

5. 证明以下各式(其中 $n\in\mathbf{N}_+$):

(1) $2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)=2^n\Gamma(n+1)$;

(2) $1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)=\frac{\Gamma(2n)}{2^{n-1}\Gamma(n)}$;

(3) $\sqrt{\pi}\Gamma(2n)=2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$.

证 (1) $2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)=2^n n!=2^n\Gamma(n+1)$.

(2) $1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)=\frac{(2n-1)!}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n-2)}=\frac{\Gamma(2n)}{2^{n-1}(n-1)!}=\frac{\Gamma(2n)}{2^{n-1}\Gamma(n)}$.

（3）因为$\sqrt{\pi}\Gamma(2n)=(2n-1)!\ \sqrt{\pi}$，

$$\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=(n-1)!\ \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n}$$

$$=\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot(2n-2)}{2^{n-1}}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n}$$

$$=\frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}}\sqrt{\pi},$$

因此结论成立.

总习题五

1. 填空：

（1）函数$f(x)$在$[a,b]$上有界是$f(x)$在$[a,b]$上可积的__________条件，而$f(x)$在$[a,b]$上连续是$f(x)$在$[a,b]$上可积的__________条件；

（2）对$[a,+\infty)$上非负、连续的函数$f(x)$，它的变上限积分$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$在$[a,+\infty)$上有界是反常积分$\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$收敛的__________条件；

*（3）绝对收敛的反常积分$\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$一定__________；

（4）函数$f(x)$在$[a,b]$上有定义且$|f(x)|$在$[a,b]$上可积，此时积分$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$__________存在.

（5）设函数$f(x)$连续，则$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(t^2-x^2)\,\mathrm{d}t=$__________.

解　（1）必要，充分.　（2）充分必要.　（3）收敛.

（4）不一定. 例如$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ -1, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$则$|f(x)|=1$在$[a,b]$上可积，而$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$不存在.

（5）$xf(-x^2)$. 作换元$u=t^2-x^2$，则

$$\int_0^x tf(t^2-x^2)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^x f(t^2-x^2)\,\mathrm{d}(t^2-x^2)=\frac{1}{2}\int_{-x^2}^0 f(u)\,\mathrm{d}u$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{-x^2}f(u)\,\mathrm{d}u,$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(t^2-x^2)\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}f(-x^2)\cdot(-2x)=xf(-x^2).$$

2. 以下两题中给出了四个结论,从中选出一个正确的结论:

(1) 设 $I=\int_0^1\frac{x^4}{\sqrt{1+x}}dx$,则估计 I 值的大致范围为( ).

(A) $0\leqslant I\leqslant\frac{\sqrt{2}}{10}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{10}\leqslant I\leqslant\frac{1}{5}$

(C) $\frac{1}{5}<I<1$ (D) $I\geqslant 1$

(2) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数,则必有( ).

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数

解 (1) 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$\frac{1}{\sqrt{2}}x^4\leqslant\frac{x^4}{\sqrt{1+x}}\leqslant x^4$,因此

$$\frac{\sqrt{2}}{10}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2}}x^4dx\leqslant\int_0^1\frac{x^4}{\sqrt{1+x}}dx\leqslant\int_0^1x^4dx=\frac{1}{5},$$

故选(B).

(2) 记 $G(x)=\int_0^x f(t)dt$,则 $G(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,且

$$G(x)\text{是奇(偶)函数}\Leftrightarrow f(x)\text{是偶(奇)函数},$$

又 $F(x)=G(x)+C$,其中 C 是一常数,而常数是偶函数,故由奇、偶函数的性质知应选(A).

取周期函数 $f(x)=\cos x+1$,则 $F(x)=\sin x+x+C$ 不是周期函数,故(C)不成立;取单调增加函数 $f(x)=2x,x\in\mathbf{R}$,则 $F(x)=x^2+C$ 在 $\mathbf{R}$ 上不是单调函数,故(D)不成立.

3. 回答下列问题:

(1) 设函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)\geqslant g(x)$,那么 $\int_a^b[f(x)-g(x)]dx$ 在几何上表示什么?

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)\geqslant 0$,那么 $\int_a^b\pi f^2(x)dx$ 在几何上表示什么?

(3) 如果在时刻 t 以 $\varphi(t)$ 的流量(单位时间内流过的流体的体积或质量)向一水池注水,那么 $\int_{t_1}^{t_2}\varphi(t)dt$ 表示什么?

(4) 如果某国人口增长的速率为 $u(t)$,那么 $\int_{T_1}^{T_2}u(t)dt$ 表示什么?

（5）如果一公司经营某种产品的边际利润函数为 $P'(x)$，那么 $\int_{1\,000}^{2\,000} P'(x)\mathrm{d}x$ 表示什么？

解　（1）$\int_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$ 表示由曲线 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 以及直线 $x=a$，$x=b$ 所围成的图形的面积.

（2）$\int_a^b \pi f^2(x)\mathrm{d}x$ 表示 xOy 面上，由曲线 $y=f(x)$，$x=a$，$x=b$ 以及 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转一周而得到的旋转体的体积.

（3）$\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\mathrm{d}t$ 表示在时间段 $[t_1,t_2]$ 内向水池注入的水的总量.

（4）$\int_{T_1}^{T_2} u(t)\mathrm{d}t$ 表示该国在 $[T_1,T_2]$ 时间段内增加的人口总量.

（5）$\int_{1\,000}^{2\,000} P'(x)\mathrm{d}x$ 表示从经营第 1 000 个产品起一直到第 2 000 个产品的利润总量.

*4. 利用定积分的定义计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\dfrac{i}{n}}$；　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}(p>0)$.

解　（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\dfrac{i}{n}}=\int_0^1\sqrt{1+x}\mathrm{d}x=\left[\dfrac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\dfrac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{i}{n}\right)^p=\int_0^1 x^p\mathrm{d}x=\dfrac{1}{p+1}$.

5. 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$ 连续；　　（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(\arctan t)^2\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}$.

解　（1）记 $F(x)=x\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，

$$\lim_{x\to a}\frac{x}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=F'(a)=af(a).$$

（2）先证明所求极限为未定式 $\dfrac{\infty}{\infty}$. 由于当 $x>\tan 1$ 时，$\arctan x>1$，记 $c=\int_0^{\tan 1}(\arctan t)^2\mathrm{d}t$，则当 $x>\tan 1$ 时，有

$$\int_0^x(\arctan t)^2\mathrm{d}t=c+\int_{\tan 1}^x(\arctan t)^2\mathrm{d}t>c+\int_{\tan 1}^x\mathrm{d}t=c+x-\tan 1;$$

故有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x(\arctan t)^2\mathrm{d}t=+\infty$，从而利用洛必达法则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(\arctan t)^2\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\arctan x)^2}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}=\frac{\pi^2}{4}.$$

6. 下列计算是否正确,试说明理由:

(1) $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=-\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\left[-\arctan\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1}=-\frac{\pi}{2}$;

(2) 因为

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}\xlongequal{x=\frac{1}{t}}-\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1},$$

所以

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}=0.$$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=0.$

解 (1) 不对. 因为 $u=\frac{1}{x}$ 在 $[-1,1]$ 上有间断点 $x=0$,不符合换元法的要求. 而由习题 5-1 的第 12 题可知该积分一定为正,因此该积分计算不对. 事实上,

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=[\arctan x]_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}.$$

(2) 不对. 原因与(1)相同. 事实上,

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]_{-1}^{1}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

(3) 不对. 因为 $\int_0^A\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(1+A^2)$,当 $A\to+\infty$ 时极限不存在,故 $\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 发散,也就得到 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 发散.

7. 设 $x>0$,证明 $\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$.

证 记 $f(x)=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$,则当 $x>0$ 时,有

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0,$$

由拉格朗日中值定理的推论，得

$$f(x)\equiv C\quad(x>0).$$

而 $f(1)=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t+\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$，故 $C=\frac{\pi}{2}$，从而结论成立.

8. 设 $p>0$，证明

$$\frac{p}{1+p}<\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^p}<1.$$

证　由于当 $p>0,0<x<1$ 时，$0<\frac{1}{1+x^p}<1$，因此有 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^p}<1$. 又

$$1-\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^p}=\int_0^1\frac{x^p\mathrm{d}x}{1+x^p}<\int_0^1 x^p\mathrm{d}x=\frac{1}{1+p},$$

故有 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^p}>\frac{p}{1+p}$，原题得证.

9. 设 $f(x)$、$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上均连续，证明：

(1) $\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$（柯西－施瓦茨不等式）；

(2) $\left(\int_a^b[f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$（闵可夫斯基不等式）.

证　(1) 对任意实数 λ，有 $\int_a^b[f(x)+\lambda g(x)]^2\mathrm{d}x\geqslant 0$，即

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2\lambda\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+\lambda^2\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

上式左边是一个关于 λ 的二次三项式，它非负的条件是其系数判别式非正，即有

$$4\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2-4\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\leqslant 0,$$

从而本题得证.

(2)
$$\begin{aligned}\int_a^b[f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x&=\int_a^b[f^2(x)+2f(x)g(x)+g^2(x)]\mathrm{d}x\\&=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\\&=\left[\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2,\end{aligned}$$

从而本题得证.

10. 设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续,且$f(x)>0$. 证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant (b-a)^2.$$

证　根据上一题所证的柯西–施瓦茨不等式,有

$$\left(\int_a^b \sqrt{f(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b (\sqrt{f(x)})^2\mathrm{d}x \cdot \int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\right)^2\mathrm{d}x,$$

即得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant (b-a)^2.$$

11. 计算下列积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$;　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}(a>0)$;　　(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin 2x}\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$;　　(6) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 |\cos x| \mathrm{d}x$;　　(8) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x+1}+\mathrm{e}^{3-x}}$;

(9) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x^2-x|}}$;　　(10) $\displaystyle\int_0^x \max\{t^3,t^2,1\}\mathrm{d}t$.

解　(1) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\cos x}\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{2}\sec^2 \frac{x}{2}\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}(1+\cos x)$$

$$= \left[x\tan\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x - [\ln(1+\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \left[2\ln\cos\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \ln 2 = \frac{\pi}{2}.$$

(2) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x+\sin x)\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x\mathrm{d}x,$$

而

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x+\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left[\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{x=\frac{\pi}{4}-u} -\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}(\ln\sqrt{2}+\ln\cos u)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{\pi\ln 2}{8}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x,$$

故

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x=\frac{\pi\ln 2}{8}.$$

(3) $\displaystyle\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}\xlongequal{x=a\sin u}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos u\mathrm{d}u}{\sin u+\cos u}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u\mathrm{d}u}{\cos u+\sin u}$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos u\mathrm{d}u}{\sin u+\cos u}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u\mathrm{d}u}{\cos u+\sin u}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}u=\frac{\pi}{4}.$$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2x+\cos^2x-2\sin x\cos x}\,\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\cos x|\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x$$

$$=[\sin x+\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}}+[-\cos x-\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2(\sqrt{2}-1).$$

(5) 注意到$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\arctan\dfrac{\tan x}{\sqrt{2}}=\dfrac{\pi}{2}$,因此有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2x\mathrm{d}x}{\sec^2x+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\tan x)}{\tan^2x+2}$$

$$=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

(6) $\displaystyle\int_0^{\pi}x\sqrt{\cos^2x-\cos^4x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}x|\cos x|\sin x\mathrm{d}x$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}|\cos x|\sin x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin x\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\sin x\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}\sin^2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}\sin^2x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{\pi}{2}.$$

(7) $\int_0^{\pi} x^2 \mid \cos x \mid \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2 \cos x\mathrm{d}x$

$$= \left[x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \frac{\pi^2}{2} + 2\pi - 4.$$

(8) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x+1} + \mathrm{e}^{3-x}} = \frac{1}{\mathrm{e}^2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{x-1})}{\mathrm{e}^{2x-2}+1} = \frac{1}{\mathrm{e}^2}\left[\arctan(\mathrm{e}^{x-1})\right]_0^{+\infty}$

$$= \frac{1}{\mathrm{e}^2}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$$

(9) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mid x^2 - x \mid}} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x - x^2}} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}(2x-1)}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}$;

$$= \left[\arcsin(2x-1)\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{\pi}{2};$$

$$\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mid x^2 - x \mid}} = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - x}} = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}(2x-1)}{\sqrt{(2x-1)^2 - 1}}$$

$$= \left[\ln\left(2x - 1 + \sqrt{(2x-1)^2 - 1}\right)\right]_1^{\frac{3}{2}} = \ln(2+\sqrt{3}),$$

因此

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mid x^2 - x \mid}} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mid x^2 - x \mid}} + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mid x^2 - x \mid}}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \ln(2+\sqrt{3}).$$

(10) 当 $x < -1$ 时,

$$\int_0^x \max\{t^3, t^2, 1\}\mathrm{d}t = \int_0^{-1}\mathrm{d}t + \int_{-1}^{x} t^2\mathrm{d}t = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3};$$

当 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 时,

$$\int_0^x \max\{t^3, t^2, 1\}\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{d}t = x;$$

当 $x > 1$ 时,

$$\int_0^x \max\{t^3, t^2, 1\}\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{d}t + \int_1^x t^3\mathrm{d}t = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{4}.$$

因此

$$\int_0^x \max\{t^3,t^2,1\}\,dt=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{2}{3}, & x<-1,\\ x, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{3}{4}, & x>1.\end{cases}$$

12. 设 $f(x)$ 为连续函数,证明

$$\int_0^x f(t)(x-t)\,dt=\int_0^x\left(\int_0^t f(u)\,du\right)dt.$$

证 $$\int_0^x\left(\int_0^t f(u)\,du\right)dt=\left[t\int_0^t f(u)\,du\right]_0^x-\int_0^x tf(t)\,dt$$
$$=x\int_0^x f(u)\,du-\int_0^x tf(t)\,dt$$
$$=x\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x tf(t)\,dt=\int_0^x (x-t)f(t)\,dt.$$

本题也可利用原函数性质来证明,记等式左端的函数为 $F(x)$、右端的函数为 $G(x)$,则

$$F'(x)=\left(x\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x tf(t)\,dt\right)'=\int_0^x f(t)\,dt,$$

$$G'(x)=\int_0^x f(u)\,du=\int_0^x f(t)\,dt,$$

即 $F(x)$、$G(x)$ 都为函数 $\int_0^x f(t)\,dt$ 的原函数,因此它们至多只差一个常数,但由于 $F(0)=G(0)=0$,因此必有 $F(x)=G(x)$.

13. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)>0$,

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt+\int_b^x\frac{dt}{f(t)},x\in[a,b].$$

证明:(1) $F'(x)\geqslant 2$;(2) 方程 $F(x)=0$ 在区间 (a,b) 内有且仅有一个根.

证 (1) $F'(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}\geqslant 2\sqrt{f(x)\cdot\dfrac{1}{f(x)}}=2.$

(2) $F(a)=\displaystyle\int_b^a\frac{dt}{f(t)}=-\int_a^b\frac{dt}{f(t)}<0$,$F(b)=\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt>0$,由闭区间上连续函数性质可知 $F(x)$ 在区间 (a,b) 内必有零点,根据(1)可知函数 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调增加,从而零点惟一,即方程 $F(x)=0$ 在区间 (a,b) 内有且仅有一个根.

14. 求 $\int_0^2 f(x-1)\,dx$,其中

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^x}, & x<0,\\ \dfrac{1}{1+x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

解 $\int_0^2 f(x-1)\,dx \xlongequal{x=u+1} \int_{-1}^1 f(u)\,du = \int_{-1}^0 \frac{du}{1+e^u} + \int_0^1 \frac{du}{1+u}$

$$= \int_{-1}^0 \frac{e^{-u}\,du}{1+e^{-u}} + [\ln(1+u)]_0^1$$

$$= [-\ln(1+e^{-u})]_{-1}^0 + \ln 2 = \ln(1+e).$$

15. 设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续,$g(x)$在区间$[a,b]$上连续不变号. 证明至少存在一点$\xi\in[a,b]$,使下式成立:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx \quad (\text{积分第一中值定理}).$$

证　不妨设$g(x)\geqslant 0$,由定积分性质可知$\int_a^b g(x)\,dx\geqslant 0$. 记$f(x)$在$[a,b]$上的最大值为$M$、最小值为$m$,则有

$$mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x),$$

故有

$$m\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b mg(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

$$\leqslant \int_a^b Mg(x)\,dx = M\int_a^b g(x)\,dx.$$

当$\int_a^b g(x)\,dx=0$时,由上述不等式可知$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=0$,故结论成立.

当$\int_a^b g(x)\,dx>0$时,有

$$m\leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}\leqslant M,$$

由闭区间上连续函数性质,知存在$\xi\in[a,b]$,使得

$$f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx},$$

从而结论成立.

***16**. 证明:$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,dx = \frac{n-1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-2}e^{-x^2}\,dx\ (n>1)$,并用它证明:

$$\int_0^{+\infty} x^{2n+1}e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\Gamma(n+1)\quad (n\in\mathbf{N}).$$

证　当$n>1$时,

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-1}\,d(e^{-x^2})$$

$$= -\frac{1}{2}\left[x^{n-1}\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^{+\infty} + \frac{n-1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-2}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{n-1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-2}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

记 $I_n = \int_0^{+\infty} x^{2n+1}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$,则

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^{2n+1}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{2n+1-1}{2}\int_0^{+\infty} x^{2n-1}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$$

$$= n\int_0^{+\infty} x^{2n-1}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = nI_{n-1},$$

因此有

$$I_n = n!I_0 = n!\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = n!\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2}n! = \frac{1}{2}\Gamma(n+1).$$

*17. 判断下列反常积分的收敛性:

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$; (2) $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$;

(3) $\int_2^{+\infty}\frac{\cos x}{\ln x}\mathrm{d}x$; (4) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}$.

解 (1) $x=0$ 为被积函数 $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}$的瑕点,而 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{2}}\cdot f(x)=1$,因此 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;又由于 $|f(x)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x^3}}$,而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$ 收敛,故 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,因此 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) $x=2$ 为被积函数 $f(x)=\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$的瑕点,而

$$\lim_{x\to 2^+}(x-2)^{\frac{1}{3}}\cdot f(x)=\frac{1}{2},$$

因此 $\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;又由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{5}{3}}\cdot f(x)=1$,因此 $\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$收敛,故 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$收敛.

(3) $\int_2^{+\infty}\frac{\cos x}{\ln x}\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}(\sin x) = \left[\frac{\sin x}{\ln x}\right]_2^{+\infty} + \int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x$

$$= \int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x - \frac{\sin 2}{\ln 2},$$

又由于 $\left|\dfrac{\sin x}{x\ln^2 x}\right| \leqslant \dfrac{1}{x\ln^2 x}$，而 $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^2 x}dx$ 收敛，故 $\int_2^{+\infty}\left|\dfrac{\sin x}{x\ln^2 x}\right|dx$ 收敛，即 $\int_2^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x\ln^2 x}dx$ 绝对收敛，因此 $\int_2^{+\infty}\dfrac{\cos x}{\ln x}dx$ 收敛.

(4) $x=0, x=1, x=2$ 为被积函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}$ 的瑕点，$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{2}{3}}f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$，$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{\frac{1}{3}}f(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to 2}f(x)(x-2)^{\frac{1}{3}}=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$，故 $\int_0^3 f(x)dx$ 收敛；又由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{4}{3}}\cdot f(x)=1$，因此 $\int_3^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}$ 收敛，故 $\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}$ 收敛.

*18. 计算下列反常积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx$； (2) $\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$ $(\alpha\geqslant 0)$.

解 (1) $x=0$ 为被积函数 $f(x)=\ln\sin x$ 的瑕点，而

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\cdot f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin x}{x^{-\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cot x}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-2x^{\frac{3}{2}}}{\tan x}=0,$$

故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx$ 收敛.

又 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx$，而

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx \xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-u}\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}-\ln\cos u du=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos u du,$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\ln\sin 2x-\ln 2)dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin 2x dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2 dx\\&\xlongequal{u=2x}\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin u du-\frac{\pi}{4}\ln 2,\end{aligned}$$

故

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

（2）记被积函数为$f(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$，则当 $\alpha=0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot f(x)=\dfrac{1}{2}$，当 $\alpha>0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot f(x)=0$，因此当 $\alpha\geqslant 0$ 时，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$收敛.

令 $x=\dfrac{1}{t}$，得到$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}=\int_{+\infty}^0\frac{-t^\alpha\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}$，又

$$\int_{+\infty}^0\frac{-t^\alpha\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}=\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)},$$

故

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}&=\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\\&=\frac{1}{2}\left[\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}+\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\right]\\&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{1}{2}[\arctan x]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

第六章

定积分的应用

习题 6－2　定积分在几何学上的应用

1. 求图 6－1 中各阴影部分的面积:

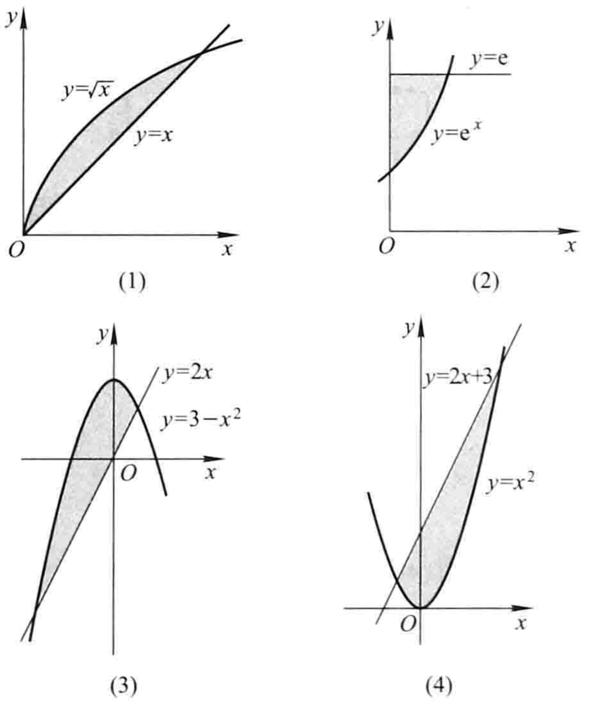


图 6－1

解　(1) 解方程组 $\begin{cases} y=\sqrt{x}, \\ y=x, \end{cases}$ 得到交点坐标为 $(0,0)$ 和 $(1,1)$.

如果取 x 为积分变量，则 x 的变化范围为 $[0,1]$，相应于 $[0,1]$ 上的任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的窄条面积近似于高为 $\sqrt{x}-x$、底为 $\mathrm{d}x$ 的窄矩形的面积，因此有

$$A=\int_0^1(\sqrt{x}-x)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{6}.$$

如果取 y 为积分变量，则 y 的变化范围为 $[0,1]$，相应于 $[0,1]$ 上的任一小区间 $[y,y+\mathrm{d}y]$ 的窄条面积近似于高为 $\mathrm{d}y$、底为 $y-y^2$ 的窄矩形的面积，因此有

$$A=\int_0^1(y-y^2)\,\mathrm{d}y=\left[\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right]_0^1=\frac{1}{6}.$$

(2) 取 x 为积分变量,则易知 x 的变化范围为 $[0,1]$,相应于 $[0,1]$ 上的任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的窄条面积近似于高为 $\mathrm{e}-\mathrm{e}^x$、底为 $\mathrm{d}x$ 的窄矩形的面积,因此有

$$A=\int_0^1(\mathrm{e}-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=[\mathrm{e}x-\mathrm{e}^x]_0^1=1.$$

如果取 y 为积分变量,则易知 y 的变化范围为 $[1,\mathrm{e}]$,相应于 $[1,\mathrm{e}]$ 上的任一小区间 $[y,y+\mathrm{d}y]$ 的窄条面积近似于高为 $\mathrm{d}y$、底为 $\ln y$ 的窄矩形的面积,因此有

$$A=\int_1^{\mathrm{e}}\ln y\mathrm{d}y=[y\ln y]_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}y=\mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)=1.$$

(3) 解方程组 $\begin{cases}y=2x,\\ y=3-x^2,\end{cases}$ 得到交点坐标为 $(-3,-6)$ 和 $(1,2)$.

如果取 x 为积分变量,则 x 的变化范围为 $[-3,1]$,相应于 $[-3,1]$ 上的任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的窄条面积近似于高为 $(3-x^2)-2x=-x^2-2x+3$、底为 $\mathrm{d}x$ 的窄矩形的面积,因此有

$$A=\int_{-3}^1(-x^2-2x+3)\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right]_{-3}^1=\frac{32}{3}.$$

如果用 y 为积分变量,则 y 的变化范围为 $[-6,3]$,但是在 $[-6,2]$ 上的任一小区间 $[y,y+\mathrm{d}y]$ 的窄条面积近似于高为 $\mathrm{d}y$、底为 $\frac{y}{2}-(-\sqrt{3-y})=\frac{y}{2}+\sqrt{3-y}$ 的窄矩形的面积,在 $[2,3]$ 上的任一小区间 $[y,y+\mathrm{d}y]$ 的窄条面积近似于高为 $\mathrm{d}y$、宽为 $\sqrt{3-y}-(-\sqrt{3-y})=2\sqrt{3-y}$ 的窄矩形的面积,因此有

$$\begin{aligned}A&=\int_{-6}^2\left(\frac{y}{2}+\sqrt{3-y}\right)\mathrm{d}y+\int_2^3 2\sqrt{3-y}\mathrm{d}y\\&=\left[\frac{y^2}{4}-\frac{2}{3}(3-y)^{\frac{3}{2}}\right]_{-6}^2+\left[-\frac{4}{3}(3-y)^{\frac{3}{2}}\right]_2^3=\frac{32}{3},\end{aligned}$$

从这里可看到本小题以 x 为积分变量较容易做. 原因是本小题中的图形边界曲线,若分为上下两段的话,则为 $y=2x$ 和 $y=3-x^2$;而分为左右两段的话,则为 $x=-\sqrt{3-y}$ 和 $x=\begin{cases}\dfrac{y}{2}, & -6\leqslant y<2,\\ \sqrt{3-y}, & 2\leqslant y\leqslant 3,\end{cases}$ 其中右段曲线的表示相对比较复杂,也就导致计算形式复杂.

(4) 解方程组 $\begin{cases}y=2x+3,\\ y=x^2,\end{cases}$ 得到交点坐标为 $(-1,1)$ 和 $(3,9)$,与(3)相同的原因,本小题以 x 为积分变量计算较容易. 取 x 为积分变量,则 x 的变化范围为 $[-1,3]$,相应于 $[-1,3]$ 上的任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的窄条面积近似于高为 $2x+3-x^2$、底为 $\mathrm{d}x$ 的窄矩形的面积,因此有

$$A=\int_{-1}^{3}(2x+3-x^2)\,dx=\left[x^2+3x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{3}=\frac{32}{3}.$$

2. 求由下列各曲线所围成的图形的面积：

(1) $y=\frac{1}{2}x^2$ 与 $x^2+y^2=8$(两部分都要计算)；

(2) $y=\frac{1}{x}$与直线 $y=x$ 及 $x=2$；

(3) $y=e^x, y=e^{-x}$与直线 $x=1$；

(4) $y=\ln x$, y 轴与直线 $y=\ln a, y=\ln b\,(b>a>0)$.

解　(1) 如图 6-2,先计算图形 D_1(阴影部分)的面积,容易求得 $y=\frac{1}{2}x^2$ 与 $x^2+y^2=8$ 的交点为$(-2,2)$和$(2,2)$. 取 x 为积分变量,则 x 的变化范围为$[-2,2]$,相应于$[-2,2]$上的任一小区间$[x,x+dx]$的窄条面积近似于高为$\sqrt{8-x^2}-\frac{1}{2}x^2$、底为 dx 的窄矩形的面积,因此有

$$A_1=\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{1}{2}x^2\right)dx=2\int_{0}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{1}{2}x^2\right)dx$$

$$=2\left[\frac{x}{2}\sqrt{8-x^2}+4\arcsin\frac{x}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{6}x^3\right]_0^2=2\pi+\frac{4}{3},$$

图形 D_2 的面积为

$$A_2=\pi(2\sqrt{2})^2-\left(2\pi+\frac{4}{3}\right)=6\pi-\frac{4}{3}.$$

(2) 如图 6-3,取 x 为积分变量,则 x 的变化范围为$[1,2]$,相应于$[1,2]$上的任一小区间$[x,x+dx]$的窄条面积近似于高为 $x-\frac{1}{x}$、底为 dx 的窄矩形的面积,因此有

$$A=\int_{1}^{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\left[\frac{1}{2}x^2-\ln x\right]_1^2=\frac{3}{2}-\ln 2.$$

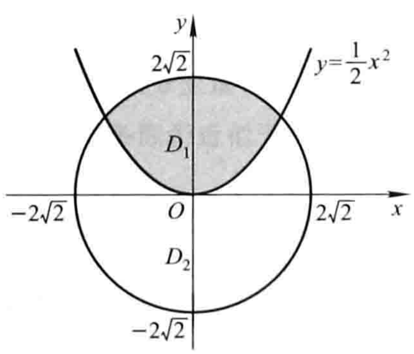


图 6-2

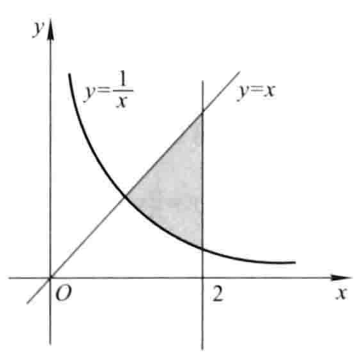


图 6-3

（3）如图 6－4，取 x 为积分变量，则 x 的变化范围为 $[0,1]$，相应于 $[0,1]$ 上的任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的窄条面积近似于高为 $\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}$、底为 $\mathrm{d}x$ 的窄矩形的面积，因此有

$$A=\int_{0}^{1}(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}-2.$$

（4）如图 6－5，取 y 为积分变量，则 y 的变化范围为 $[\ln a,\ln b]$，相应于 $[\ln a,\ln b]$ 上的任一小区间 $[y,y+\mathrm{d}y]$ 的窄条面积近似于高为 $\mathrm{d}y$、底为 e^{y} 的窄矩形的面积，因此有

$$A=\int_{\ln a}^{\ln b}\mathrm{e}^{y}\,\mathrm{d}y=[\mathrm{e}^{y}]_{\ln a}^{\ln b}=b-a.$$

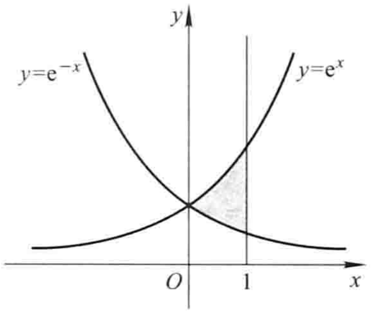


图 6－4

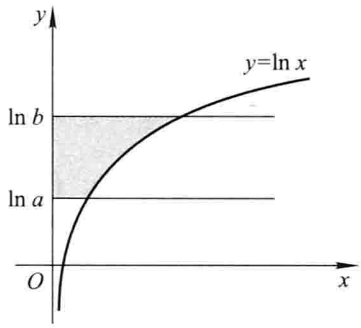


图 6－5

3. 求抛物线 $y=-x^{2}+4x-3$ 及其在点 $(0,-3)$ 和 $(3,0)$ 处的切线所围成的图形的面积.

解　首先求得导数 $y'\big|_{x=0}=4$，$y'\big|_{x=3}=-2$，故抛物线在点 $(0,-3)$，$(3,0)$ 处的切线分别为 $y=4x-3$，$y=-2x+6$，容易求得这两条切线交点为 $\left(\dfrac{3}{2},3\right)$（如图 6－6），因此所求面积为

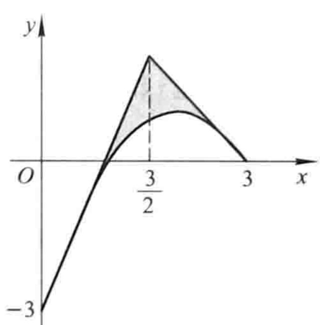


图 6－6

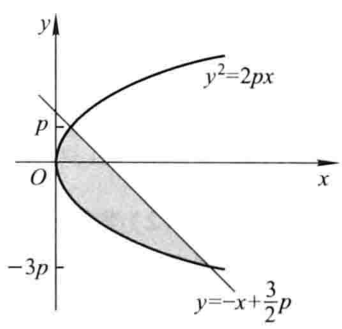


图 6－7

$$A=\int_{0}^{\frac{3}{2}}[4x-3-(-x^{2}+4x-3)]\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{3}{2}}^{3}[-2x+6-(-x^{2}+4x-3)]\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{9}{4}.$$

4. 求抛物线 $y^2 = 2px$ 及其在点 $\left(\frac{p}{2}, p\right)$ 处的法线所围成的图形的面积.

解 利用隐函数求导方法,抛物线方程 $y^2 = 2px$ 两端分别对 x 求导,得

$$2yy' = 2p,$$

即得 $y'\Big|_{\left(\frac{p}{2}, p\right)} = 1$,故法线斜率为 $k = -1$,从而得到法线方程为 $y = -x + \frac{3}{2}p$(如图 6-7),因此所求面积为

$$A = \int_{-3p}^{p}\left(-y + \frac{3}{2}p - \frac{1}{2p}y^2\right)\mathrm{d}y = \left[-\frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{2}py - \frac{1}{6p}y^3\right]_{-3p}^{p} = \frac{16}{3}p^2.$$

5. 求由下列各曲线所围成的图形的面积:

(1) $\rho = 2a\cos\theta$;　　(2) $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$;

(3) $\rho = 2a(2 + \cos\theta)$.

解 (1) $A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(2a\cos\theta)^2 \mathrm{d}\theta = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \mathrm{d}\theta = \pi a^2.$

(2) 由对称性可知,所求面积为第一象限部分面积的 4 倍,记曲线 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ 上的点为 (x, y),因此

$$\begin{aligned} A &= 4\int_0^a y\mathrm{d}x = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} [a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)]\mathrm{d}t \\ &= 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 t - \sin^6 t)\mathrm{d}t = \frac{3}{8}\pi a^2. \end{aligned}$$

注 对于参数方程的处理方式一般可采用本题的方法,首先根据问题化为积分(其中记曲线上的点为 (x, y)),再根据参数方程进行换元,即可化为关于参数的积分进行计算.

$$\begin{aligned} (3)\ A &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}[2a(2 + \cos\theta)]^2 \mathrm{d}\theta = 2a^2 \int_0^{2\pi} (4 + 4\cos\theta + \cos^2\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= 2a^2 \int_0^{2\pi} (4 + \cos^2\theta)\mathrm{d}\theta = 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 + \cos^2\theta)\mathrm{d}\theta = 18\pi a^2. \end{aligned}$$

6. 求由摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ 的一拱 $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 与横轴所围成的图形的面积.

解 本题做法与题 5(2)类似.以 x 为积分变量,则 x 的变化范围为 $[0, 2\pi a]$,设摆线上的点为 (x, y),则所求面积为

$$A = \int_0^{2\pi a} y\mathrm{d}x,$$

再根据参数方程换元,令 $x = a(t - \sin t)$,则 $y = a(1 - \cos t)$,因此有

$$A = \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 \mathrm{d}t = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\mathrm{d}t$$

$$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos^2 t)\,\mathrm{d}t=3\pi a^2.$$

7. 求对数螺线 $\rho=a\mathrm{e}^{\theta}(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 及射线 $\theta=\pi$ 所围成的图形的面积.

解　$A=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(a\mathrm{e}^{\theta})^2\mathrm{d}\theta=\frac{a^2}{4}[\mathrm{e}^{2\theta}]_{-\pi}^{\pi}=\frac{a^2}{4}(\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi}).$

8. 求下列各曲线所围成图形的公共部分的面积：

(1) $\rho=3\cos\theta$ 及 $\rho=1+\cos\theta$;

(2) $\rho=\sqrt{2}\sin\theta$ 及 $\rho^2=\cos 2\theta$.

解　(1) 首先求出两曲线交点为 $\left(\frac{3}{2},\frac{\pi}{3}\right)$、$\left(\frac{3}{2},-\frac{\pi}{3}\right)$，由于图形关于极轴的对称性(如图 6－8)，因此所求面积为极轴上面部分面积的 2 倍，即得

$$A=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}(1+\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(3\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta\right]=\frac{5\pi}{4}.$$

(2) 首先求出两曲线交点为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{6}\right)$ 和 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{5\pi}{6}\right)$，由于图形的对称性(如图 6－9)，因此有

$$A=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}(\sqrt{2}\sin\theta)^2\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta\right]=\frac{\pi}{6}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

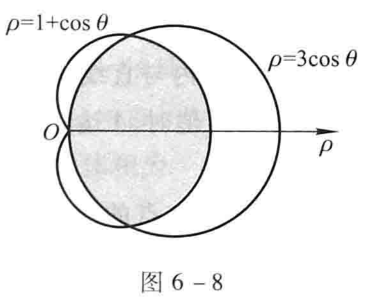


图 6－8

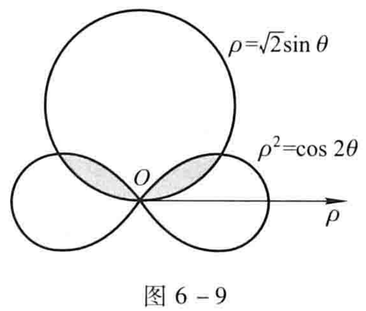


图 6－9

9. 求位于曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 下方，该曲线过原点的切线的左方以及 x 轴上方之间的图形的面积.

解　先求曲线过原点的切线方程，设切点为 (x_0,y_0)，其中 $y_0=\mathrm{e}^{x_0}$，则切线的斜率为 e^{x_0}，故切线方程为

$$y-y_0=\mathrm{e}^{x_0}(x-x_0),$$

由于该切线过原点，因此有 $y_0=\mathrm{e}^{x_0}x_0$，解得 $x_0=1,y_0=\mathrm{e}$，即切线方程为

$$y=\mathrm{e}x.$$

如图 6－10 可知所求面积为

$$A=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int_0^1(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x)\mathrm{d}x$$

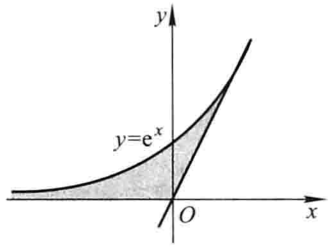


图 6－10

$$=\left[e^x\right]_{-\infty}^{0}+\left[e^x-\frac{e}{2}x^2\right]_0^1=\frac{e}{2}.$$

10. 求由抛物线 $y^2=4ax$ 与过焦点的弦所围成的图形面积的最小值.

解　抛物线的焦点为 $(a,0)$，设过焦点的直线为 $y=k(x-a)$，则该直线与抛物线的交点的纵坐标为 $y_1=\dfrac{2a-2a\sqrt{1+k^2}}{k}$，$y_2=\dfrac{2a+2a\sqrt{1+k^2}}{k}$，面积为

$$A=\int_{y_1}^{y_2}\left(a+\frac{y}{k}-\frac{y^2}{4a}\right)dy=a(y_2-y_1)+\frac{y_2^2-y_1^2}{2k}-\frac{y_2^3-y_1^3}{12a}$$

$$=\frac{8a^2(1+k^2)^{3/2}}{3k^3}=\frac{8a^2}{3}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)^{3/2},$$

故面积是 k 的单调减少函数，因此其最小值在 $k\to\infty$ 即弦为 $x=a$ 时取到，最小值为 $\dfrac{8}{3}a^2$.

11. 已知抛物线 $y=px^2+qx$（其中 $p<0,q>0$）在第一象限内与直线 $x+y=5$ 相切，且此抛物线与 x 轴所围成的图形的面积为 A. 问 p 和 q 为何值时，A 达到最大值，并求出此最大值.

解　依题意知，抛物线如图 6－11 所示，求得它与 x 轴交点的横坐标为 $x_1=0$，$x_2=-\dfrac{q}{p}$.

抛物线与 x 轴所围成的图形面积为

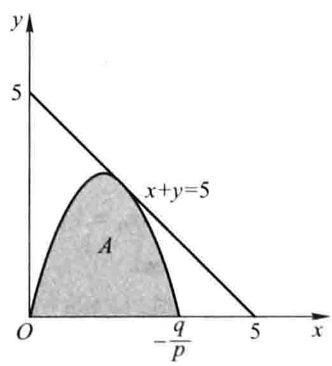


图 6－11

$$A=\int_0^{-\frac{q}{p}}(px^2+qx)\mathrm{d}x=\left[\frac{p}{3}x^3+\frac{q}{2}x^2\right]_0^{-\frac{q}{p}}=\frac{q^3}{6p^2}.$$

因直线 $x+y=5$ 与抛物线 $y=px^2+qx$ 相切,故它们有惟一交点. 由方程组

$$\begin{cases}x+y=5,\\ y=px^2+qx,\end{cases}$$

得 $px^2+(q+1)x-5=0$,其判别式 $\Delta=(q+1)^2+20p=0$,解得 $p=-\frac{1}{20}(1+q)^2$,代入面积 A,得

$$A(q)=\frac{200q^3}{3(1+q)^4}.$$

令 $A'(q)=\frac{200q^2(3-q)}{3(q+1)^5}=0$,得惟一驻点 $q=3$. 当 $0<q<3$ 时,$A'(q)>0$,当 $q>3$ 时,$A'(q)<0$. 于是,当 $q=3$ 时,$A(q)$ 取极大值,也是最大值. 此时 $p=-\frac{4}{5}$,最大值 $A=\frac{225}{32}$.

12. 由 $y=x^3$,$x=2$,$y=0$ 所围成的图形,分别绕 x 轴及 y 轴旋转,计算所得两个旋转体的体积.

解 (1) 图形绕 x 轴旋转,该体积为

$$V=\int_0^2\pi(x^3)^2\mathrm{d}x=\frac{128}{7}\pi.$$

(2) 图形绕 y 轴旋转,则该立体可看作圆柱体(即由 $x=2$,$y=8$,$x=0$,$y=0$所围成的图形绕 y 轴所得的立体)减去由曲线 $x=\sqrt[3]{y}$,$y=8$,$x=0$ 所围成的图形绕 y 轴所得的立体,因此体积为

$$V=\pi\cdot2^2\cdot8-\int_0^8\pi(\sqrt[3]{y})^2\mathrm{d}y=\frac{64}{5}\pi.$$

13. 把星形线 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$所围成的图形绕 x 轴旋转,计算所得旋转体的体积.

解 记 x 轴上方部分星形线的函数为 $y=y(x)$,则所求体积为曲线 $y=y(x)$ 与 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转而成,故有

$$V=\int_{-a}^{a}\pi y^2\mathrm{d}x.$$

由于星形线的参数方程为 $x=a\cos^3t$,$y=a\sin^3t$,所以对上述积分作换元 $x=a\cos^3t$,便得

$$V=\int_{\pi}^{0}\pi(a\sin^3t)^2(a\cos^3t)'\mathrm{d}t=\frac{32}{105}\pi a^3.$$

14. 用积分方法证明图 6 - 12 中球缺的体积为

$$V=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right).$$

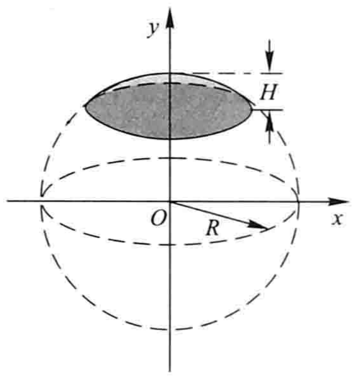


图 6－12

解　该立体可看作由曲线 $x=\sqrt{R^2-y^2}$，$y=R-H$ 和 $x=0$ 所围成的图形绕 y 轴旋转所得，因此体积为

$$V=\int_{R-H}^{R}\pi(\sqrt{R^2-y^2})^2\mathrm{d}y=\pi\left[R^2y-\frac{1}{3}y^3\right]_{R-H}^{R}$$

$$=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right).$$

15. 求下列已知曲线所围成的图形，按指定的轴旋转所产生的旋转体的体积：

(1) $y=x^2$，$x=y^2$，绕 y 轴；

(2) $y=\arcsin x$，$x=1$，$y=0$，绕 x 轴；

(3) $x^2+(y-5)^2=16$，绕 x 轴；

(4) 摆线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ 的一拱，$y=0$，绕直线 $y=2a$.

解　(1) $V=\int_0^1[\pi(\sqrt{y})^2-\pi(y^2)^2]\mathrm{d}y=\frac{3}{10}\pi$.

(2) $$V=\int_0^1\pi(\arcsin x)^2\mathrm{d}x=[\pi x(\arcsin x)^2]_0^1-2\pi\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi^3}{4}-2\pi\left\{[-\sqrt{1-x^2}\arcsin x]_0^1+\int_0^1\mathrm{d}x\right\}=\frac{\pi^3}{4}-2\pi.$$

(3) 该立体为由曲线 $y=5+\sqrt{16-x^2}$，$x=-4$，$x=4$，$y=0$ 所围成图形绕 x 轴旋转所得立体减去由曲线 $y=5-\sqrt{16-x^2}$，$x=-4$，$x=4$，$y=0$ 所围成图形绕 x 轴旋转所得立体，因此体积为

$$V=\int_{-4}^{4}\pi(5+\sqrt{16-x^2})^2\mathrm{d}x-\int_{-4}^{4}\pi(5-\sqrt{16-x^2})^2\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-4}^{4}20\pi\sqrt{16-x^2}\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{x=4\sin t}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}320\pi\cos^2t\mathrm{d}t=640\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\mathrm{d}t=160\pi^2.$$

（4）该立体可看作由直线 $y=2a,y=0,x=0,x=2\pi a$ 所围成的图形绕 $y=2a$ 旋转所得的圆柱体减去由摆线以及直线 $y=2a,x=0,x=2\pi a$ 所围成的图形绕 $y=2a$ 旋转所得的立体，记摆线上的点为 (x,y)，则体积为

$$V=\pi(2a)^2(2\pi a)-\int_0^{2\pi a}\pi(2a-y)^2\mathrm{d}x=8\pi^2a^3-\int_0^{2\pi a}\pi(2a-y)^2\mathrm{d}x,$$

再根据摆线的参数方程进行换元，即作换元 $x=a(t-\sin t)$，此时 $y=a(1-\cos t)$，因此有

$$\begin{aligned}V&=8\pi^2a^3-\int_0^{2\pi}\pi[2a-a(1-\cos t)]^2a(1-\cos t)\mathrm{d}t\\&=8\pi^2a^3-\pi a^3\int_0^{2\pi}(1+\cos t-\cos^2t-\cos^3t)\mathrm{d}t\\&=8\pi^2a^3-4\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\mathrm{d}t=7\pi^2a^3.\end{aligned}$$

16. 求圆盘 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 绕 $x=-b(b>a>0)$ 旋转所成旋转体的体积.

解　记由曲线 $x=\sqrt{a^2-y^2},x=-b,y=-a,y=a$ 围成的图形绕 $x=-b$ 旋转所得旋转体的体积为 V_1，由曲线 $x=-\sqrt{a^2-y^2},x=-b,y=-a,y=a$ 围成的图形绕 $x=-b$ 旋转所得旋转体的体积为 V_2，则所求体积为

$$\begin{aligned}V&=V_1-V_2=\int_{-a}^{a}\pi(\sqrt{a^2-y^2}+b)^2\mathrm{d}y-\int_{-a}^{a}\pi(-\sqrt{a^2-y^2}+b)^2\mathrm{d}y\\&=\int_{-a}^{a}4\pi b\sqrt{a^2-y^2}\mathrm{d}y\xlongequal{y=a\sin t}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\pi a^2b\cos^2t\mathrm{d}t\\&=8\pi a^2b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\mathrm{d}t=2\pi^2a^2b.\end{aligned}$$

17. 设有一截锥体，其高为 h，上、下底均为椭圆，椭圆的轴长分别为 $2a$、$2b$ 和 $2A$、$2B$，求这截锥体的体积.

解　用与下底相距 x 且平行于底面的平面去截该立体得到一个椭圆，记其半轴长分别为 u、v，则

$$u=\frac{a-A}{h}x+A,\quad v=\frac{b-B}{h}x+B,$$

该椭圆面积为 $\pi\left(\frac{a-A}{h}x+A\right)\left(\frac{b-B}{h}x+B\right)$，因此体积为

$$\begin{aligned}V&=\int_0^h\pi\left(\frac{a-A}{h}x+A\right)\left(\frac{b-B}{h}x+B\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{6}\pi h[2(ab+AB)+aB+bA].\end{aligned}$$

18. 计算底面是半径为 R 的圆，而垂直于底面上一条固定直径的所有截面都是等边三角形的立体体积（图 6－13）.

解　以 x 为积分变量，则 x 的变化范围为 $[-R,R]$，相应的截面等边三角形边长为

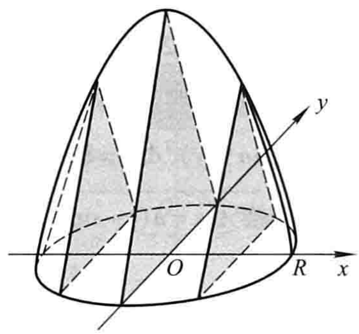


图 6-13

$2\sqrt{R^2-x^2}$,面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{R^2-x^2})^2=\sqrt{3}(R^2-x^2)$,因此体积为

$$V=\int_{-R}^{R}\sqrt{3}(R^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4\sqrt{3}}{3}R^3.$$

19. 证明:由平面图形 $0\leqslant a\leqslant x\leqslant b, 0\leqslant y\leqslant f(x)$ 绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x.$$

证　取横坐标 x 为积分变量,与区间$[a,b]$上任一小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$相应的窄条图形绕 y 轴旋转所成的旋转体近似于一圆柱壳,柱壳的高为 $f(x)$,厚为 $\mathrm{d}x$,底面圆周长为 $2\pi x$,故其体积近似等于 $2\pi xf(x)\mathrm{d}x$,从而由元素法即得结论.

20. 利用题 19 的结论,计算曲线 $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 和 x 轴所围成的图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

解　$V=2\pi\int_0^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x=\pi^2\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=2\pi^2.$

注　在计算积分时,这里利用了教材第五章第三节中的例 6 的结论 $\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x.$

21. 设由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a, x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形为 D_1,由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形为 D_2,其中$0<a<2$(图 6-14).

(1) 试求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1, D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2;

(2) 问当 a 为何值时, V_1+V_2 取得最大值? 试求此最大值.

解　(1) $V_1=\pi\int_a^2(2x^2)^2\mathrm{d}x=\frac{4\pi}{5}(32-a^5)$;

$$V_2=\pi a^2\cdot 2a^2-\pi\int_0^{2a^2}\frac{y}{2}\mathrm{d}y=2\pi a^4-\pi a^4=\pi a^4.$$

(2) 设

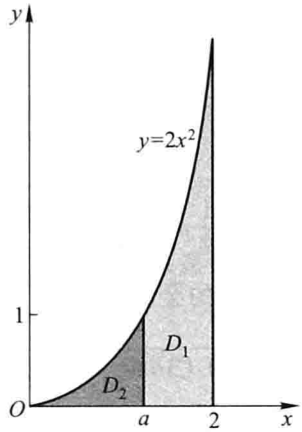


图 6－14

$$V=V_1+V_2=\frac{4\pi}{5}(32-a^5)+\pi a^4,$$

由 $V'=4\pi a^3(1-a)=0$，解得区间 $(0,2)$ 内惟一驻点 $a=1$.

当 $0<a<1$ 时，$V'>0$；当 $a>1$ 时，$V'<0$. 因此 $a=1$ 是极大值点也是最大值点，此时 V_1+V_2 取得最大值 $\frac{129}{5}\pi$.

22. 计算曲线 $y=\ln x$ 相应于 $\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{8}$ 的一段弧的长度.

解　$s=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=\sqrt{u^2-1}} \int_2^3\frac{u^2}{u^2-1}\mathrm{d}u$

$=\left[u+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right]_2^3=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$

23. 计算半立方抛物线 $y^2=\frac{2}{3}(x-1)^3$ 被抛物线 $y^2=\frac{x}{3}$ 截得的一段弧的长度.

解　联立两个方程 $\begin{cases}y^2=\frac{2}{3}(x-1)^3,\\ y^2=\frac{x}{3},\end{cases}$ 得到两条曲线的交点为 $\left(2,\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ 和 $\left(2,-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$，由于曲线关于 x 轴对称，因此所求弧段长为第一象限部分的 2 倍，第一象限部分弧段为 $y=\sqrt{\frac{2}{3}(x-1)^3}\,(1\leqslant x\leqslant 2)$，$y'=\sqrt{\frac{3}{2}(x-1)}$，故所求弧的长度为

$$s=2\int_1^2\sqrt{1+\frac{3}{2}(x-1)}\,\mathrm{d}x=\sqrt{6}\left[\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2=\frac{8}{9}\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right].$$

24. 计算抛物线 $y^2=2px$ 从顶点到这曲线上的一点 $M(x,y)$ 的弧长.

解　不妨设 $p>0$，由于顶点到 (x,y) 的弧长与顶点到 $(x,-y)$ 的弧长相等，因此不妨设 $y>0$，故有

$$s=\int_0^y\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y=\int_0^y\sqrt{1+\left(\frac{y}{p}\right)^2}\,\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{p}\left[\frac{1}{2}y\sqrt{p^2+y^2}+\frac{1}{2}p^2\ln(y+\sqrt{p^2+y^2})\right]_0^y$$
$$=\frac{1}{2p}y\sqrt{p^2+y^2}+\frac{1}{2}p\ln\frac{y+\sqrt{p^2+y^2}}{p}.$$

25. 计算星形线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ 的全长.

解　$$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2+(3a\sin^2 t\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$$
$$=12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,\mathrm{d}t=6a.$$

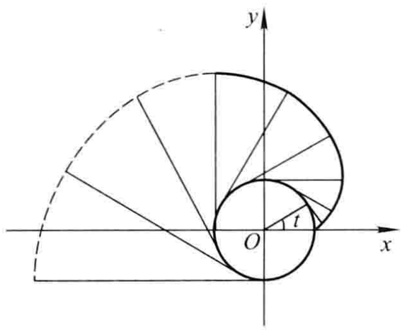


图 6－15

26. 将绕在圆(半径为 a)上的细线放开拉直,使细线与圆周始终相切(图6－15),细线端点画出的轨迹叫做圆的渐伸线,它的方程为

$$x=a(\cos t+t\sin t),\quad y=a(\sin t-t\cos t).$$

算出这曲线上相应于 $0\leqslant t\leqslant\pi$ 的一段弧的长度.

解　$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=at\cos t,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=at\sin t$,因此有

$$s=\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}at\,\mathrm{d}t=\frac{a}{2}\pi^2.$$

27. 在摆线 $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)$ 上求分摆线第一拱成 1∶3 的点的坐标.

解　对应于摆线第一拱的参数 t 的范围为 $[0,2\pi]$,参数 t 在范围 $[0,t_0]$ 时摆线的长度为

$$s_0=\int_0^{t_0}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=a\int_0^{t_0}2\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$
$$=4a\left(1-\cos\frac{t_0}{2}\right),$$

当 $t_0=2\pi$ 时,长度为 $8a$,故所求点对应的参数 t_0 满足 $4a\left(1-\cos\frac{t_0}{2}\right)=\frac{8a}{4}$,解得

$t_0=\dfrac{2\pi}{3}$，从而得到点的坐标为$\left(\left(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)a,\dfrac{3a}{2}\right)$.

28. 求对数螺线 $\rho=e^{a\theta}$ 相应于 $0\leqslant\theta\leqslant\varphi$ 的一段弧长.

解　$s=\displaystyle\int_0^{\varphi}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta=\int_0^{\varphi}\sqrt{1+a^2}e^{a\theta}d\theta=\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}(e^{a\varphi}-1)$.

29. 求曲线 $\rho\theta=1$ 相应于 $\dfrac{3}{4}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{4}{3}$ 的一段弧长.

解
$$s=\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta=\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\frac{\sqrt{1+\theta^2}}{\theta^2}d\theta=-\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\sqrt{1+\theta^2}\,d\left(\frac{1}{\theta}\right)$$
$$=-\left[\frac{\sqrt{1+\theta^2}}{\theta}\right]_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}+\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}d\theta=\frac{5}{12}+\left[\ln(\theta+\sqrt{1+\theta^2})\right]_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}$$
$$=\ln\frac{3}{2}+\frac{5}{12}.$$

30. 求心形线 $\rho=a(1+\cos\theta)$ 的全长.

解　$s=\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\,d\theta=\int_0^{2\pi}2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta=8a$.

习题 6－3　定积分在物理学上的应用

1. 由实验知道，弹簧在拉伸过程中，需要的力 F(单位：N)与伸长量 s(单位：cm)成正比，即

$$F=ks\ (k\text{ 是比例常数}).$$

如果把弹簧由原长拉伸 6 cm，计算所作的功.

解　$W=\displaystyle\int_0^6 ks\,ds=18k(\mathrm{N\cdot cm})=0.18k(\mathrm{J})$.

2. 直径为 20 cm、高为 80 cm 的圆筒内充满压强为 10 N/cm^2 的蒸汽. 设温度保持不变，要使蒸汽体积缩小一半，问需要作多少功？

解　由条件 $pV=k$ 为常数，故 $k=10\cdot100^2\cdot\pi\cdot0.1^2\cdot0.8=800\pi$. 设圆筒内高度减少 h m 时蒸汽的压强为 $p(h)$ N/m^2，则 $p(h)=\dfrac{k}{V}=\dfrac{800\pi}{(0.8-h)S}$，压力为 $P=p(h)S=\dfrac{800\pi}{0.8-h}$，因此作的功为

$$W=\int_0^{0.4}\frac{800\pi}{0.8-h}dh=800\pi\left[-\ln(0.8-h)\right]_0^{0.4}=800\pi\ln2\approx1\,742(\mathrm{J}).$$

3. (1) 证明：把质量为 m 的物体从地球表面升高到 h 处所作的功是

$$W=\frac{mgRh}{R+h},$$

其中 g 是地面上的重力加速度,R 是地球的半径;

(2) 一个人造地球卫星的质量为 173 kg,在高于地面 630 km 处进入轨道.问把这个卫星从地面送到 630 km 的高空处,克服地球引力要作多少功?已知 $g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$,地球半径 $R=6\,370\ \mathrm{km}$.

解　(1) 质量为 m 的物体与地球中心相距 x 时,引力为 $F=G\dfrac{mM}{x^2}$,根据条件 $mg=G\dfrac{mM}{R^2}$,因此有 $G=\dfrac{R^2g}{M}$,从而作的功为

$$W=\int_R^{R+h}\frac{mgR^2}{x^2}\mathrm{d}x=mgR^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right)=\frac{mgRh}{R+h}.$$

(2) 作的功为 $W=\dfrac{mgRh}{R+h}=971\,973\approx 9.72\times10^5(\mathrm{kJ})$.

4. 一物体按规律 $x=ct^3$ 作直线运动,介质的阻力与速度的平方成正比.计算物体由 $x=0$ 移到 $x=a$ 时,克服介质阻力所作的功.

解　速度为 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3ct^2$,阻力为 $R=kv^2=9kc^2t^4$,由此得到

$$\mathrm{d}W=R\mathrm{d}x=27kc^3t^6\mathrm{d}t.$$

设当 $t=T$ 时,$x=a$,得 $T=\left(\dfrac{a}{c}\right)^{\frac{1}{3}}$,故

$$W=\int_0^T 27kc^3t^6\mathrm{d}t=\frac{27kc^3}{7}T^7=\frac{27}{7}kc^{\frac{2}{3}}a^{\frac{7}{3}}.$$

5. 用铁锤将一铁钉击入木板,设木板对铁钉的阻力与铁钉击入木板的深度成正比,在击第一次时,将铁钉击入木板 1 cm.如果铁锤每次打击铁钉所作的功相等,问锤击第二次时,铁钉又击入多少?

解　设木板对铁钉的阻力为 R,则铁钉击入木板的深度为 h 时的阻力为

$$R=kh,\quad \text{其中 } k \text{ 为常数}.$$

铁锤击第一次时所作的功为

$$W_1=\int_0^1 R\mathrm{d}h=\int_0^1 kh\mathrm{d}h=\frac{k}{2}.$$

设锤击第二次时,铁钉又击入 h_0 cm,则锤击第二次所作的功为

$$W_2=\int_1^{1+h_0}R\mathrm{d}h=\int_1^{1+h_0}kh\mathrm{d}h=\frac{k}{2}[(1+h_0)^2-1],$$

由条件 $W_1=W_2$ 得 $h_0=\sqrt{2}-1$.

6. 设一圆锥形贮水池,深 15 m,口径 20 m,盛满水,今以唧筒将水吸尽,问要作多少功?

解　以高度 h 为积分变量,变化范围为 $[0,15]$,对该区间内任一小区间 $[h,$

$h+\mathrm{d}h]$,体积为 $\pi\left(\frac{10}{15}h\right)^2\mathrm{d}h$,记 γ 为水的密度,则作功为

$$W=\int_0^{15}\frac{4}{9}\pi\gamma g h^2(15-h)\mathrm{d}h=1\,875\pi\gamma g$$

$$\approx 5.769\,75\times 10^7(\mathrm{J}).$$

7. 有一闸门,它的形状和尺寸如图 6－16 所示,水面超过门顶 2 m. 求闸门上所受的水压力.

解　设水深 x m 的地方压强为 $p(x)$,则

$$p(x)=1\,000gx,$$

取 x 为积分变量,则 x 的变化范围为[2,5],对该区间内任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$,压力为

$$\mathrm{d}F=p(x)\mathrm{d}S=2p(x)\mathrm{d}x=2\,000gx\mathrm{d}x,$$

因此闸门上所受的水压力为

$$F=\int_2^5 2\,000gx\mathrm{d}x=1\,000g[x^2]_2^5=21\,000g(\mathrm{N})\approx 205.8(\mathrm{kN}).$$

8. 洒水车上的水箱是一个横放的椭圆柱体,尺寸如图 6－17 所示. 当水箱装满水时,计算水箱的一个侧面所受的压力.

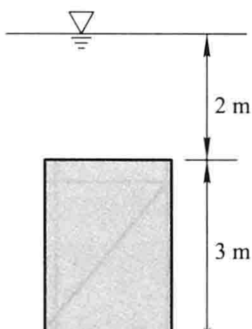


图 6－16

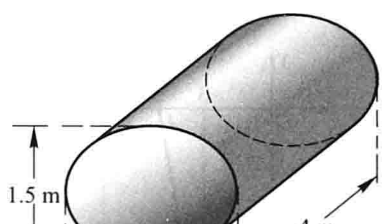


图 6－17

解　以侧面的椭圆长轴为 x 轴,短轴为 y 轴设立坐标系,则该椭圆的方程为 $x^2+\frac{y^2}{0.75^2}=1$,取 y 为积分变量,则 y 的变化范围为 $[-0.75,0.75]$,对该区间内任一小区间 $[y,y+\mathrm{d}y]$,该小区间相应的水深为 $0.75-y$,相应面积为

$$\mathrm{d}S=2\sqrt{1-\frac{y^2}{0.75^2}}\,\mathrm{d}y,$$

得到该小区间相应的压力

$$\mathrm{d}F=1\,000g(0.75-y)\mathrm{d}S=2\,000g(0.75-y)\sqrt{1-\frac{y^2}{0.75^2}}\,\mathrm{d}y,$$

因此压力为

$$F=\int_{-0.75}^{0.75}2\,000g(0.75-y)\sqrt{1-\frac{y^2}{0.75^2}}\,\mathrm{d}y\approx 17\,318(\mathrm{N})\approx 17.3(\mathrm{kN}).$$

9. 有一等腰梯形闸门，它的两条底边各长 10 m 和 6 m，高为 20 m，较长的底边与水面相齐. 计算闸门的一侧所受的水压力.

解　如图 6-18 建立坐标系，则过 A、B 两点的直线方程为 $y=10x-50$. 取 y 为积分变量，y 的变化范围为 $[-20,0]$，对应小区间 $[y,y+\mathrm{d}y]$ 的面积近似值为 $2x\mathrm{d}y=\left(\frac{y}{5}+10\right)\mathrm{d}y$，$\gamma$ 表示水的密度，因此水压力为

$$P=\int_{-20}^{0}\left(\frac{y}{5}+10\right)(-y)\gamma g\mathrm{d}y=1.437\,3\times 10^7(\mathrm{N})=14\,373\,(\mathrm{kN}).$$

10. 一底为 8 cm、高为 6 cm 的等腰三角形片，铅直地沉没在水中，顶在上，底在下且与水面平行，而顶离水面 3 cm，试求它每面所受的压力.

解　如图 6-19 建立坐标系，取三角形顶点为原点，取积分变量为 x，则 x 的变化范围为 $[0,0.06]$，易知 B 的坐标为 $(0.06,0.04)$，因此 OB 的方程为 $y=\frac{2}{3}x$，故对应小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的面积近似值为

$$\mathrm{d}S=2\cdot\frac{2}{3}x\cdot\mathrm{d}x=\frac{4}{3}x\mathrm{d}x.$$

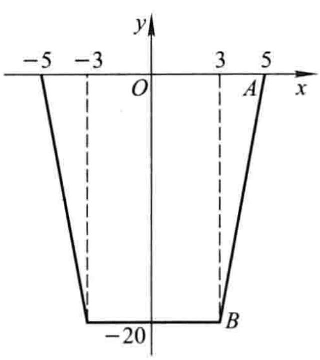


图 6-18

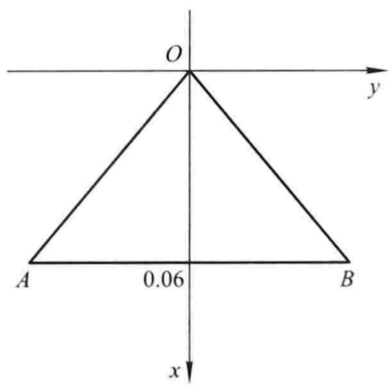


图 6-19

记 γ 为水的密度，则在 x 处的水压强为

$$p=\gamma g(x+0.03)=1\,000g(x+0.03),$$

故压力为

$$F=\int_{0}^{0.06}1\,000g(x+0.03)\cdot\frac{4}{3}x\mathrm{d}x=0.168g\approx 1.65(\mathrm{N}).$$

11. 设有一长度为 l、线密度为 μ 的均匀细直棒，在与棒的一端垂直距离为 a 单位处有一质量为 m 的质点 M，试求这细棒对质点 M 的引力.

解　如图 6－20 设立坐标系，取 y 为积分变量，则 y 的变化范围为 $[0,l]$，对应小区间 $[y,y+\mathrm{d}y]$ 与质点 M 的引力的大小的近似值为

$$\mathrm{d}F=G\frac{m\mu\mathrm{d}x}{r^2},$$

其中 $r=\sqrt{a^2+x^2}$，把该力分解，得到 x 轴、y 轴方向的分量分别为

$$\mathrm{d}F_x=-\frac{a}{r}\mathrm{d}F=-G\frac{am\mu}{(a^2+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}F_y=\frac{x}{r}\mathrm{d}F=G\frac{m\mu x}{(a^2+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x,$$

因此

$$F_x=\int_0^l -G\frac{am\mu}{(a^2+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x\xlongequal{x=a\tan t}-G\frac{m\mu}{a}\int_0^{\arctan\frac{l}{a}}\cos t\mathrm{d}t=-\frac{Gm\mu l}{a\sqrt{a^2+l^2}},$$

$$F_y=\int_0^l G\frac{m\mu x}{(a^2+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x=\left[-G\frac{m\mu}{(a^2+x^2)^{1/2}}\right]_0^l=m\mu G\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{a^2+l^2}}\right).$$

12. 设有一半径为 R、中心角为 φ 的圆弧形细棒，其线密度为常数 μ. 在圆心处有一质量为 m 的质点 M，试求这细棒对质点 M 的引力.

解　如图 6－21 建立坐标系，则相应小区间 $[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta]$ 的弧长为 $R\mathrm{d}\theta$，根据对称性可知所求的铅直方向引力分量为零，水平方向的引力分量为

$$F_x=\int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}}\cos\theta\frac{Gm\mu R\mathrm{d}\theta}{R^2}=\frac{2Gm\mu}{R}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

故所求引力的大小为 $\frac{2Gm\mu}{R}\sin\frac{\varphi}{2}$，方向为 M 指向圆弧的中心.

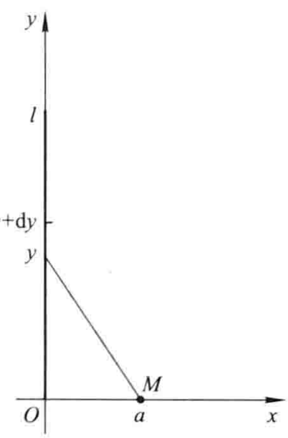


图 6－20

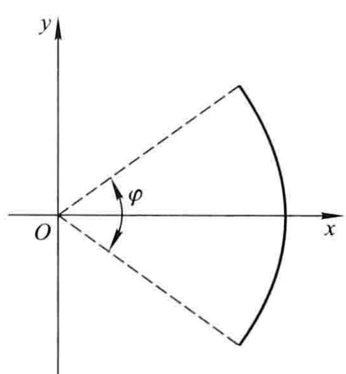


图 6－21

总习题六

1. 填空：

（1）曲线 $y=x^3-5x^2+6x$ 与 x 轴所围成的图形的面积 $A=$__________.

(2) 曲线 $y=\frac{\sqrt{x}}{3}(3-x)$ 上相应于 $1\leqslant x\leqslant 3$ 的一段弧的长度 $s=$__________.

解　(1) 令 $x^3-5x^2+6x=0$,解得 $x=0,2,3$.

当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时,$y\geqslant 0$;当 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时,$y\leqslant 0$. 故

$$A=\int_0^2(x^3-5x^2+6x)\mathrm{d}x-\int_2^3(x^3-5x^2+6x)\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+3x^2\right]_0^2-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+3x^2\right]_2^3=\frac{37}{12}.$$

(2) $s=\int_1^3\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\int_1^3\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\left[\sqrt{x}+\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^3=2\sqrt{3}-\frac{4}{3}.$

2. 以下两题中给出了四个结论,从中选出一个正确的结论:

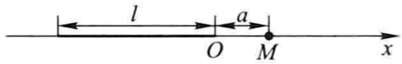


图 6-22

(1) 设 x 轴上有一长度为 l、线密度为常数 μ 的细棒,在细棒右端的距离为 a 处有一质量为 m 的质点 M(图 6-22),已知万有引力常量为 G,则质点 M 和细棒之间的引力的大小为(　　).

(A) $\int_{-l}^0\frac{Gm\mu}{(a-x)^2}\mathrm{d}x$　　(B) $\int_0^l\frac{Gm\mu}{(a-x)^2}\mathrm{d}x$

(C) $2\int_{-\frac{l}{2}}^0\frac{Gm\mu}{(a-x)^2}\mathrm{d}x$　　(D) $2\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{Gm\mu}{(a-x)^2}\mathrm{d}x$

(2) 设在区间 $[a,b]$ 上,$f(x)>0$,$f'(x)>0$,$f''(x)<0$. 令 $A_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,$A_2=f(a)(b-a)$,$A_3=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$,则有(　　).

(A) $A_1<A_2<A_3$　　(B) $A_2<A_1<A_3$

(C) $A_3<A_1<A_2$　　(D) $A_2<A_3<A_1$

解　(1) 选(A).

(2) 解法一　从几何意义判断:因为 $f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加. 又因 $f''(x)<0$,所以曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上向上凸,如图 6-23 所示,矩形面积 < 梯形面积 < 曲边梯形面积,故选(D).

解法二　证 $A_2<A_3$. 因 $f'(x)>0$,故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加,得 $f(b)>f(a)$,从而

$$A_3-A_2=(b-a)\frac{f(b)-f(a)}{2}>0,$$

即 $A_3>A_2$.

证 $A_1>A_3$. 联结点 $(a,f(a))$ 与点 $(b,f(b))$ 的直线方程为

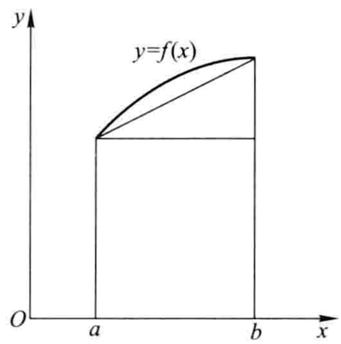


图 6 - 23

$$y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

因为 $f''(x)<0$,所以曲线 $y=f(x)$ 是向上凸的,从而有

$$f(x)>f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),\quad x\in(a,b).$$

两边积分,得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x>\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a),$$

即 $A_1>A_3$.

3. 一金属棒长 3 m,离棒左端 x m 处的线密度 $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$(kg/m). 问 x 为何值时,$[0,x]$一段的质量为全棒质量的一半.

解　$[0,x]$一段的质量为

$$m(x)=\int_0^x \rho(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x=2(\sqrt{1+x}-1),$$

总质量为 $m(3)=2$,要满足 $m(x)=\frac{1}{2}m(3)$,求得 $x=\frac{5}{4}$(m).

4. 求由曲线 $\rho=a\sin\theta$ 及 $\rho=a(\cos\theta+\sin\theta)$ $(a>0)$所围图形公共部分的面积.

解　首先求出两曲线的交点,联立方程 $\begin{cases}\rho=a\sin\theta,\\ \rho=a(\cos\theta+\sin\theta),\end{cases}$ 解得交点坐标为 $\left(a,\frac{\pi}{2}\right)$,注意到当 $\theta=0$ 时,$\rho=a\sin\theta=0$,当 $\theta=\frac{3\pi}{4}$时,$\rho=a(\cos\theta+\sin\theta)=0$,故两曲线分别过$(0,0)$和$\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$,即都过极点(见图 6 - 24),因此所求面积为

$$A=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{1}{2}[a(\cos\theta+\sin\theta)]^2\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}(1+\sin 2\theta)\,\mathrm{d}\theta+\frac{\pi a^2}{8}$$

$$=\frac{a^2}{4}(\pi-1).$$

5. 如图 6－25 所示，从下到上依次有三条曲线：$y=x^2$，$y=2x^2$ 和 C，假设对曲线 $y=2x^2$ 上的任一点 P，所对应的面积 A 和 B 恒相等，求曲线 C 的方程.

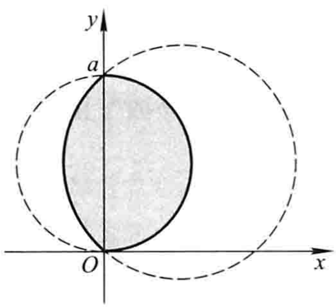


图 6－24

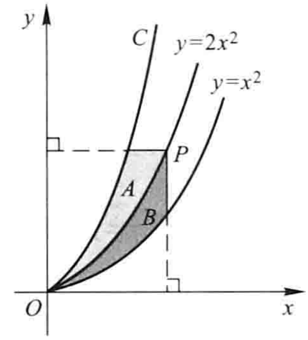


图 6－25

解　设曲线 C 的方程为 $x=f(y)$，P 点坐标为 $\left(\sqrt{\frac{y}{2}},y\right)$，则

$$A=\int_0^y\left[\sqrt{\frac{y}{2}}-f(y)\right]\mathrm{d}y,\quad B=\int_0^{\sqrt{\frac{y}{2}}}(2x^2-x^2)\,\mathrm{d}x,$$

根据条件，对任意 $y\geqslant 0$ 都有

$$\int_0^y\left[\sqrt{\frac{y}{2}}-f(y)\right]\mathrm{d}y=\int_0^{\sqrt{\frac{y}{2}}}(2x^2-x^2)\,\mathrm{d}x,$$

上式对 y 求导，得

$$\sqrt{\frac{y}{2}}-f(y)=\frac{y}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2y}},$$

因此

$$f(y)=\frac{3\sqrt{2y}}{8},$$

即曲线 C 为 $x=\dfrac{3\sqrt{2y}}{8}$，或 $y=\dfrac{32}{9}x^2(x\geqslant 0)$.

6. 设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过点 $(0,0)$，且当 $x\in[0,1]$ 时，$y\geqslant 0$. 试确定 a,b,c 的值，使得抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $x=1$，$y=0$ 所围图形的面积为 $\dfrac{4}{9}$，且使该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积最小.

解　由已知条件：抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过点 $(0,0)$，可得 $c=0$. 抛物线

$y=ax^2+bx+c$ 与直线 $x=1, y=0$ 所围图形的面积为

$$S=\int_0^1 (ax^2+bx)\,dx=\frac{a}{3}+\frac{b}{2},$$

从而得到$\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{4}{9}$,即 $a=\frac{4}{3}-\frac{3}{2}b$. 该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积为

$$V=\int_0^1 \pi(ax^2+bx)^2\,dx=\pi\left(\frac{a^2}{5}+\frac{ab}{2}+\frac{b^2}{3}\right)=\frac{\pi}{30}(b-2)^2+\frac{2}{9}\pi,$$

因此当 $b=2$ 时体积为最小,此时 $a=-\frac{5}{3}$,抛物线为

$$y=-\frac{5}{3}x^2+2x=\frac{x}{3}(6-5x),$$

在区间$[0,1]$上,此抛物线满足 $y\geqslant 0$,故所求解:$a=-\frac{5}{3}, b=2, c=0$ 符合题目要求.

7. 过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线,该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

(1) 求 D 的面积 A;(2) 求 D 绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.

解　(1) 设切点的横坐标为 x_0,则曲线 $y=\ln x$ 在点$(x_0, \ln x_0)$处的切线方程是

$$y=\ln x_0+\frac{1}{x_0}(x-x_0).$$

由该切线过原点知 $y=\ln x_0-1=0$,从而 $x_0=\mathrm{e}$,所以该切线的方程是

$$y=\frac{1}{\mathrm{e}}x.$$

平面图形 D 的面积

$$A=\int_0^1(\mathrm{e}^y-\mathrm{e}y)\,dy=\frac{1}{2}\mathrm{e}-1.$$

(2) 切线 $y=\frac{x}{\mathrm{e}}$与 x 轴及直线 $x=\mathrm{e}$ 所围成的三角形绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转所得的圆锥体的体积为

$$V_1=\frac{1}{3}\pi\mathrm{e}^2.$$

曲线 $y=\ln x$ 与 x 轴及直线 $x=\mathrm{e}$ 所围成的图形绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转所得的旋转体的体积为

$$V_2=\int_0^1\pi(\mathrm{e}-\mathrm{e}^y)^2\,dy=\frac{\pi}{2}(-\mathrm{e}^2+4\mathrm{e}-1),$$

因此,所求旋转体的体积为

$$V=V_1-V_2=\frac{\pi}{6}(5\mathrm{e}^2-12\mathrm{e}+3).$$

8. 求由曲线 $y=x^{\frac{3}{2}}$,直线 $x=4$ 及 x 轴所围图形绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积.

解　如图 6-26,取 x 为积分变量,则 x 的变化范围为$[0,4]$,因此体积为

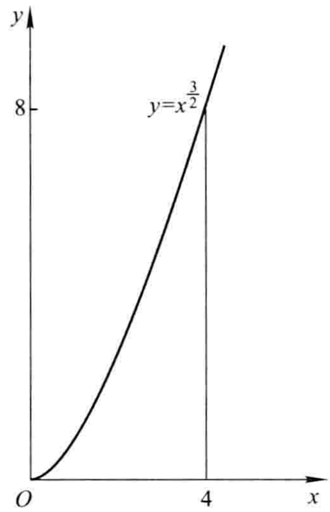


图 6－26

$$V=\int_0^4 2\pi x f(x)\,dx=\int_0^4 2\pi x^{\frac{5}{2}}\,dx=\frac{512}{7}\pi.$$

9. 求圆盘$(x-2)^2+y^2\leqslant 1$绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积.

解　这是一个圆环面,可以看作由图形$\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2+\sqrt{1-y^2},-1\leqslant y\leqslant 1\}$绕 y 轴旋转所得的立体减去由图形$\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2-\sqrt{1-y^2},-1\leqslant y\leqslant 1\}$绕 y 轴旋转所得的立体,因此

$$\begin{aligned}V&=\int_{-1}^{1}\pi(2+\sqrt{1-y^2})^2\,dy-\int_{-1}^{1}\pi(2-\sqrt{1-y^2})^2\,dy=8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy\\&=8\pi\left[\frac{y}{2}\sqrt{1-y^2}+\frac{1}{2}\arcsin y\right]_{-1}^{1}=4\pi^2.\end{aligned}$$

10. 求抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 被圆 $x^2+y^2=3$ 所截下的有限部分的弧长.

解　联立两曲线方程$\begin{cases}y=\frac{1}{2}x^2,\\x^2+y^2=3,\end{cases}$得到两曲线的交点为$(-\sqrt{2},1)$,$(\sqrt{2},1)$,因此所求弧长为

$$\begin{aligned}s&=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{1+x^2}\,dx\\&=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+x^2}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\\&=\sqrt{6}+\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3}).\end{aligned}$$

11. 半径为 r 的球沉入水中,球的上部与水面相切,球的密度与水相同,现将球从水中取出,需作多少功?

解　取 x 轴的正向铅直向上，沉入水中的球心为原点，并取 x 为积分变量，则 x 的变化范围为 $[-r,r]$. 对应区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的球的薄片的体积为

$$\mathrm{d}V=\pi(\sqrt{r^2-x^2})^2\mathrm{d}x=\pi(r^2-x^2)\mathrm{d}x,$$

由于该部分在水面以下重力与浮力的合力为零（因为球的密度与水的密度相同），在水面以上移动距离为 $r+x$，故作功为

$$\begin{aligned}W&=\int_{-r}^{r}g\pi(r^2-x^2)(r+x)\mathrm{d}x\\&=\int_{-r}^{r}g\pi r(r^2-x^2)\mathrm{d}x+\int_{-r}^{r}g\pi x(r^2-x^2)\mathrm{d}x\\&=2\pi gr\int_0^r(r^2-x^2)\ \mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi gr^4.\end{aligned}$$

12. 边长为 a 和 b 的矩形薄板，与液面成 α 角斜沉于液体内，长边平行于液面而位于深 h 处，设 $a>b$，液体的密度为 ρ，试求薄板每面所受的压力.

解　如图 6－27，记 x 为薄板上点到近水面的长边的距离，取 x 为积分变量，则 x 的变化范围为 $[0,b]$，对应小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$，压强为 $\rho g(h+x\sin\alpha)$，面积为 $a\mathrm{d}x$，因此压力为

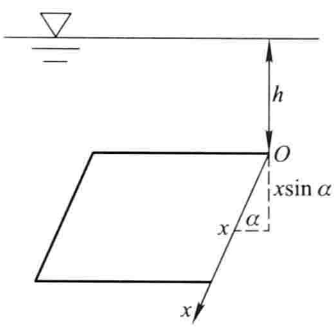


图 6－27

$$F=\int_0^b\rho ga(h+x\sin\alpha)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\rho gab(2h+b\sin\alpha).$$

13. 设星形线 $x=a\cos^3t,y=a\sin^3t$ 上每一点处的线密度的大小等于该点到原点距离的立方，在原点 O 处有一单位质点，求星形线的第一象限的弧段对这质点的引力.

解　取参数 t 为积分变量，变化范围为 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，对应区间 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 的弧长为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t=3a\cos t\sin t\mathrm{d}t,$$

该弧段质量为 $(a^2\cos^6t+a^2\sin^6t)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}s=3a^4\cos t\sin t(\cos^6t+\sin^6t)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t$，该弧段与质点的引力大小为

$$G\frac{3a^4\cos t\sin t(\cos^6t+\sin^6t)^{\frac{3}{2}}\ \mathrm{d}t}{a^2\cos^6t+a^2\sin^6t}=3Ga^2\cos t\sin t(\cos^6t+\sin^6t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t,$$

因此曲线弧对这质点引力的水平方向分量、铅直方向分量分别为

$$F_x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\cos^3 t}{\sqrt{a^2\cos^6 t + a^2\sin^6 t}} 3Ga^2\cos t\sin t(\cos^6 t + \sin^6 t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3Ga^2\cos^4 t\sin t\mathrm{d}t = 3Ga^2\left[-\frac{\cos^5 t}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{5}Ga^2,$$

$$F_y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\sin^3 t}{\sqrt{a^2\cos^6 t + a^2\sin^6 t}} 3Ga^2\cos t\sin t(\cos^6 t + \sin^6 t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3Ga^2\cos t\sin^4 t\mathrm{d}t = 3Ga^2\left[\frac{\sin^5 t}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{5}Ga^2,$$

因此所求引力 $\boldsymbol{F} = \left(\frac{3}{5}Ga^2, \frac{3}{5}Ga^2\right)$，即大小为$\frac{3\sqrt{2}}{5}G\,a^2$，方向角为$\frac{\pi}{4}$.

14. 某建筑工地打地基时，需用汽锤将桩打进土层. 汽锤每次击打，都要克服土层对桩的阻力而作功. 设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比(比例系数为 $k, k>0$). 汽锤第一次击打将桩打进地下 a m. 根据设计方案，要求汽锤每次击打桩时所作的功与前一次击打时所作的功之比为常数 $r(0<r<1)$. 问：

(1) 汽锤击打桩 3 次后，可将桩打进地下多深？

(2) 若击打次数不限，则汽锤至多能将桩打进地下多深？

解　(1) 设第 n 次击打后，桩被打进地下 x_n，第 n 次击打时，汽锤克服阻力所作的功为 $W_n(n\in\mathbf{N}^*)$. 由题设，当桩被打进地下的深度为 x 时，土层对桩的阻力的大小为 kx，所以

$$W_1 = \int_0^{x_1} kx\mathrm{d}x = \frac{k}{2}x_1^2 = \frac{k}{2}a^2,$$

$$W_2 = \int_{x_1}^{x_2} kx\mathrm{d}x = \frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2) = \frac{k}{2}(x_2^2 - a^2).$$

由 $W_2 = rW_1$，可得

$$x_2^2 - a^2 = ra^2,$$

即 $x_2^2 = (1+r)a^2$.

$$W_3 = \int_{x_2}^{x_3} kx\mathrm{d}x = \frac{k}{2}(x_3^2 - x_2^2) = \frac{k}{2}[x_3^2 - (1+r)a^2],$$

由 $W_3 = rW_2 = r^2W_1$，可得

$$x_3^2 - (1+r)a^2 = r^2a^2,$$

从而

$$x_3 = \sqrt{1+r+r^2}a,$$

即汽锤击打桩 3 次后，可将桩打进地下$\sqrt{1+r+r^2}a$ m.

（2）$W_n=\int_{x_{n-1}}^{x_n}kx\mathrm{d}x=\frac{k}{2}(x_n^2-x_{n-1}^2)$，由 $W_n=rW_{n-1}$，可得

$$x_n^2-x_{n-1}^2=r(x_{n-1}^2-x_{n-2}^2),$$

由(1)知 $x_2^2-x_1^2=ra^2$，因此 $x_n^2-x_{n-1}^2=r^{n-1}a^2$，从而由归纳法，可得

$$x_n=\sqrt{1+r+\cdots+r^{n-1}}\,a,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}a\sqrt{\frac{1-r^n}{1-r}}=\frac{a}{\sqrt{1-r}},$$

即若击打次数不限，汽锤至多能将桩打进地下$\frac{a}{\sqrt{1-r}}$m.

第七章

微分方程

习题 7-1　微分方程的基本概念

1. 试说出下列各微分方程的阶数：

(1) $x(y')^2-2yy'+x=0$；　(2) $x^2y''-xy'+y=0$；

(3) $xy'''+2y''+x^2y=0$；　(4) $(7x-6y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y=0$；

(5) $L\dfrac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}+R\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\dfrac{Q}{C}=0$；　(6) $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}+\rho=\sin^2\theta$.

解　(1) 一阶；(2) 二阶；(3) 三阶；(4) 一阶；(5) 二阶；(6) 一阶.

2. 指出下列各题中的函数是否为所给微分方程的解：

(1) $xy'=2y, y=5x^2$；

(2) $y''+y=0, y=3\sin x-4\cos x$；

(3) $y''-2y'+y=0, y=x^2\mathrm{e}^x$；

(4) $y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2y=0, y=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2x}$.

解　(1) 由 $y=5x^2$，得 $y'=10x$，$xy'=10x^2=2y$，故 $y=5x^2$ 是所给微分方程的解.

(2) 由 $y=3\sin x-4\cos x$，得 $y'=3\cos x+4\sin x$，进而得

$$y''=-3\sin x+4\cos x,$$

于是

$$y''+y=(-3\sin x+4\cos x)+(3\sin x-4\cos x)=0,$$

故 $y=3\sin x-4\cos x$ 是所给微分方程的解.

(3) 由 $y=x^2\mathrm{e}^x$，得 $y'=2x\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^x=(2x+x^2)\mathrm{e}^x$，进而得

$$y''=(2+2x)\mathrm{e}^x+(2x+x^2)\mathrm{e}^x=(2+4x+x^2)\mathrm{e}^x,$$

于是

$$y''-2y'+y=[(2+4x+x^2)-2(2x+x^2)+x^2]\mathrm{e}^x=2\mathrm{e}^x\neq0,$$

故 $y=x^2\mathrm{e}^x$ 不是所给微分方程的解.

(4) 由 $y=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2x}$，得 $y'=\lambda_1C_1\mathrm{e}^{\lambda_1x}+\lambda_2C_2\mathrm{e}^{\lambda_2x}$，进而得

$$y''=\lambda_1^2C_1\mathrm{e}^{\lambda_1x}+\lambda_2^2C_2\mathrm{e}^{\lambda_2x},$$

于是

$$\begin{aligned}&y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2y\\=&\lambda_1^2C_1\mathrm{e}^{\lambda_1x}+\lambda_2^2C_2\mathrm{e}^{\lambda_2x}-\lambda_1(\lambda_1+\lambda_2)C_1\mathrm{e}^{\lambda_1x}-\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)C_2\mathrm{e}^{\lambda_2x}+\\&\lambda_1\lambda_2C_1\mathrm{e}^{\lambda_1x}+\lambda_1\lambda_2C_2\mathrm{e}^{\lambda_2x}=0,\end{aligned}$$

故 $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ 是所给微分方程的解．

3. 在下列各题中，验证所给二元方程所确定的函数为所给微分方程的解：

(1) $(x-2y)y' = 2x - y, x^2 - xy + y^2 = C$；

(2) $(xy - x)y'' + xy'^2 + yy' - 2y' = 0, y = \ln(xy)$．

解　(1) 在方程 $x^2 - xy + y^2 = C$ 两端对 x 求导，得

$$2x - (y + xy') + 2yy' = 0,$$

即 $(x-2y)y' = 2x - y$. 故所给二元方程所确定的函数是微分方程的解．

(2) 在方程 $y = \ln(xy)$ 两端对 x 求导，得

$$y' = \frac{y + xy'}{xy},$$

即 $(xy - x)y' - y = 0$，再在上式两端对 x 求导，得

$$(y + xy' - 1)y' + (xy - x)y'' - y' = 0,$$

即 $(xy - x)y'' + xy'^2 + yy' - 2y' = 0$. 故所给二元方程所确定的函数是所给微分方程的解．

4. 在下列各题中，确定函数关系式中所含的参数，使函数满足所给的初值条件：

(1) $x^2 - y^2 = C, y|_{x=0} = 5$；

(2) $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1$；

(3) $y = C_1 \sin(x - C_2), y|_{x=\pi} = 1, y'|_{x=\pi} = 0$.

解　(1) 由 $y|_{x=0} = 5$，将 $x = 0, y = 5$ 代入函数关系中，得 $C = -25$，即

$$x^2 - y^2 = -25.$$

(2) 由 $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$，得

$$y' = (C_2 + 2C_1 + 2C_2 x)e^{2x}.$$

将 $x = 0, y = 0$ 及 $y' = 1$ 代入以上两式，得

$$\begin{cases} 0 = C_1, \\ 1 = C_2 + 2C_1, \end{cases}$$

故 $C_1 = 0, C_2 = 1, y = xe^{2x}$.

(3) 由 $y = C_1 \sin(x - C_2)$，得

$$y' = C_1 \cos(x - C_2).$$

将 $x = \pi, y = 1$ 及 $y' = 0$ 代入以上两式，得

$$\begin{cases} 1 = C_1 \sin(\pi - C_2) = C_1 \sin C_2, & ① \\ 0 = C_1 \cos(\pi - C_2) = -C_1 \cos C_2. & ② \end{cases}$$

由①^2 + ②^2 得 $C_1^2 = 1$，不妨取 $C_1 = 1$，由①式得 $C_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$，故

$$y = \sin\left(x - 2k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x.$$

注　取 $C_1 = -1$,可得相同的结果.

5. 写出由下列条件确定的曲线所满足的微分方程:

(1) 曲线在点(x,y)处的切线的斜率等于该点横坐标的平方;

(2) 曲线上点 $P(x,y)$处的法线与 x 轴的交点为 Q,且线段 PQ 被 y 轴平分.

解　(1) 设曲线方程为 $y=y(x)$,它在点(x,y)处的切线斜率为 y',依条件,有

$$y' = x^2,$$

此为曲线方程所满足的微分方程.

(2) 设曲线方程为 $y=y(x)$,因它在点 $P(x,y)$处的切线斜率为 y',故该点处法线斜率为 $-\dfrac{1}{y'}$.

由条件知 PQ 之中点位于 y 轴上,故点 Q 的坐标是$(-x,0)$,于是有

$$\frac{y-0}{x-(-x)} = -\frac{1}{y'},$$

即微分方程为 $yy'+2x=0$.

6. 用微分方程表示一物理命题:某种气体的气压 P 对于温度 T 的变化率与气压成正比,与温度的平方成反比.

解　因$\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T}$与 P 成正比,与 T^2 成反比,若比例系数为 k,则有

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T} = k\frac{P}{T^2}.$$

7. 一个半球体形状的雪堆,其体积融化率与半球面面积 A 成正比,比例系数$k>0$.假设在融化过程中雪堆始终保持半球体形状,已知半径为 r_0 的雪堆在开始融化的 3 小时内,融化了其体积的$\dfrac{7}{8}$,问雪堆全部融化需要多少时间?

解　设雪堆在时刻 t 的体积为 $V=\dfrac{2}{3}\pi r^3$,侧面积 $S=2\pi r^2$. 由题设知

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 2\pi r^2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -kS = -2\pi k r^2,$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -k,$$

积分得

$$r = -kt + C.$$

由 $r\big|_{t=0}=r_0$,得 $C=r_0$,$r=r_0-kt$. 又 $V\Big|_{t=3}=\dfrac{1}{8}V\Big|_{t=0}$,即$\dfrac{2}{3}\pi(r_0-3k)^3=$

$\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\pi r_0^3$,得 $k=\frac{1}{6}r_0$,从而

$$r=r_0-\frac{1}{6}r_0 t$$

因雪堆全部融化时,$r=0$,故得 $t=6$,即雪堆全部融化需 6 小时.

习题 7－2　可分离变量的微分方程

1. 求下列微分方程的通解:

(1) $xy'-y\ln y=0$;　(2) $3x^2+5x-5y'=0$;

(3) $\sqrt{1-x^2}y'=\sqrt{1-y^2}$;　(4) $y'-xy'=a(y^2+y')$;

(5) $\sec^2 x\tan y\mathrm{d}x+\sec^2 y\tan x\mathrm{d}y=0$;　(6) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=10^{x+y}$;

(7) $(\mathrm{e}^{x+y}-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y=0$;　(8) $\cos x\sin y\mathrm{d}x+\sin x\cos y\mathrm{d}y=0$;

(9) $(y+1)^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x^3=0$;　(10) $y\mathrm{d}x+(x^2-4x)\mathrm{d}y=0$.

解　(1) 原方程为 $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y\ln y=0$,分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y}=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两端积分得

$$\ln|\ln y|=\ln|x|+\ln C_1=\ln|C_1x|\,(C_1>0),$$

即 $\ln y=\pm C_1x$,故通解为 $\ln y=Cx$,即 $y=\mathrm{e}^{Cx}$①.

(2) 原方程可写成 $5y'=3x^2+5x$,积分得 $5y=x^3+\frac{5}{2}x^2+C_1$,即通解为

$$y=\frac{1}{5}x^3+\frac{1}{2}x^2+C\left(C=\frac{C_1}{5}\right).$$

(3) 原方程为 $\sqrt{1-x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1-y^2}$,分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}},$$

两端积分得 $\arcsin y=\arcsin x+C$,即为原方程的通解.

(4) 原方程可写成 $(1-x-a)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=ay^2$,分离变量得

---

① 由于 $y\equiv1$ 也是原方程 $xy'-y\ln y=0$ 的解,因此方程的解 $\ln y=\pm C_1x$ 中,C_1 可以取作 0,从而通解为 $\ln y=Cx$(C 是任意常数),即 $y=\mathrm{e}^{Cx}$. 以下诸题通解中的常数 C 也有类似情况,但不再一一说明.

$$\frac{dy}{y^2}=\frac{a}{1-x-a}dx,$$

两端积分得

$$-\frac{1}{y}=-a\ln|1-x-a|-C,$$

即 $y=\dfrac{1}{a\ln|1-x-a|+C}$是原方程的通解.

(5) 原方程分离变量,得

$$\frac{\sec^2 y}{\tan y}dy=-\frac{\sec^2 x}{\tan x}dx,$$

两端积分得

$$\ln|\tan y|=-\ln|\tan x|+\ln C_1,$$

可写成 $\ln|\tan y\cdot\tan x|=\ln C_1$,即 $\tan y\cdot\tan x=\pm C_1$,故原方程的通解为

$$\tan y\cdot\tan x=C.$$

(6) 原方程分离变量,得 $10^{-y}dy=10^x dx$,两端积分得

$$-\frac{10^{-y}}{\ln 10}=\frac{10^x}{\ln 10}+C_1,$$

可写成 $10^x+10^{-y}=C(C=-C_1\ln 10)$.

(7) 原方程为 $e^x(e^y-1)dx+e^y(e^x+1)dy=0$,分离变量得

$$\frac{e^y}{e^y-1}dy=-\frac{e^x}{e^x+1}dx,$$

两端积分得

$$\ln|e^y-1|=-\ln(e^x+1)+\ln C_1,$$

或写成 $\ln|(e^x+1)(e^y-1)|=\ln C_1$,即$(e^x+1)(e^y-1)=\pm C_1$,故原方程的通解为 $(e^x+1)(e^y-1)=C$.

(8) 原方程分离变量,得$\dfrac{\cos y}{\sin y}dy=-\dfrac{\cos x}{\sin x}dx$,两端积分得

$$\ln|\sin y|=-\ln|\sin x|+\ln C_1,$$

即 $\ln|\sin y\sin x|=\ln C_1$,或写成 $\sin y\sin x=\pm C_1$,故原方程的通解为 $\sin y\sin x=C$.

(9) 原方程分离变量,得$(y+1)^2dy=-x^3dx$,两端积分得

$$\frac{1}{3}(y+1)^3=-\frac{1}{4}x^4+C_1,$$

故原方程的通解为 $3x^4+4(y+1)^3=C\ (C=12C_1)$.

(10) 原方程分离变量,得$\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dx}{4x-x^2}$,两端积分得

$$\ln|y|=\int\frac{dx}{(4-x)x}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{4-x}+\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}(\ln|x| - \ln|4-x|) + \ln C_1 = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{4-x}\right| + \ln C_1,$$

即 $\ln|y^4(4-x)| = \ln|4C_1x|$，或写成 $y^4(4-x) = \pm 4C_1x$，故原方程的通解为

$$y^4(4-x) = Cx.$$

2. 求下列微分方程满足所给初值条件的特解：

（1）$y' = e^{2x-y}, y|_{x=0} = 0$；

（2）$\cos x\sin y\mathrm{d}y = \cos y\sin x\mathrm{d}x, y|_{x=0} = \frac{\pi}{4}$；

（3）$y'\sin x = y\ln y, y|_{x=\frac{\pi}{2}} = e$；

（4）$\cos y\mathrm{d}x + (1+e^{-x})\sin y\mathrm{d}y = 0, y|_{x=0} = \frac{\pi}{4}$；

（5）$x\mathrm{d}y + 2y\mathrm{d}x = 0, y|_{x=2} = 1$.

解　（1）分离变量，得 $e^y\mathrm{d}y = e^{2x}\mathrm{d}x$，两端积分得

$$e^y = \frac{1}{2}e^{2x} + C,$$

由 $y|_{x=0} = 0$，得 $1 = e^0 = \frac{1}{2}e^0 + C$，故 $C = \frac{1}{2}$，即得 $e^y = \frac{1}{2}(e^{2x}+1)$，于是所求特解为 $y = \ln\frac{e^{2x}+1}{2}$.

（2）分离变量，得 $\tan y\mathrm{d}y = \tan x\mathrm{d}x$，两端积分得

$$-\ln|\cos y| = -\ln|\cos x| - \ln C_1,$$

即 $\cos y = C\cos x$. 代入初值条件：$x=0, y=\frac{\pi}{4}$，得 $\frac{\sqrt{2}}{2} = C$，于是

$$\sqrt{2}\cos y = \cos x$$

为所求特解.

（3）分离变量，得 $\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y} = \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$，两端积分得

$$\ln|\ln y| = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \ln C_1,$$

即 $\ln y = C\tan\frac{x}{2}$. 代入初值条件：$x = \frac{\pi}{2}, y = e$，得 $1 = C$，于是

$$y = e^{\tan\frac{x}{2}}$$

为所求特解.

（4）分离变量，得 $\frac{e^x}{e^x+1}\mathrm{d}x = -\tan y\mathrm{d}y$，两端积分得

$$\ln(e^x+1) = \ln|\cos y| + \ln C_1,$$

即 $e^x + 1 = C\cos y$. 代入初值条件：$x=0, y=\frac{\pi}{4}$，有 $2 = C\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$，得 $C = 2\sqrt{2}$，于是

$$e^x+1=2\sqrt{2}\cos y,$$

即$(e^x+1)\sec y=2\sqrt{2}$为所求特解.

(5) 分离变量,得$\dfrac{dy}{y}=-2\dfrac{dx}{x}$,两端积分得

$$\ln|y|=-2\ln|x|+\ln C_1=\ln x^{-2}+\ln C_1,$$

即$x^2y=C$. 代入初值条件:$x=2,y=1$,得$C=4$,故所求特解为$x^2y=4$.

3. 有一盛满了水的圆锥形漏斗,高为10 cm,顶角为60°,漏斗下面有面积为0.5 cm^2的孔,求水面高度变化的规律及流完所需的时间.

解 水从孔口流出的流量Q是单位时间内流出孔口的水的体积,即$Q=\dfrac{dV}{dt}$. 又从力学知道,$Q=0.62S\sqrt{2gh}$,其中0.62为流量系数,S为孔口截面积,g为重力加速度,h为水面到孔口的高度. 于是有

$$\frac{dV}{dt}=0.62S\sqrt{2gh},$$

即

$$dV=0.62S\sqrt{2gh}dt. \tag{1}$$

设在时刻t,水面高度为$h=h(t)$. 从图7-1中可见,$x=h\tan 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}h$,于是在时间间隔$[t,t+dt]$内漏斗流出的水的体积,即水体积的改变量

$$dV=-\pi x^2dh=-\frac{\pi}{3}h^2dh. \tag{2}$$

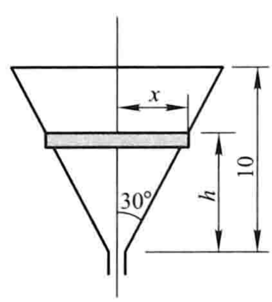


图7-1

由(1),(2)式得微分方程

$$0.62S\sqrt{2gh}dt=-\frac{\pi}{3}h^2dh.$$

并有初值条件$h|_{t=0}=10$.

由微分方程分离变量,得

$$dt=-\frac{\pi}{3\times 0.62S\sqrt{2g}}h^{\frac{3}{2}}dh,$$

两端积分，得

$$t=-\frac{2\pi}{15\times 0.62S\sqrt{2g}}h^{\frac{5}{2}}+C.$$

代入初值条件：$t=0,h=10$，得 $C=\dfrac{2\pi}{15\times 0.62S\sqrt{2g}}10^{\frac{5}{2}}$. 于是

$$t=\frac{2\pi}{15\times 0.62S\sqrt{2g}}(10^{\frac{5}{2}}-h^{\frac{5}{2}}).$$

代入 $S=0.5(\mathrm{cm}^2)$，$g=980(\mathrm{cm/s^2})$，即得

$$t=-0.030\,5h^{\frac{5}{2}}+9.64,$$

代入 $h=0$ 得，流完所需时间 $t\approx 10(\mathrm{s})$.

4. 质量为 1 g 的质点受外力作用作直线运动，这外力和时间成正比，和质点运动的速度成反比. 在 $t=10$ s 时，速度等于 50 cm/s，外力为 4 g · cm/s²，问从运动开始经过了一分钟后的速度是多少？

解 设在时刻 t，质点运动速度为 $v=v(t)$. 据题设条件，有

$$f=mv'=k\frac{t}{v},$$

且由 $m=1,t=10,v=50,f=4$，得 $k=\dfrac{f\cdot v}{t}=20$. 故有微分方程

$$v'=20\frac{t}{v}.$$

分离变量得 $v\,\mathrm{d}v=20t\,\mathrm{d}t$，积分得 $v^2=20t^2+C$. 代入条件：$t=10,v=50$，得 $C=500$，于是有特解

$$v=\sqrt{20t^2+500}.$$

当 $t=60(\mathrm{s})$ 时，$v=\sqrt{20\times 60^2+500}=269.3(\mathrm{cm/s})$.

5. 镭的衰变有如下的规律：镭的衰变速度与它的现存量 R 成正比. 由经验材料得知，镭经过 1 600 年后，只余原始量 R_0 的一半. 试求镭的存量 R 与时间 t 的函数关系.

解 设在时刻 t，镭的存量为 $R=R(t)$. 由题设条件知，$\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=-\lambda R$，即 $\dfrac{\mathrm{d}R}{R}=-\lambda\mathrm{d}t$. 积分得 $\ln R=-\lambda t+\ln C$，即 $R=C\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

因 $t=0$ 时，$R=R_0$，故 $C=R_0$，$R=R_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$. 将 $t=1\,600$，$R=\dfrac{1}{2}R_0$ 代入上式，得 $\dfrac{1}{2}=\mathrm{e}^{-1\,600\lambda}$，即 $\lambda=\dfrac{\ln 2}{1\,600}$. 所以 $R=R_0\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{1\,600}t}=R_0\mathrm{e}^{-0.000\,433\,t}$.

6. 一曲线通过点(2,3)，它在两坐标轴间的任一切线线段均被切点所平分，求这曲线方程.

解　设曲线方程为 $y=y(x)$，切点为 (x,y). 依条件，切线在 x 轴与 y 轴上的截距分别为 $2x$ 与 $2y$，于是切线的斜率

$$y'=\frac{2y-0}{0-2x}=-\frac{y}{x}.$$

分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

积分得 $\ln|y|=-\ln|x|+\ln C_1$，即 $xy=C$. 代入初值条件 $x=2,y=3$，得 $C=6$，故曲线方程为 $xy=6$.

7. 小船从河边点 O 处出发驶向对岸(两岸为平行直线). 设船速为 a，船行方向始终与河岸垂直，又设河宽为 h，河中任一点处的水流速度与该点到两岸距离的乘积成正比(比例系数为 k). 求小船的航行路线.

解　设小船的航行路线为

$$C:\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$$

则在时刻 t，小船的实际航行速度为 $\boldsymbol{v}(t)=(x'(t),y'(t))$，其中 $x'(t)=ky(h-y)$ 为水的流速，$y'(t)=a$ 为小船的主动速度.

由于小船航行路线的切线方向就是小船的实际速度方向(图 7－2)，故有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{a}{ky(h-y)}.$$

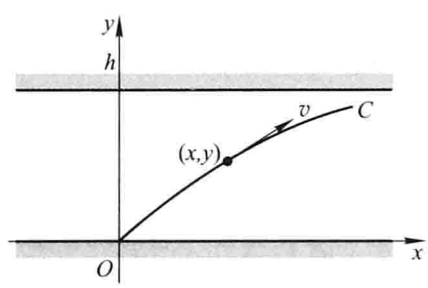


图 7－2

分离变量，得 $\mathrm{d}x=\dfrac{k}{a}y(h-y)\mathrm{d}y$，积分得

$$\begin{aligned}x&=\frac{k}{a}\int(hy-y^2)\mathrm{d}y\\&=\frac{k}{a}\left(\frac{h}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right)+C.\end{aligned}$$

由于小船始发于点(0,0)，代入 $x=0,y=0$，得 $C=0$，故小船航行的路线的方程为

$$x=\frac{k}{a}\left(\frac{h}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right).$$

习题 7－3　齐次方程

1. 求下列齐次方程的通解：

(1) $xy' - y - \sqrt{y^2 - x^2} = 0$；　(2) $x\dfrac{dy}{dx} = y\ln\dfrac{y}{x}$；

(3) $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$；　(4) $(x^3 + y^3)dx - 3xy^2dy = 0$；

(5) $\left(2x\sin\dfrac{y}{x} + 3y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx - 3x\cos\dfrac{y}{x}dy = 0$；

(6) $(1 + 2e^{\frac{x}{y}})dx + 2e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)dy = 0.$

解　(1) 当 $x > 0$ 时，可将原方程写成 $y' = \dfrac{y}{x} + \sqrt{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 - 1}$，令 $u = \dfrac{y}{x}$，即 $y = xu$，有 $y' = u + xu'$，则原方程成为 $u + xu' = u + \sqrt{u^2 - 1}$，分离变量，得

$$\frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \frac{dx}{x},$$

积分得

$$\ln\left|u + \sqrt{u^2 - 1}\right| = \ln|x| + \ln C_1,$$

即

$$u + \sqrt{u^2 - 1} = Cx(C = \pm C_1).$$

将 $u = \dfrac{y}{x}$ 代入上式并整理，得方程在 $(0, +\infty)$ 内的通解

$$y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^2.$$

当 $x < 0$ 时，原方程可写作 $y' = \dfrac{y}{x} - \sqrt{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 - 1}$，令 $u = \dfrac{y}{x}$，可变形为

$$\frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = -\frac{dx}{x},$$

积分得

$$\ln\left|u + \sqrt{u^2 - 1}\right| = \ln C_1 - \ln|x|,$$

即 $u + \sqrt{u^2 - 1} = \dfrac{C}{x}(C = \pm C_1)$

将 $u = \dfrac{y}{x}$ 代入上式并整理，得方程在 $(-\infty, 0)$ 内的通解 $y - \sqrt{y^2 - x^2} = C.$

(2) 原方程可表示成$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$,令 $u=\frac{y}{x}$,即 $y=xu$,有$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,则原方程成为 $u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u\ln u$,分离变量,得

$$\frac{\mathrm{d}u}{u(\ln u-1)}=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

积分得

$$\ln|\ln u-1|=\ln|x|+\ln C_1,$$

即

$$\ln u-1=\pm C_1x.$$

将 $u=\frac{y}{x}$代入上式,得

$$\ln\frac{y}{x}=\pm C_1x+1.$$

故通解为

$$\ln\frac{y}{x}=Cx+1.$$

(3) 原方程可表示为$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x-\mathrm{d}y=0$. 令 $u=\frac{y}{x}$,即 $y=xu$,有 $\mathrm{d}y=u\mathrm{d}x+x\mathrm{d}u$,则原方程成为

$$\left(\frac{1}{u}+u\right)\mathrm{d}x-(u\mathrm{d}x+x\mathrm{d}u)=0,$$

即 $u\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}$,积分得

$$\frac{u^2}{2}=\ln|x|+C_1.$$

将 $u=\frac{y}{x}$代入上式并整理,得通解

$$y^2=x^2(2\ln|x|+C).$$

(4) 原方程可写成$\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x-\mathrm{d}y=0$. 令 $u=\frac{y}{x}$,即 $y=xu$,有 $\mathrm{d}y=u\mathrm{d}x+x\mathrm{d}u$,则原方程成为$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{u^2}+u\right)\mathrm{d}x-(u\mathrm{d}x+x\mathrm{d}u)=0$. 分离变量,得

$$\frac{3u^2}{1-2u^3}\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

积分得

$$-\frac{1}{2}\ln|1-2u^3|=\ln|x|+\ln C_1,$$

即

$$1-2u^3=\pm\frac{1}{C_1^2x^2}.$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 代入上式并整理,得通解

$$x^3-2y^3=Cx.$$

(5) 原方程可写成 $\frac{2}{3}\tan\frac{y}{x}+\frac{y}{x}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$. 令 $u=\frac{y}{x}$,即 $y=xu$,有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,则原方程成为 $\frac{2}{3}\tan u+u-\left(u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)=0$. 分离变量,得

$$\frac{3}{2}\frac{\mathrm{d}u}{\tan u}=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

积分得

$$\frac{3}{2}\ln|\sin u|=\ln|x|+\ln C_1,$$

即

$$\sin^3u=\pm C_1x^2.$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 代入上式,得通解 $\sin^3\frac{y}{x}=Cx^2$.

(6) 原方程可写成 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}(1+2\mathrm{e}^{\frac{x}{y}})+2\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y})=0$. 令 $u=\frac{x}{y}$,即 $x=yu$,有 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=u+y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$,则原方程成为

$$\left(u+y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right)(1+2\mathrm{e}^u)+2\mathrm{e}^u(1-u)=0,$$

整理并分离变量,得

$$\frac{1+2\mathrm{e}^u}{u+2\mathrm{e}^u}\mathrm{d}u+\frac{\mathrm{d}y}{y}=0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}(u+2\mathrm{e}^u)}{u+2\mathrm{e}^u}+\frac{\mathrm{d}y}{y}=0.$$

积分得

$$\ln|u+2\mathrm{e}^u|+\ln|y|=\ln C_1,$$

即

$$y(u+2\mathrm{e}^u)=\pm C_1.$$

将 $u=\frac{x}{y}$ 代入上式,得通解

$$x+2y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}=C.$$

2. 求下列齐次方程满足所给初值条件的特解:

(1) $(y^2-3x^2)\mathrm{d}y+2xy\mathrm{d}x=0, y|_{x=0}=1$;

(2) $y'=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}, y|_{x=1}=2$;

(3) $(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(y^2+2xy-x^2)\mathrm{d}y=0, y|_{x=1}=1$.

解　(1) 原方程可写成 $1-3\dfrac{x^2}{y^2}+2\dfrac{x}{y}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=0$. 令 $u=\dfrac{x}{y}$,即 $x=yu$,有 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=u+y\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$,则原方程成为

$$1-3u^2+2u\left(u+y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right)=0,$$

分离变量,得

$$\frac{2u}{u^2-1}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

积分得

$$\ln|u^2-1|=\ln|y|+\ln C_1,$$

即

$$u^2-1=Cy.$$

代入 $u=\dfrac{x}{y}$ 并整理,得通解 $x^2-y^2=Cy^3$. 由初值条件 $x=0,y=1$,得 $C=-1$. 于是所求特解为

$$y^3=y^2-x^2.$$

(2) 令 $u=\dfrac{y}{x}$,有 $y'=u+xu'$,则原方程成为 $u+xu'=\dfrac{1}{u}+u$. 分离变量,得 $u\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$. 积分得

$$\frac{1}{2}u^2=\ln|x|+C,$$

将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入上式并整理,得通解

$$y^2=2x^2(\ln|x|+C).$$

代入初值条件 $x=1,y=2$,解得 $C=2$. 于是所求特解为

$$y^2=2x^2(\ln x+2).$$

(3) 将原方程写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1+2\dfrac{y}{x}-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+2\dfrac{y}{x}-1}=0,$$

令 $u=\dfrac{y}{x}$,有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,则原方程成为

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{1+2u-u^2}{u^2+2u-1}=0,$$

整理并分离变量,得

$$\frac{1-2u-u^2}{u^3+u^2+u+1}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

积分得

$$\int\frac{1-2u-u^2}{u^3+u^2+u+1}\mathrm{d}u=\int\frac{1-2u-u^2}{(u+1)(u^2+1)}\mathrm{d}u=\int\left(\frac{1}{u+1}-\frac{2u}{u^2+1}\right)\mathrm{d}u$$
$$=\ln\frac{|u+1|}{u^2+1}=\ln|x|+\ln C,$$

故

$$\frac{u+1}{u^2+1}=Cx.$$

代入 $u=\frac{y}{x}$并整理,得通解$\frac{y+x}{y^2+x^2}=C$. 以初值条件 $x=1,y=1$ 定出 $C=1$. 故所求特解为

$$\frac{x+y}{x^2+y^2}=1.$$

3. 设有连结点 $O(0,0)$ 和 $A(1,1)$ 的一段向上凸的曲线弧$\overset{\frown}{OA}$,对于$\overset{\frown}{OA}$上任一点 $P(x,y)$,曲线弧$\overset{\frown}{OP}$与直线段$\overline{OP}$所围图形的面积为 x^2,求曲线弧$\overset{\frown}{OA}$的方程.

解 设曲线弧的方程为 $y=y(x)$. 依题意,有

$$\int_0^x y(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}xy(x)=x^2.$$

上式两端对 x 求导,

$$y(x)-\frac{1}{2}y(x)-\frac{1}{2}xy'(x)=2x,$$

即得微分方程

$$y'=\frac{y}{x}-4.$$

令 $u=\frac{y}{x}$,有$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,则微分方程成为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\frac{4}{x}.$$

积分得

$$u=-4\ln x+C,$$

因 $u=\frac{y}{x}$,故有

$$y = x(-4\ln x + C).$$

又因曲线过点 $A(1,1)$,故 $1 = C$. 于是得曲线弧的方程

$$y = x(1 - 4\ln x).$$

*4. 化下列方程为齐次方程,并求出通解:

(1) $(2x - 5y + 3)\mathrm{d}x - (2x + 4y - 6)\mathrm{d}y = 0$;

(2) $(x - y - 1)\mathrm{d}x + (4y + x - 1)\mathrm{d}y = 0$;

(3) $(3y - 7x + 7)\mathrm{d}x + (7y - 3x + 3)\mathrm{d}y = 0$;

(4) $(x + y)\mathrm{d}x + (3x + 3y - 4)\mathrm{d}y = 0$.

解 (1) 令 $x = X + h, y = Y + k$,则 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}X, \mathrm{d}y = \mathrm{d}Y$,且原方程成为

$$(2X - 5Y + 2h - 5k + 3)\mathrm{d}X - (2X + 4Y + 2h + 4k - 6)\mathrm{d}Y = 0.$$

令

$$\begin{cases} 2h - 5k + 3 = 0, \\ 2h + 4k - 6 = 0, \end{cases}$$

解此方程组得 $h = 1, k = 1$. 故在变换 $x = X + 1, y = Y + 1$ 下原方程化为 $(2X - 5Y)\mathrm{d}X - (2X + 4Y)\mathrm{d}Y = 0$,即

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{2X - 5Y}{2X + 4Y} = \frac{2 - 5\dfrac{Y}{X}}{2 + 4\dfrac{Y}{X}}.$$

又令 $u = \dfrac{Y}{X}$,有 $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = u + X\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}$,则原方程成为

$$u + X\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X} = \frac{2 - 5u}{2 + 4u},$$

即

$$\frac{4u + 2}{4u^2 + 7u - 2}\mathrm{d}u = -\frac{1}{X}\mathrm{d}X.$$

积分

$$\begin{aligned}\int \frac{4u + 2}{4u^2 + 7u - 2}\mathrm{d}u &= \int\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{u + 2} + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4u - 1}\right)\mathrm{d}u \\ &= \frac{2}{3}\ln|u + 2| + \frac{1}{3}\ln|4u - 1| \\ &= \frac{1}{3}\ln|(u + 2)^2(4u - 1)| \\ &= -\ln|X| + \ln C_1.\end{aligned}$$

得

$$\ln|(u + 2)^2(4u - 1)| = -\ln|X^3| + \ln C_2\ (C_2 = C_1^3),$$

即

$$(u+2)^2(4u-1)X^3 = \pm C_2,$$

因 $u=\dfrac{Y}{X}$,故上式成为

$$(2X+Y)^2(4Y-X) = \pm C_2.$$

代入 $X=x-1, Y=y-1$,得原方程的通解

$$(2x+y-3)^2(4y-x-3) = C.$$

（2）将原方程写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-x+y+1}{4y+x-1}=\frac{y-(x-1)}{4y+(x-1)},$$

令 $X=x-1, Y=y$,则 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}Y, \mathrm{d}x=\mathrm{d}X$,且原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{Y-X}{4Y+X}=\frac{Y/X-1}{4Y/X+1}.$$

又令 $u=\dfrac{Y}{X}$,有 $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=u+X\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}$,则原方程成为

$$\frac{4u+1}{4u^2+1}\mathrm{d}u+\frac{1}{X}\mathrm{d}X=0.$$

积分

$$\int\left(\frac{4u}{4u^2+1}+\frac{1}{4u^2+1}\right)\mathrm{d}u+\int\frac{\mathrm{d}X}{X}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(4u^2+1)+\frac{1}{2}\arctan(2u)+\ln|X|=C_1,$$

即 $\ln[X^2(4u^2+1)]+\arctan(2u)=C\ (C=2C_1)$. 将 $u=\dfrac{Y}{X}=\dfrac{y}{x-1}$ 代入上式,得原方程的通解

$$\ln[4y^2+(x-1)^2]+\arctan\frac{2y}{x-1}=C.$$

（3）令 $x=X+h, y=Y+k$,则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}X, \mathrm{d}y=\mathrm{d}Y$,且原方程成为

$$(3Y-7X+3k-7h+7)\mathrm{d}X+(7Y-3X+7k-3h+3)\mathrm{d}Y=0.$$

令

$$\begin{cases}3k-7h+7=0,\\7k-3h+3=0,\end{cases}$$

解此方程组,得 $h=1, k=0$. 故在变换 $x=X+1, y=Y$ 下,原方程化为 $(3Y-7X)\mathrm{d}X+(7Y-3X)\mathrm{d}Y=0$,即

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{7X-3Y}{7Y-3X}=\frac{7-3Y/X}{7Y/X-3}$$

又令 $u=\dfrac{Y}{X}$,有 $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=u+X\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}$,则原方程成为

$$u+X\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}=\frac{7-3u}{7u-3},$$

即

$$\frac{7u-3}{u^2-1}\mathrm{d}u=-7\frac{\mathrm{d}X}{X},$$

积分

$$\int\left(\frac{2}{u-1}+\frac{5}{u+1}\right)\mathrm{d}u=-7\int\frac{\mathrm{d}X}{X}$$

得

$$2\ln|u-1|+5\ln|u+1|=-7\ln|X|+\ln C_1.$$

即 $X^7(u-1)^2(u+1)^5=\pm C_1$. 将 $u=\frac{Y}{X}=\frac{y}{x-1}$代入上式,得原方程的通解

$$(y-x+1)^2(y+x-1)^5=C.$$

(4) 将原方程写成$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y}{4-3(x+y)}$$\left(\text{该方程属于}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(ax+by+c)\text{类型,解此类方程,一般可令 }u=ax+by+c\right)$. 令 $u=x+y$,则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1$,且原方程成为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1=\frac{u}{4-3u},$$

即

$$\frac{3u-4}{u-2}\mathrm{d}u=2\mathrm{d}x.$$

积分得 $3u+2\ln|u-2|=2x+C$. 将 $u=x+y$ 代入上式,得原方程的通解

$$x+3y+2\ln|x+y-2|=C.$$

习题 7-4　一阶线性微分方程

1. 求下列微分方程的通解:

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=\mathrm{e}^{-x}$;　　(2) $xy'+y=x^2+3x+2$;

(3) $y'+y\cos x=\mathrm{e}^{-\sin x}$;　　(4) $y'+y\tan x=\sin 2x$;

(5) $(x^2-1)y'+2xy-\cos x=0$;　　(6) $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}+3\rho=2$;

(7) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2xy=4x$;　　(8) $y\ln y\mathrm{d}x+(x-\ln y)\mathrm{d}y=0$;

(9) $(x-2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y+2(x-2)^3$;　　(10) $(y^2-6x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=0$.

解 (1) $y=\mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}x}\left[\int \mathrm{e}^{-x}\cdot \mathrm{e}^{\int \mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{-x}\left(\int \mathrm{e}^{-x}\cdot \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+C\right)$

$=\mathrm{e}^{-x}(x+C).$

(2) 将方程改写成 $y'+\frac{1}{x}y=x+3+\frac{2}{x}$,则

$$y=\mathrm{e}^{-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int\left(x+3+\frac{2}{x}\right)\mathrm{e}^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\frac{1}{x}\left[\int\left(x+3+\frac{2}{x}\right)x\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left[\int(x^2+3x+2)\mathrm{d}x+C\right]=\frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+2x+C\right)$$

$$=\frac{x^2}{3}+\frac{3x}{2}+2+\frac{C}{x}.$$

(3) $y=\mathrm{e}^{-\int \cos x\mathrm{d}x}\left(\int \mathrm{e}^{-\sin x}\cdot \mathrm{e}^{\int \cos x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-\sin x}\left(\int \mathrm{e}^{-\sin x}\cdot \mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x+C\right)$

$=\mathrm{e}^{-\sin x}(x+C).$

(4) $y=\mathrm{e}^{-\int \tan x\mathrm{d}x}\left(\int \sin 2x\mathrm{e}^{\int \tan x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$

$$=\cos x\left(\int \frac{\sin 2x}{\cos x}\mathrm{d}x+C\right)=\cos x\left(\int 2\sin x\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=C\cos x-2\cos^2 x.$$

(5) 将原方程写成 $y'+\frac{2x}{x^2-1}y=\frac{\cos x}{x^2-1}$,则

$$y=\mathrm{e}^{-\int \frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x}\left(\int \frac{\cos x}{x^2-1}\mathrm{e}^{\int \frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\frac{1}{x^2-1}\left[\int \frac{\cos x}{x^2-1}(x^2-1)\mathrm{d}x+C\right]=\frac{1}{x^2-1}\left(\int \cos x\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\frac{\sin x+C}{x^2-1}.$$

(6) $\rho=\mathrm{e}^{-\int 3\mathrm{d}\theta}\left(\int 2\mathrm{e}^{\int 3\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta+C\right)=\mathrm{e}^{-3\theta}\left(\int 2\mathrm{e}^{3\theta}\mathrm{d}\theta+C\right)$

$$=\mathrm{e}^{-3\theta}\left(\frac{2}{3}\mathrm{e}^{3\theta}+C\right)=\frac{2}{3}+C\mathrm{e}^{-3\theta}.$$

(7) $y=\mathrm{e}^{-\int 2x\mathrm{d}x}\left(\int 4x\mathrm{e}^{\int 2x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-x^2}\left(\int 4x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x+C\right)$

$$=\mathrm{e}^{-x^2}(2\mathrm{e}^{x^2}+C)=2+C\mathrm{e}^{-x^2}.$$

(8) 将原方程写成 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\frac{1}{y\ln y}x=\frac{1}{y}$,则

$$x=\mathrm{e}^{-\int \frac{\mathrm{d}y}{y\ln y}}\left(\int \frac{1}{y}\mathrm{e}^{\int \frac{\mathrm{d}y}{y\ln y}}\mathrm{d}y+C_1\right)=\mathrm{e}^{-\ln|\ln y|}\left[\int \frac{1}{y}\mathrm{e}^{\ln|\ln y|}\mathrm{d}y+C_1\right]$$

$$=\frac{1}{\ln y}\left(\int \frac{\ln y}{y}\mathrm{d}y+C_1\right)=\frac{1}{\ln y}\left(\frac{1}{2}\ln^2 y+C_1\right),$$

即 $2x\ln y=\ln^2 y+C\ (C=2C_1)$.

(9) 将原方程写成 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{1}{x-2}y=2(x-2)^2$,则

$$\begin{aligned}y&=e^{\int\frac{1}{x-2}dx}\left[\int 2(x-2)^2\cdot e^{-\int\frac{1}{x-2}dx}dx+C\right]\\&=(x-2)\left[\int 2(x-2)^2\cdot\frac{1}{x-2}dx+C\right]\\&=(x-2)\left[\int 2(x-2)dx+C\right]\\&=(x-2)[(x-2)^2+C]=(x-2)^3+C(x-2).\end{aligned}$$

(10) 将原方程改写成 $\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{3}{y}x=-\dfrac{y}{2}$,则

$$\begin{aligned}x&=e^{\int\frac{3}{y}dy}\left(\int -\frac{y}{2}e^{-\int\frac{3}{y}dy}dy+C\right)\\&=y^3\left(\int -\frac{y}{2}\cdot\frac{1}{y^3}dy+C\right)=y^3\left(\int -\frac{1}{2y^2}dy+C\right)\\&=y^3\left(\frac{1}{2y}+C\right)=\frac{y^2}{2}+Cy^3.\end{aligned}$$

2. 求下列微分方程满足所给初值条件的特解:

(1) $\dfrac{dy}{dx}-y\tan x=\sec x,y|_{x=0}=0$;　　(2) $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{\sin x}{x},y|_{x=\pi}=1$;

(3) $\dfrac{dy}{dx}+y\cot x=5e^{\cos x},y|_{x=\frac{\pi}{2}}=-4$;(4) $\dfrac{dy}{dx}+3y=8,y|_{x=0}=2$;

(5) $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2-3x^2}{x^3}y=1,y|_{x=1}=0$.

解　(1) $y=e^{\int\tan x dx}\left(\int\sec x e^{-\int\tan x dx}dx+C\right)$

$$\begin{aligned}&=e^{-\ln|\cos x|}\left(\int\sec x e^{\ln|\cos x|}dx+C\right)=\frac{1}{\cos x}\left(\int\sec x\cdot\cos x dx+C\right)\\&=\frac{x+C}{\cos x},\end{aligned}$$

代入初值条件 $x=0,y=0$,得 $C=0$. 故所求特解为

$$y=\frac{x}{\cos x}.$$

(2) $y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int\dfrac{\sin x}{x}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)=\dfrac{1}{x}\left(\int\dfrac{\sin x}{x}\cdot x dx+C\right)$

$$=\frac{1}{x}(-\cos x+C),$$

代入初值条件 $x=\pi,y=1$,得 $C=\pi-1$,故所求特解为

$$y=\frac{1}{x}(\pi-1-\cos x).$$

(3) $y=e^{-\int\cot x\mathrm{d}x}\left(\int 5e^{\cos x}e^{\int\cot x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$

$$=\frac{1}{\sin x}\left(\int 5e^{\cos x}\cdot\sin x\mathrm{d}x+C\right)=\frac{1}{\sin x}(-5e^{\cos x}+C),$$

代入初值条件 $x=\frac{\pi}{2}$, $y=-4$,得 $C=1$,故所求特解为 $y=\frac{1-5e^{\cos x}}{\sin x}$,即

$$y\sin x+5e^{\cos x}=1.$$

(4) $y=e^{-\int 3\mathrm{d}x}\left(\int 8e^{\int 3\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=e^{-3x}\left(\int 8e^{3x}\mathrm{d}x+C\right)$

$$=e^{-3x}\left(\frac{8}{3}e^{3x}+C\right)=\frac{8}{3}+Ce^{-3x},$$

代入初值条件 $x=0$, $y=2$,得 $C=-\frac{2}{3}$,故所求特解为

$$y=\frac{2}{3}(4-e^{-3x}).$$

(5) $y=e^{-\int\left(\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x}\left[\int e^{\int\left(\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$

$$=e^{\frac{1}{x^2}+3\ln x}\left(\int e^{-\left(\frac{1}{x^2}+3\ln x\right)}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=x^3e^{\frac{1}{x^2}}\left(\int\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}\mathrm{d}x+C\right)=x^3e^{\frac{1}{x^2}}\left[\frac{1}{2}\int e^{-\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x^2}\right)+C\right]$$

$$=x^3e^{\frac{1}{x^2}}\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x^2}}+C\right)=\frac{x^3}{2}+Cx^3e^{\frac{1}{x^2}},$$

代入初值条件 $x=1$, $y=0$,得 $C=-\frac{1}{2e}$,故所求特解为

$$y=\frac{x^3}{2}\left(1-e^{\frac{1}{x^2}-1}\right).$$

3. 求一曲线的方程,这曲线通过原点,并且它在点 (x,y) 处的切线斜率等于 $2x+y$.

解 设曲线方程为 $y=y(x)$,依题意有 $y'=2x+y$,即

$$y'-y=2x,y|_{x=0}=0.$$

$$y=e^{\int\mathrm{d}x}\left(\int 2xe^{-\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=e^{x}\left(\int 2xe^{-x}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=e^{x}(-2xe^{-x}-2e^{-x}+C)=-2x-2+Ce^{x}.$$

由 $x=0$, $y=0$,得 $C=2$. 故所求曲线的方程为

$$y=2(e^{x}-x-1).$$

4. 设有一质量为 m 的质点作直线运动,从速度等于零的时刻起,有一个与运动方向一致、大小与时间成正比(比例系数为 k_1)的力作用于它,此外还受一与速度成正比

(比例系数为 k_2)的阻力作用．求质点运动的速度与时间的函数关系．

解　依题意,有 $ma=k_1t-k_2v,a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$,即

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=k_1t-k_2v,v\big|_{t=0}=0.$$

将方程改写成$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{k_2}{m}v=\frac{k_1}{m}t$,则

$$\begin{aligned}
v&=\mathrm{e}^{-\int\frac{k_2}{m}\mathrm{d}t}\left(\int\frac{k_1}{m}t\cdot\mathrm{e}^{\int\frac{k_2}{m}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C\right)\\
&=\mathrm{e}^{-\frac{k_2}{m}t}\left(\frac{k_1}{m}\int t\mathrm{e}^{\frac{k_2}{m}t}\mathrm{d}t+C\right)=\mathrm{e}^{-\frac{k_2}{m}t}\left(\frac{k_1}{k_2}t\mathrm{e}^{\frac{k_2}{m}t}-\frac{k_1}{k_2}\int\mathrm{e}^{\frac{k_2}{m}t}\mathrm{d}t+C\right)\\
&=\mathrm{e}^{-\frac{k_2}{m}t}\left(\frac{k_1}{k_2}t\mathrm{e}^{\frac{k_2}{m}t}-\frac{k_1m}{k_2^2}\mathrm{e}^{\frac{k_2}{m}t}+C\right)\\
&=\frac{k_1}{k_2}t-\frac{k_1m}{k_2^2}+C\mathrm{e}^{-\frac{k_2}{m}t}.
\end{aligned}$$

由 $t=0,v=0$,得 $C=\frac{k_1m}{k_2^2}$,故速度与时间的关系为

$$v=\frac{k_1}{k_2}t-\frac{k_1m}{k_2^2}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{k_2}{m}t}\right).$$

5. 设有一个由电阻 $R=10\,\Omega$、电感 $L=2\,\mathrm{H}$(亨)和电源电压 $E=20\sin 5t\,\mathrm{V}$(伏)串联组成的电路．开关 K 合上后,电路中有电流通过．求电流 i 与时间 t 的函数关系．

解　依题意,有　$20\sin 5t=10i+2\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$,即

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+5i=10\sin 5t,i\big|_{t=0}=0.$$

$$i=\mathrm{e}^{-\int 5\mathrm{d}t}\left(\int 10\sin 5t\mathrm{e}^{\int 5\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C_1\right)=\mathrm{e}^{-5t}\left(\int 10\sin 5t\mathrm{e}^{5t}\mathrm{d}t+C_1\right),$$

其中,记 $I=\int 10\sin 5t\mathrm{e}^{5t}\mathrm{d}t$,则

$$\begin{aligned}
I&=2\int\sin 5t\mathrm{d}(\mathrm{e}^{5t})=2\sin 5t\mathrm{e}^{5t}-2\int\mathrm{e}^{5t}\cos 5t\cdot 5\mathrm{d}t\\
&=2\sin 5t\mathrm{e}^{5t}-2\int\cos 5t\mathrm{d}(\mathrm{e}^{5t})\\
&=2\sin 5t\mathrm{e}^{5t}-2\cos 5t\mathrm{e}^{5t}-10\int\sin 5t\mathrm{e}^{5t}\mathrm{d}t\\
&=2\mathrm{e}^{5t}(\sin 5t-\cos 5t)-I,
\end{aligned}$$

故 $I=\mathrm{e}^{5t}(\sin 5t-\cos 5t)+C_2$,于是

$$i=\mathrm{e}^{-5t}\cdot[\mathrm{e}^{5t}(\sin 5t-\cos 5t)+C]\quad(C=C_1+C_2)$$

$$= \sin 5t - \cos 5t + Ce^{-5t}.$$

代入初值条件 $t=0, i=0$，得 $C=1$，故电流 i 与时间 t 的函数关系为

$$i = e^{-5t} + \sin 5t - \cos 5t,$$

按电学的习惯，可写成

$$i = e^{-5t} + \sqrt{2}\sin\left(5t - \frac{\pi}{4}\right).$$

6. 验证形如 $yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0$ 的微分方程，可经变量代换 $v = xy$ 化为可分离变量的方程，并求其通解.

解　由 $v = xy$，即 $y = \dfrac{v}{x}$，得 $dy = \dfrac{xdv - vdx}{x^2}$. 又原方程改写成 $xyf(xy)dx + x^2g(xy)dy = 0$，并将 $v = xy, dy = \dfrac{xdv - vdx}{x^2}$ 代入上式，得

$$vf(v)dx + g(v)(xdv - vdx) = 0,$$

可分离变量，得

$$\frac{g(v)dv}{v[f(v) - g(v)]} + \frac{dx}{x} = 0.$$

积分得

$$\int \frac{g(v)dv}{v[f(v) - g(v)]} + \ln|x| = C,$$

代入 $v = xy$ 后，便是原方程的通解.

7. 用适当的变量代换将下列方程化为可分离变量的方程，然后求出通解：

(1) $\dfrac{dy}{dx} = (x+y)^2$；　(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x-y} + 1$；

(3) $xy' + y = y(\ln x + \ln y)$；

(4) $y' = y^2 + 2(\sin x - 1)y + \sin^2 x - 2\sin x - \cos x + 1$；

(5) $y(xy+1)dx + x(1 + xy + x^2y^2)dy = 0$.

解　(1) 令 $u = x + y$，则 $\dfrac{du}{dx} = 1 + \dfrac{dy}{dx}$，且原方程变为 $\dfrac{du}{dx} = u^2 + 1$，分离变量，得

$$\frac{du}{1+u^2} = dx.$$

积分得 $\arctan u = x + C$，即 $u = \tan(x + C)$，代入 $u = x + y$，得原方程的通解

$$y = -x + \tan(x + C).$$

(2) 令 $u = x - y$，则 $\dfrac{du}{dx} = 1 - \dfrac{dy}{dx}$，且原方程变为 $\dfrac{du}{dx} = -\dfrac{1}{u}$，即

$$udu + dx = 0$$

积分得

$$\frac{u^2}{2} + x = C_1,$$

代入 $u=x-y$,得原方程的通解 $(x-y)^2+2x=C\ (C=2C_1)$.

(3) 令 $u=xy$,则 $u'=y+xy'$,且原方程变为 $u'=\frac{u}{x}\ln u$,即

$$\frac{\mathrm{d}u}{u\ln u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

积分得 $\ln|\ln u|=\ln|x|+\ln C_1$,即 $u=\mathrm{e}^{Cx}$. 代入 $u=xy$,得原方程的通解 $xy=\mathrm{e}^{Cx}$,即 $y=\frac{\mathrm{e}^{Cx}}{x}$.

(4) 将原方程写成 $y'=(y+\sin x-1)^2-\cos x$,令 $u=y+\sin x-1$,则 $u'=y'+\cos x$,且原方程变为 $u'=u^2$,即 $\frac{\mathrm{d}u}{u^2}=\mathrm{d}x$.

积分得 $-\frac{1}{u}=x+C$,即 $u=-\frac{1}{x+C}$. 代入 $u=y+\sin x-1$,得原方程的通解

$$y=1-\sin x-\frac{1}{x+C}.$$

(5) 原方程改写成 $xy(xy+1)+x^2(1+xy+x^2y^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$. 令 $u=xy$,即 $y=\frac{u}{x}$,则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-u}{x^2}$,且原方程变为

$$u(u+1)+(1+u+u^2)\left(x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-u\right)=0,$$

整理并分离变量,得 $\frac{1+u+u^2}{u^3}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}$. 积分得 $-\frac{1}{2u^2}-\frac{1}{u}+\ln|u|=\ln|x|+C_1$,代入 $u=xy$,并整理,得原方程的通解为

$$2x^2y^2\ln|y|-2xy-1=Cx^2y^2\ (C=2C_1).$$

***8.** 求下列伯努利方程的通解:

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=y^2(\cos x-\sin x)$;　　(2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-3xy=xy^2$;

(3) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{3}y=\frac{1}{3}(1-2x)y^4$;　　(4) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=xy^5$;

(5) $x\mathrm{d}y-[y+xy^3(1+\ln x)]\mathrm{d}x=0$.

解 (1) 将原方程改写成 $\frac{1}{y^2}y'+\frac{1}{y}=\cos x-\sin x$,并令 $z=\frac{1}{y}$,则 $z'=-\frac{1}{y^2}y'$,且原方程化为

$$z'-z=\sin x-\cos x.$$

$$z=\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\left[\int(\sin x-\cos x)\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$= e^x\left[\int(\sin x - \cos x)e^{-x}dx + C\right]$$

$$= e^x\left(\int\sin xe^{-x}dx - \int\cos xe^{-x}dx + C\right),$$

其中 $\int\sin xe^{-x}dx = -\int\sin x d(e^{-x}) = -\sin xe^{-x} + \int e^{-x}\cos xdx$, 故

$$z = e^x(-\sin xe^{-x} + C) = Ce^x - \sin x,$$

即$\frac{1}{y} = Ce^x - \sin x$为所求通解.

(2) 将原方程改写成 $y^{-2}y' - 3xy^{-1} = x$,并令 $z = y^{-1}$,则 $z' = -y^{-2}y'$,且原方程化为

$$z' + 3xz = -x,$$

$$z = e^{-\int 3xdx}\left(\int -xe^{\int 3xdx}dx + C\right) = e^{-\frac{3}{2}x^2}\left(\int -xe^{\frac{3}{2}x^2}dx + C\right)$$

$$= e^{-\frac{3}{2}x^2}\left(-\frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}x^2} + C\right) = -\frac{1}{3} + Ce^{-\frac{3}{2}x^2},$$

故原方程的通解为

$$y^{-1} = -\frac{1}{3} + Ce^{-\frac{3}{2}x^2},$$

或写成

$$\frac{3}{2}x^2 + \ln\left(1 + \frac{3}{y}\right) = C_1 \quad (C_1 = \ln 3C).$$

(3) 将原方程改写成 $y^{-4}y' + \frac{1}{3}y^{-3} = \frac{1}{3}(1 - 2x)$,并令 $z = y^{-3}$,则 $z' = -3y^{-4}y'$,于是原方程化为

$$z' - z = 1 - 2x.$$

$$z = e^{\int dx}\left[\int(1 - 2x)e^{-\int dx}dx + C\right] = e^x\left[\int(1 - 2x)e^{-x}dx + C\right]$$

$$= e^x[(-2x - 1)e^{-x} + C] = -2x - 1 + Ce^x,$$

即 $y^{-3} = -2x - 1 + Ce^x$ 为所求通解.

(4) 将原方程改写成 $y^{-5}y' - y^{-4} = x$,并令 $z = y^{-4}$,则 $z' = -4y^{-5}y'$,且原方程化为

$$z' + 4z = -4x,$$

$$z = e^{-\int 4dx}\left(\int -4xe^{\int 4xdx}dx + C\right) = e^{-4x}\left(\int -4xe^{4x}dx + C\right)$$

$$= e^{-4x}\left(-xe^{4x} + \frac{1}{4}e^{4x} + C\right) = -x + \frac{1}{4} + Ce^{-4x}.$$

故原方程的通解为

$$y^{-4} = -x + \frac{1}{4} + Ce^{-4x}.$$

(5) 原方程可写成 $y'-\frac{1}{x}y=(1+\ln x)y^3$，即 $y^{-3}y'-\frac{1}{x}y^{-2}=1+\ln x$，令 $z=y^{-2}$，则 $z'=-2y^{-3}y'$，且原方程化为

$$z'+\frac{2}{x}z=-2(1+\ln x).$$

$$\begin{aligned}z&=e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left[\int-2(1+\ln x)e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+C\right]\\&=x^{-2}\left[\int-2(1+\ln x)x^2dx+C\right]\\&=x^{-2}\left[-\frac{2}{3}x^3(1+\ln x)+\frac{2}{3}\int x^3\cdot\frac{1}{x}dx+C\right]\\&=x^{-2}\left[-\frac{2}{3}x^3(1+\ln x)+\frac{2}{9}x^3+C\right]\\&=-\frac{2}{3}x(1+\ln x)+\frac{2}{9}x+Cx^{-2}.\end{aligned}$$

故原方程通解为

$$y^{-2}=-\frac{2}{3}x(1+\ln x)+\frac{2}{9}x+Cx^{-2},$$

或写成

$$\frac{x^2}{y^2}=-\frac{4}{9}x^3-\frac{2}{3}x^3\ln x+C.$$

习题 7－5　可降阶的高阶微分方程

1. 求下列各微分方程的通解：

(1) $y''=x+\sin x$；　(2) $y'''=xe^x$；

(3) $y''=\frac{1}{1+x^2}$；　(4) $y''=1+y'^2$；

(5) $y''=y'+x$；　(6) $xy''+y'=0$；

(7) $yy''+2y'^2=0$；　(8) $y^3y''-1=0$；

(9) $y''=\frac{1}{\sqrt{y}}$；　(10) $y''=(y')^3+y'$.

解　(1) $y'=\int(x+\sin x)dx=\frac{x^2}{2}-\cos x+C_1$,

$$y=\int\left(\frac{x^2}{2}-\cos x+C_1\right)dx=\frac{x^3}{6}-\sin x+C_1x+C_2.$$

(2) $y''=\int xe^xdx=xe^x-e^x+C'_1=(x-1)e^x+C'_1$,

$$y' = \int[(x-1)e^x + C'_1]dx = (x-1)e^x - \int e^x dx + C'_1 x + C_2$$
$$= (x-2)e^x + C'_1 x + C_2,$$
$$y = \int[(x-2)e^x + C'_1 x + C_2]dx = (x-2)e^x - \int e^x dx + \frac{C'_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3$$
$$= (x-3)e^x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

(3) $y' = \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C_1,$

$$y = \int(\arctan x + C_1)dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx + C_1 x$$
$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1 x + C_2.$$

(4) 令 $y'=p$,则 $y''=p'$,且原方程化为 $p'=1+p^2$. 分离变量,得

$$\frac{dp}{1+p^2} = dx.$$

积分得 $\arctan p = x + C_1$,即 $p = y' = \tan(x+C_1)$,再积分得通解

$$y = \int \tan(x+C_1)dx = -\ln|\cos(x+C_1)| + C_2.$$

(5) 令 $y'=p$,则 $y''=p'$,且原方程可化为

$$p' - p = x.$$

利用一阶线性方程的求解公式,得

$$p = e^{\int dx}\left(\int x e^{-\int dx}dx + C_1\right) = e^x\left(\int x e^{-x}dx + C_1\right)$$
$$= e^x(-xe^{-x} - e^{-x} + C_1) = -x - 1 + C_1 e^x.$$

积分得通解

$$y = \int(C_1 e^x - x - 1)dx = C_1 e^x - \frac{x^2}{2} - x + C_2.$$

(6) 令 $y'=p$,则 $y''=p'$,且原方程化为 $xp'+p=0$,分离变量,得

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dx}{x},$$

积分得 $\ln|p| = \ln\left|\frac{1}{x}\right| + \ln C_1$,即 $p = \frac{C_1}{x}$. 再积分,得通解

$$y = \int \frac{C_1}{x}dx = C_1 \ln|x| + C_2.$$

(7) 令 $y'=p$,则 $y''=p'=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}p$,且原方程化为 $yp\frac{dp}{dy}+2p^2=0$. 分离变量,得

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}=-2\frac{\mathrm{d}y}{y},$$

积分得 $\ln|p|=\ln\frac{1}{y^2}+\ln C_0$，即 $y'=p=\frac{C_0}{y^2}$，分离变量，得 $y^2\mathrm{d}y=C_0\mathrm{d}x$，积分得 $y^3=3C_0x+C_2$，即通解为 $y^3=C_1x+C_2$.

(8) 令 $y'=p$，则 $y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，且原方程化为 $y^3p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-1=0$. 分离变量，得

$$p\mathrm{d}p=\frac{1}{y^3}\mathrm{d}y,$$

积分得 $p^2=-\frac{1}{y^2}+C_1$，故

$$y'=p=\pm\sqrt{C_1-\frac{1}{y^2}}=\pm\frac{1}{|y|}\sqrt{C_1y^2-1}.$$

分离变量，得

$$\frac{|y|\mathrm{d}y}{\sqrt{C_1y^2-1}}=\pm\mathrm{d}x.$$

由于 $|y|=y\operatorname{sgn}(y)$，故上式两端积分，

$$\operatorname{sgn}(y)\int\frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{C_1y^2-1}}=\pm\int\mathrm{d}x,$$

$$\operatorname{sgn}(y)\sqrt{C_1y^2-1}=\pm C_1x+C_2.$$

两边平方，得 $C_1y^2-1=(C_1x+C_2)^2$.

(9) 方程 $y''=\frac{1}{\sqrt{y}}$ 属于 $y''=f(y)$ 型方程，除了设 $y'=p,y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$ 来降阶求解外，还可以用如下方法求解：

在 $y''=f(y)$ 的两端乘以 $2y'$，得

$$2y'y''=2f(y)y',$$

即 $(y'^2)'=2f(y)y'$. 若 $F(y)$ 是 $f(y)$ 的原函数，则有

$$(y'^2)'=2[F(y)]',$$

积分得到降阶的方程 $y'^2=2F(y)+C_1$.

本小题按上述方法求解：用 $2y'$ 乘方程 $y''=\frac{1}{\sqrt{y}}$ 的两端，得

$$2y'y''=\frac{2y'}{\sqrt{y}}$$

即 $(y'^2)'=(4\sqrt{y})'$，故 $y'^2=4\sqrt{y}+C_1'$，有 $y'=\pm2\sqrt{\sqrt{y}+C_1}\ \left(C_1=\frac{C_1'}{4}\right)$.

分离变量,得

$$dx = \pm \frac{dy}{2\sqrt{\sqrt{y}+C_1}}.$$

积分,得

$$\begin{aligned} x &= \pm\int \frac{d(\sqrt{y})^2}{2\sqrt{\sqrt{y}+C_1}} = \pm\int \frac{\sqrt{y}\,d\sqrt{y}}{\sqrt{\sqrt{y}+C_1}} = \pm\int \frac{(\sqrt{y}+C_1)-C_1}{\sqrt{\sqrt{y}+C_1}}d(\sqrt{y}) \\ &= \pm\left[\int\sqrt{\sqrt{y}+C_1}\,d(\sqrt{y}+C_1) - C_1\int\frac{1}{\sqrt{\sqrt{y}+C_1}}d(\sqrt{y}+C_1)\right] \\ &= \pm\left[\frac{2}{3}(\sqrt{y}+C_1)^{\frac{3}{2}} - 2C_1(\sqrt{y}+C_1)^{\frac{1}{2}}\right] + C_2. \end{aligned}$$

(10) 令 $y'=p$,则 $y''=p\frac{dp}{dy}$,原方程化为 $p\frac{dp}{dy}=p^3+p$,即

$$p\left[\frac{dp}{dy}-(1+p^2)\right]=0.$$

若 $p\equiv 0$,则 $y\equiv C$. $y\equiv C$ 是原方程的解,但不是通解.

若 $p\neq 0$,由于 p 的连续性,必在 x 的某区间有 $p\neq 0$. 于是

$$\frac{dp}{dy}-(1+p^2)=0.$$

分离变量,得$\frac{dp}{1+p^2}=dy$,积分得 $\arctan p = y-C_1$,即 $p=\tan(y-C_1)$,亦即$\cot(y-C_1)dy=dx$. 积分得 $\ln\sin(y-C_1)=x+\ln C_2$. 即 $\sin(y-C_1)=C_2e^x$,也可写成 $y=\arcsin(C_2e^x)+C_1$.

由于当 $C_2=0$ 时,$y=C_1$,故前面所得的解 $y\equiv C$ 也包含在这个通解之内.

2. 求下列各微分方程满足所给初值条件的特解:

(1) $y^3y''+1=0, y|_{x=1}=1, y'|_{x=1}=0$;

(2) $y''-ay'^2=0, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=-1$;

(3) $y'''=e^{ax}, y|_{x=1}=y'|_{x=1}=y''|_{x=1}=0$;

(4) $y''=e^{2y}, y|_{x=0}=y'|_{x=0}=0$;

(5) $y''=3\sqrt{y}, y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=2$;

(6) $y''+(y')^2=1, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=0$.

解 (1) 将原方程写成 $y''+\frac{1}{y^3}=0$,两端乘以 $2y'$,得

$$2y'y''+\frac{2y'}{y^3}=0,$$

即$\left(y'^2-\frac{1}{y^2}\right)'=0$,由此得

$$y'^2-\frac{1}{y^2}=C_1.$$

代入初值条件:$y=1,y'=0$,得 $C_1=-1$,故有

$$y'^2=\frac{1}{y^2}-1=\frac{1-y^2}{y^2},$$

$$y'=\pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y},$$

分离变量,得

$$\frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=\pm\mathrm{d}x,$$

积分得 $-\sqrt{1-y^2}=\pm x+C_2$. 代入初值条件:$x=1,y=1$,得 $C=\mp1$. 于是有

$$-\sqrt{1-y^2}=\pm(x-1).$$

两边平方,得 $x^2+y^2=2x$. 由于在点 $x=1$ 处,$y=1$,故在 $x=1$ 的某邻域内$y>0$,因而特解可表示为

$$y=\sqrt{2x-x^2}.$$

(2) 令 $y'=p$,则 $y''=p'$,原方程化为 $p'-ap^2=0$,分离变量即

$$\frac{\mathrm{d}p}{p^2}=a\mathrm{d}x,$$

积分得 $-\frac{1}{p}=ax+C_1$. 代入初值条件 $x=0,p=y'=-1$,得 $C_1=1$. 从而有 $-\frac{1}{y'}=ax+1$,即

$$y'=-\frac{1}{ax+1},$$

又积分得

$$y=-\frac{1}{a}\ln(ax+1)+C_2.$$

代入初值条件 $y\big|_{x=0}=0$,得 $C_2=0$,故所求特解为

$$y=-\frac{1}{a}\ln(ax+1).$$

(3) 因 $y'''=\mathrm{e}^{ax}$,并由初值条件 $x=1,y''=0$,故积分得

$$y''=\int_1^x y'''\mathrm{d}x=\int_1^x\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}(\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^a).$$

又因 $x=1$ 时,$y'=0$,故积分得

$$\begin{aligned}y'&=\int_1^x y''\mathrm{d}x=\int_1^x\frac{1}{a}(\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^a)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\left[\frac{1}{a}(\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^a)-\mathrm{e}^a(x-1)\right]\\&=\frac{1}{a^2}\mathrm{e}^{ax}-\frac{\mathrm{e}^a}{a}x+\frac{\mathrm{e}^a}{a}\left(1-\frac{1}{a}\right).\end{aligned}$$

又因 $x=1$ 时，$y=0$，故再积分得

$$\begin{aligned} y &= \int_1^x y'\mathrm{d}x = \int_1^x \left[\frac{1}{a^2}\mathrm{e}^{ax} - \frac{\mathrm{e}^a}{a}x + \frac{\mathrm{e}^a}{a}\left(1-\frac{1}{a}\right)\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{a^3}(\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^a) - \frac{\mathrm{e}^a}{2a}(x^2-1) + \frac{\mathrm{e}^a}{a}\left(1-\frac{1}{a}\right)(x-1) \\ &= \frac{1}{a^3}\mathrm{e}^{ax} - \frac{\mathrm{e}^a}{2a}x^2 + \frac{\mathrm{e}^a}{a^2}(a-1)x + \frac{\mathrm{e}^a}{2a^3}(2a-a^2-2). \end{aligned}$$

（4）在原方程两端同乘以 $2y'$，得 $2y'y''=2y'\mathrm{e}^{2y}$，即 $(y'^2)'=(\mathrm{e}^{2y})'$，积分得

$$y'^2 = \mathrm{e}^{2y} + C_1.$$

代入初值条件：$x=0, y=y'=0$，得 $C_1=-1$，从而有

$$y' = \pm\sqrt{\mathrm{e}^{2y}-1}.$$

分离变量后积分

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\mathrm{e}^{2y}-1}} = \pm\int \mathrm{d}x,$$

即

$$\int \frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-y})}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2y}}} = \mp\int \mathrm{d}x,$$

得 $\arcsin(\mathrm{e}^{-y}) = \mp x + C_2$. 代入初值条件：$x=0, y=0$，得 $C_2=\frac{\pi}{2}$. 于是得特解

$$\mathrm{e}^{-y} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\pm x\right) = \cos x,$$

即 $y=-\ln\cos x=\ln\sec x$.

（5）在原方程两端同乘以 $2y'$，得 $2y'y''=6y'\sqrt{y}$，即 $(y'^2)'=(4y^{\frac{3}{2}})'$，积分得 $y'^2=4y^{\frac{3}{2}}+C_1$. 代入初值条件 $x=0, y=1, y'=2$，得 $C_1=0$，从而有 $y'=\pm 2y^{\frac{3}{4}}$. 并由于 $y'|_{x=0}=2$，故取 $y'=2y^{\frac{3}{4}}$. 分离变量后积分 $\int\frac{\mathrm{d}y}{y^{\frac{3}{4}}}=2\int\mathrm{d}x$ 得 $4y^{\frac{1}{4}}=2x+C_2$. 代入初值条件：$x=0, y=1$，得 $C_2=4$，于是得特解

$$y = \left(\frac{x}{2}+1\right)^4.$$

（6）令 $y'=p$，则 $y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，原方程变为 $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p^2=1$. 分离变量，得

$$\frac{p\mathrm{d}p}{1-p^2} = \mathrm{d}y.$$

由初值条件：$y=0, p=0$，积分

$$\int_0^p \frac{p\mathrm{d}p}{1-p^2} = \int_0^y \mathrm{d}y$$

得

$$-\frac{1}{2}\ln(1-p^2)=y,$$

即 $p=\pm\sqrt{1-e^{-2y}}$. 又分离变量,得

$$\frac{dy}{\sqrt{1-e^{-2y}}}=\pm dx.$$

由初值条件:$x=0,y=0$,积分

$$\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{1-e^{-2y}}}=\pm\int_0^x dx,$$

$$\int_0^y\frac{d(e^y)}{\sqrt{e^{2y}-1}}=\pm\int_0^x dx,$$

得

$$\ln(e^y+\sqrt{e^{2y}-1})=\pm x,$$

即

$$e^y=\frac{e^x+e^{-x}}{2},$$

或写成

$$y=\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

3. 试求 $y''=x$ 的经过点 $M(0,1)$ 且在此点与直线 $y=\frac{x}{2}+1$ 相切的积分曲线.

解　由于直线 $y=\frac{x}{2}+1$ 在 $(0,1)$ 处的切线斜率为 $\frac{1}{2}$,依题设知,所求积分曲线是初值问题

$$y''=x,\quad y|_{x=0}=1,\quad y'|_{x=0}=\frac{1}{2}$$

的解. 由 $y''=x$,积分得

$$y'=\frac{x^2}{2}+C_1.$$

代入 $x=0,y'=\frac{1}{2}$,得 $C_1=\frac{1}{2}$,即有

$$y'=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}.$$

再积分,得 $y=\frac{x^3}{6}+\frac{x}{2}+C_2$,代入 $x=0,y=1$,得 $C_2=1$,于是所求积分曲线的方程为

$$y=\frac{x^3}{6}+\frac{x}{2}+1.$$

4. 设有一质量为 m 的物体,在空中由静止开始下落,如果空气阻力为 $R=cv$(其中 c 为

常数，v 为物体运动的速度），试求物体下落的距离 s 与时间 t 的函数关系．

解 根据牛顿第二定律，有关系式

$$m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=mg-c\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},$$

并依据题设条件，得初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=g-\frac{c}{m}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},\quad s\big|_{t=0}=0,\quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=0.$$

令$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v$，方程成为$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=g-\frac{c}{m}v$，分离变量后积分

$$\int\frac{\mathrm{d}v}{g-\frac{c}{m}v}=\int\mathrm{d}t$$

得

$$\ln\left(g-\frac{c}{m}v\right)=-\frac{c}{m}t+C_1,$$

代入初值条件 $v\big|_{t=0}=0$，得 $C_1=\ln g$．于是有

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{mg}{c}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t}\right);$$

积分得

$$s=\frac{mg}{c}\left(t+\frac{m}{c}\mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t}\right)+C_2$$

代入初值条件 $s\big|_{t=0}=0$，得 $C_2=-\frac{m^2g}{c^2}$．故所求特解（即下落的距离与时间的关系）为

$$\begin{aligned}s&=\frac{mg}{c}\left(t+\frac{m}{c}\mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t}-\frac{m}{c}\right)\\&=\frac{mg}{c}t+\frac{m^2g}{c^2}\left(\mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t}-1\right).\end{aligned}$$

习题 7－6 高阶线性微分方程

1. 下列函数组在其定义区间内哪些是线性无关的？

(1) x,x^2；　　(2) $x,2x$；

(3) $\mathrm{e}^{2x},3\mathrm{e}^{2x}$；　　(4) $\mathrm{e}^{-x},\mathrm{e}^{x}$；

(5) $\cos 2x,\sin 2x$；　　(6) $\mathrm{e}^{x^2},x\mathrm{e}^{x^2}$；

(7) $\sin 2x,\cos x\sin x$；　　(8) $\mathrm{e}^x\cos 2x,\mathrm{e}^x\sin 2x$；

(9) $\ln x,x\ln x$；　　(10) $\mathrm{e}^{ax},\mathrm{e}^{bx}(a\neq b)$．

解 对于两个函数构成的函数组，如果两函数的比为常数，则它们是线性相关

的,否则就线性无关,因此本题中除了

$$(2)\ \frac{x}{2x}=\frac{1}{2};\quad (3)\ \frac{e^{2x}}{3e^{2x}}=\frac{1}{3};\quad (7)\ \frac{\sin 2x}{\cos x\sin x}=2,$$

即(2)(3)(7)中的函数组线性相关外,其余的 7 个函数组中两函数之比不是常数,从而线性无关.

2. 验证 $y_1=\cos\omega x$ 及 $y_2=\sin\omega x$ 都是方程 $y''+\omega^2 y=0$ 的解,并写出该方程的通解.

解 由 $y_1=\cos\omega x$,得 $y_1'=-\omega\sin\omega x$,$y_1''=-\omega^2\cos\omega x$;由 $y_2=\sin\omega x$,得 $y_2'=\omega\cos\omega x$,$y_2''=-\omega^2\sin\omega x$;可见

$$y_i''+\omega^2 y_i=0\ (i=1,2),$$

故 y_1 与 y_2 都是方程 $y''+\omega^2 y=0$ 的解.

又因$\frac{y_1}{y_2}=\cot\omega x\neq$常数,故 y_1 与 y_2 线性无关. 于是方程的通解为

$$y=C_1y_1+C_2y_2=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x.$$

3. 验证 $y_1=e^{x^2}$ 及 $y_2=xe^{x^2}$ 都是方程 $y''-4xy'+(4x^2-2)y=0$ 的解,并写出该方程的通解.

解 由 $y_1=e^{x^2}$,得 $y_1'=2xe^{x^2}$,$y_1''=(2+4x^2)e^{x^2}$;由 $y_2=xe^{x^2}$,得 $y_2'=(1+2x^2)e^{x^2}$,$y_2''=(6x+4x^3)e^{x^2}$. 因

$$y_1''-4xy_1'+(4x^2-2)y_1=(2+4x^2)e^{x^2}-4x\cdot 2xe^{x^2}+(4x^2-2)e^{x^2}=0,$$

$$y_2''-4xy_2'+(4x^2-2)y_2=(6x+4x^3)e^{x^2}-4x(1+2x^2)e^{x^2}+(4x^2-2)xe^{x^2}=0,$$

故 y_1 与 y_2 都是方程的解.

又因$\frac{y_2}{y_1}=x\neq$常数,故 y_1 与 y_2 线性无关,于是方程的通解为

$$y=C_1y_1+C_2y_2=(C_1+C_2x)e^{x^2}.$$

4. 验证:

(1) $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{12}e^{5x}$($C_1,C_2$ 是任意常数)是方程 $y''-3y'+2y=e^{5x}$ 的通解;

(2) $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\frac{1}{32}(4x\cos x+\sin x)$($C_1,C_2$ 是任意常数)是方程 $y''+9y=x\cos x$ 的通解;

(3) $y=C_1x^2+C_2x^2\ln x$(C_1,C_2 是任意常数)是方程 $x^2y''-3xy'+4y=0$ 的通解;

(4) $y=C_1x^5+\frac{C_2}{x}-\frac{x^2}{9}\ln x$($C_1,C_2$ 是任意常数)是方程 $x^2y''-3xy'-5y=x^2\ln x$ 的通解;

(5) $y=\frac{1}{x}(C_1e^x+C_2e^{-x})+\frac{e^x}{2}$($C_1,C_2$ 是任意常数)是方程 $xy''+2y'-xy=e^x$ 的通解;

(6) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x-x^2$($C_1,C_2,C_3,C_4$ 是任意常数)是方程 $y^{(4)}-y=x^2$ 的通解.

解　(1) 记 $y_1=e^x,y_2=e^{2x},y^*=\frac{1}{12}e^{5x}$,则

$$y_1''-3y_1'+2y_1=e^x-3e^x+2e^x=0,$$
$$y_2''-3y_2'+2y_2=4e^{2x}-6e^{2x}+2e^{2x}=0.$$

故 y_1 与 y_2 是原方程对应的齐次方程的解,易见 y_1 与 y_2 是线性无关的.

又因

$$y^{*\prime\prime}-3y^{*\prime}+2y^*=\frac{25}{12}e^{5x}-\frac{15}{12}e^{5x}+\frac{2}{12}e^{5x}=e^{5x},$$

故 y^* 是原方程的一个特解,所以

$$y=C_1y_1+C_2y_2+y^*=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{12}e^{5x}$$

是原方程的通解.

(2) 记 $y_1=\cos 3x,y_2=\sin 3x,y^*=\frac{1}{32}(4x\cos x+\sin x)$. 因

$$y_1''+9y_1=-9\cos 3x+9\cos 3x=0,$$
$$y_2''+9y_2=-9\sin 3x+9\sin 3x=0,$$

故 y_1 与 y_2 是原方程对应的齐次方程的解,易见它们是线性无关的.

又因

$$y^{*\prime}=\frac{1}{32}(4\cos x-4x\sin x+\cos x)=\frac{1}{32}(5\cos x-4x\sin x),$$
$$y^{*\prime\prime}=\frac{1}{32}(-5\sin x-4\sin x-4x\cos x)=\frac{1}{32}(-4x\cos x-9\sin x),$$

有

$$y^{*\prime\prime}+9y^*=\frac{1}{32}(-4x\cos x-9\sin x)+\frac{9}{32}(4x\cos x+\sin x)=x\cos x.$$

故 y^* 是原方程的一个特解. 所以

$$y=C_1y_1+C_2y_2+y^*=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\frac{1}{32}(4x\cos x+\sin x)$$

是原方程的通解.

(3) 记 $y_1=x^2, y_2=x^2\ln x$,则

$$y'_1=2x,\quad y''_1=2;\quad y'_2=2x\ln x+x,\quad y''_2=2\ln x+3.$$

且

$$x^2y''_1-3xy'_1+4y_1=x^2\cdot 2-3x\cdot 2x+4x^2=0,$$

$$x^2y''_2-3xy'_2+4y_2=x^2(2\ln x+3)-3x(2x\ln x+x)+4x^2\ln x=0,$$

故 y_1 与 y_2 是方程的解,易见 y_1 与 y_2 线性无关,所以

$$y=C_1y_1+C_2y_2=C_1x^2+C_2x^2\ln x$$

是方程的通解.

(4) 记 $y_1=x^5, y_2=\dfrac{1}{x}, y^*=-\dfrac{1}{9}x^2\ln x$,则

$$x^2y''_1-3xy'_1-5y_1=x^2\cdot 20x^3-3x\cdot 5x^4-5x^5=0,$$

$$x^2y''_2-3xy'_2-5y_2=x^2\left(\frac{2}{x^3}\right)-3x\left(-\frac{1}{x^2}\right)-\frac{5}{x}=0,$$

故 y_1 与 y_2 是原方程对应的齐次方程的解,易见它们是线性无关的. 又因

$$x^2y^{*\prime\prime}-3xy^{*\prime}-5y^*=x^2\cdot\frac{2\ln x+3}{9}-3x\frac{2x\ln x+x}{9}-5\cdot\frac{x^2\ln x}{9}$$

$$=x^2\ln x,$$

故 y^* 是原方程的一个特解. 所以

$$y=C_1y_1+C_2y_2+y^*=C_1x^5+C_2\frac{1}{x}-\frac{1}{9}x^2\ln x$$

是原方程的通解.

(5) 记 $y_1=\dfrac{e^x}{x}, y_2=\dfrac{e^{-x}}{x}, y^*=\dfrac{e^x}{2}$,则

$$y'_1=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)e^x, y''_1=\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)e^x,$$

$$y'_2=\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)e^{-x}, y''_2=\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)e^{-x},$$

且

$$xy''_1+2y'_1-xy_1=x\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)e^x+2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)e^x-x\cdot\frac{e^x}{x}=0,$$

$$xy''_2+2y'_2-xy_2=x\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)e^{-x}+2\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)e^{-x}-x\cdot\frac{e^{-x}}{x}=0,$$

故 y_1 与 y_2 是原方程对应的齐次方程的解,易见它们是线性无关的.

又因 $y^{*\prime}=y^{*\prime\prime}=\dfrac{e^x}{2}$,且

$$xy^{*\prime\prime}+2y^{*\prime}-xy^*=\frac{x}{2}e^x+e^x-\frac{x}{2}e^x=e^x,$$

故 y^* 是原方程的一个特解. 所以

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + y^* = \frac{C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x}}{x} + \frac{\mathrm{e}^x}{2}$$

是原方程的通解.

(6) 令 $y_1=\mathrm{e}^x, y_2=\mathrm{e}^{-x}, y_3=\cos x, y_4=\sin x$,易见

$$y_i^{(4)} = y_i, i = 1,2,3,4.$$

故 $y_i(i=1,2,3,4)$ 是原方程对应的齐次方程 $y^{(4)}-y=0$ 的解.

下面说明 $y_i(i=1,2,3,4)$ 在它们的定义域 $\mathbf{R}$ 中是线性无关的. 令

$$k_1\mathrm{e}^x + k_2\mathrm{e}^{-x} + k_3\cos x + k_4\sin x \equiv 0,$$

分别取 $x=0,\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2},\pi$,则有

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 + 0 = 0, \\ \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}k_1 + \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}k_2 + 0 + k_4 = 0, \\ \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}k_1 + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}k_2 + 0 - k_4 = 0, \\ \mathrm{e}^{\pi}k_1 + \mathrm{e}^{-\pi}k_2 - k_3 + 0 = 0. \end{cases}$$

根据线性代数的知识,经计算,上述齐次线性方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} & \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} & 0 & 1 \\ \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} & \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} & 0 & -1 \\ \mathrm{e}^{\pi} & \mathrm{e}^{-\pi} & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

故齐次线性方程组仅有零解 $k_1=0,k_2=0,k_3=0,k_4=0$. 这说明 y_1,y_2,y_3,y_4 是线性无关的.

又令 $y^*=-x^2$,则 $y^{*(4)}=0$,且 $y^{*(4)}-y^*=0-(-x^2)=x^2$,故 y^* 是原方程的一个特解. 所以

$$\begin{aligned} y &= C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + C_4y_4 + y^* \\ &= C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x + x^2 \end{aligned}$$

是原方程的通解.

*5. 已知 $y_1(x)=\mathrm{e}^x$ 是齐次线性方程

$$(2x-1)y'' - (2x+1)y' + 2y = 0$$

的一个解,求此方程的通解.

解 设 $y_2(x)=y_1u=\mathrm{e}^xu$ 是方程的解,则 $y_2'=\mathrm{e}^x(u+u')$, $y_2''=\mathrm{e}^x(u+2u'+u'')$,代入方程并整理,得

$$\mathrm{e}^x[(2x-1)u'' + (2x-3)u'] = 0,$$

即

$$(2x-1)u''+(2x-3)u'=0,$$

令 $u'=p$,则 $u''=p'$,且上式成为

$$(2x-1)p'+(2x-3)p=0.$$

分离变量后积分

$$\int\frac{\mathrm{d}p}{p}=-\int\frac{2x-3}{2x-1}\mathrm{d}x$$

得

$$\ln|p|=-x+\ln|2x-1|+\ln C,$$

取 $C=1$,即 $p=(2x-1)\mathrm{e}^{-x}$. 再积分得

$$u=\int(2x-1)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-[(2x-1)\mathrm{e}^{-x}+2\mathrm{e}^{-x}+C_0],$$

取 $C_0=0$,即 $u=-(2x+1)\mathrm{e}^{-x}$,故

$$y_2=\mathrm{e}^xu=-(2x+1).$$

y_2 与 y_1 线性无关,故原方程的通解为

$$y=C_1(2x+1)+C_2\mathrm{e}^x.$$

***6.** 已知 $y_1(x)=x$ 是齐次线性方程 $x^2y''-2xy'+2y=0$ 的一个解,求非齐次线性方程 $x^2y''-2xy'+2y=2x^3$ 的通解.

解　设 $y_2=y_1u=xu$ 是非齐次线性方程的解,则 $y_2'=u+xu'$,$y_2''=2u'+xu''$,代入方程并整理,得

$$u''=0.$$

不妨取 $u=x$,则 $y_2=y_1u=x^2$,且 y_2 与 y_1 线性无关.

将非齐次方程化为标准形

$$y''-\frac{2}{x}y'+\frac{2}{x^2}y=2x,$$

则它的通解为

$$y=C_1y_1+C_2y_2-y_1\int\frac{y_2f}{W}\mathrm{d}x+y_2\int\frac{y_1f}{W}\mathrm{d}x,$$

其中 $f=2x$,$W=\begin{vmatrix}y_1&y_2\\y_1'&y_2'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x&x^2\\1&2x\end{vmatrix}=x^2$.

故

$$\begin{aligned}y&=C_1x+C_2x^2-x\int\frac{2x^3}{x^2}\mathrm{d}x+x^2\int\frac{2x^2}{x^2}\mathrm{d}x\\&=C_1x+C_2x^2+x^3.\end{aligned}$$

***7.** 已知齐次线性方程 $y''+y=0$ 的通解为 $Y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$,求非齐次线性方程 $y''+y=\sec x$ 的通解.

解　由题设知,$y_1=\cos x$ 与 $y_2=\sin x$ 都是齐次方程 $y''+y=0$ 的解,且 y_1 与 y_2

线性无关,则非齐次方程 $y''+y=\sec x$ 的通解为

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - y_1\int\frac{y_2 f}{W}\mathrm{d}x + y_2\int\frac{y_1 f}{W}\mathrm{d}x,$$

其中

$$f=\sec x,\quad W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1.$$

故

$$\begin{aligned} y &= C_1\cos x + C_2\sin x - \cos x\int\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x + \sin x\int\frac{\cos x}{\cos x}\mathrm{d}x \\ &= C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x\ln|\cos x| + x\sin x. \end{aligned}$$

*8. 已知齐次线性方程 $x^2y''-xy'+y=0$ 的通解为 $Y(x)=C_1x+C_2x\ln|x|$,求非齐次线性方程 $x^2y''-xy'+y=x$ 的通解.

解 由题设知 $y_1=x$ 与 $y_2=x\ln|x|$ 都是齐次方程的解,y_1 与 y_2 显然是线性无关的. 将非齐次方程化为标准形 $y''-\frac{1}{x}y'+\frac{1}{x^2}y=\frac{1}{x}$,则方程的通解为

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 - y_1\int\frac{y_2 f}{W}\mathrm{d}x + y_2\int\frac{y_1 f}{W}\mathrm{d}x,$$

其中

$$f=\frac{1}{x}, W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x\ln|x| \\ 1 & \ln|x|+1 \end{vmatrix} = x.$$

因

$$\int\frac{y_2 f}{W}\mathrm{d}x = \int\frac{\ln|x|}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln^2|x|,$$

$$\int\frac{y_1 f}{W}\mathrm{d}x = \int\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x|,$$

故非齐次方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= C_1x + C_2x\ln|x| - x\frac{1}{2}\ln^2|x| + x\ln|x|\cdot\ln|x| \\ &= C_1x + C_2x\ln|x| + \frac{x}{2}\ln^2|x|. \end{aligned}$$

习题 7-7 常系数齐次线性微分方程

1. 求下列微分方程的通解:

(1) $y''+y'-2y=0$; (2) $y''-4y'=0$;

(3) $y''+y=0$; (4) $y''+6y'+13y=0$;

(5) $4\frac{d^2x}{dt^2}-20\frac{dx}{dt}+25x=0$; (6) $y''-4y'+5y=0$;

(7) $y^{(4)}-y=0$; (8) $y^{(4)}+2y''+y=0$;

(9) $y^{(4)}-2y'''+y''=0$; (10) $y^{(4)}+5y''-36y=0$.

解 (1) 特征方程为 $r^2+r-2=0$,解得 $r_1=1, r_2=-2$,故方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-2x}.$$

(2) 特征方程为 $r^2-4r=0$,解得 $r_1=0, r_2=4$,故方程的通解为

$$y=C_1+C_2e^{4x}.$$

(3) 特征方程为 $r^2+1=0$,解得 $r_1=i, r_2=-i$,故方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

(4) 特征方程为 $r^2+6r+13=0$,解得 $r_{1,2}=-3\pm 2i$,故方程的通解为

$$y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

(5) 特征方程为 $4r^2-20r+25=0$,解得 $r_1=r_2=\frac{5}{2}$,故方程的通解为

$$x=(C_1+C_2t)e^{\frac{5}{2}t}.$$

(6) 特征方程为 $r^2-4r+5=0$,解得 $r_{1,2}=2\pm i$,故方程的通解为

$$y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x).$$

(7) 特征方程为 $r^4-1=0$,即 $(r^2-1)(r^2+1)=0$,解得 $r_{1,2}=\pm 1, r_{3,4}=\pm i$,故方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x.$$

(8) 特征方程为 $r^4+2r^2+1=0$,即 $(r^2+1)^2=0$,解得 $r_{1,2}=i, r_{3,4}=-i$,故方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x.$$

(9) 特征方程为 $r^4-2r^3+r^2=0$,即 $r^2(r-1)^2=0$,解得 $r_{1,2}=0, r_{3,4}=1$,故方程的通解为

$$y=C_1+C_2x+(C_3+C_4x)e^x.$$

(10) 特征方程为 $r^4+5r^2-36=0$,即 $(r^2+9)(r^2-4)=0$,解得 $r_{1,2}=\pm 2, r_{3,4}=\pm 3i$,故方程的通解为

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos 3x+C_4\sin 3x.$$

2. 求下列微分方程满足所给初值条件的特解:

(1) $y''-4y'+3y=0, y|_{x=0}=6, y'|_{x=0}=10$;

(2) $4y''+4y'+y=0, y|_{x=0}=2, y'|_{x=0}=0$;

(3) $y''-3y'-4y=0, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=-5$;

(4) $y''+4y'+29y=0, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=15$;

(5) $y''+25y=0, y|_{x=0}=2, y'|_{x=0}=5$;

(6) $y''-4y'+13y=0,y|_{x=0}=0,y'|_{x=0}=3.$

解 (1) 解特征方程 $r^2-4r+3=0$,得 $r_1=1,r_2=3$,故方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{3x},$$

且有

$$y'=C_1\mathrm{e}^x+3C_2\mathrm{e}^{3x}.$$

代入初值条件,得$\begin{cases}C_1+C_2=6,\\C_1+3C_2=10,\end{cases}$解得$\begin{cases}C_1=4,\\C_2=2.\end{cases}$故所求特解为

$$y=4\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{2x}.$$

(2) 解特征方程 $4r^2+4r+1=0$,即 $(2r+1)^2=0$,得 $r_{1,2}=-\frac{1}{2}$,故方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}},$$

且有

$$y'=\left(-\frac{C_1}{2}+C_2-\frac{C_2}{2}x\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}.$$

代入初值条件,得$\begin{cases}C_1=2,\\-\dfrac{C_1}{2}+C_2=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}C_1=2,\\C_2=1.\end{cases}$故所求特解为

$$y=(2+x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}.$$

(3) 解特征方程 $r^2-3r-4=0$,即 $(r+1)(r-4)=0$,得 $r_1=-1,r_2=4$,故方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{4x},$$

且有

$$y'=-C_1\mathrm{e}^{-x}+4C_2\mathrm{e}^{4x}.$$

代入初值条件,得$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\-C_1+4C_2=-5,\end{cases}$解得$\begin{cases}C_1=1,\\C_2=-1.\end{cases}$故所求特解为

$$y=\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{4x}.$$

(4) 解特征方程 $r^2+4r+29=0$,得 $r_{1,2}=-2\pm5\mathrm{i}$,故方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-2x}(C_1\cos5x+C_2\sin5x),$$

且有

$$y'=\mathrm{e}^{-2x}[(5C_2-2C_1)\cos5x+(-5C_1-2C_2)\sin5x].$$

代入初值条件,得$\begin{cases}C_1=0,\\5C_2-2C_1=15,\end{cases}$即$\begin{cases}C_1=0,\\C_2=3.\end{cases}$故所求特解为

$$y=3\mathrm{e}^{-2x}\sin5x.$$

(5) 解特征方程 $r^2+25=0$,得 $r_{1,2}=\pm5\mathrm{i}$,故方程的通解为

$$y = C_1\cos 5x + C_2\sin 5x,$$

且有

$$y' = -5C_1\sin 5x + 5C_2\cos 5x.$$

代入初值条件,得$\begin{cases}C_1 = 2,\\ 5C_2 = 5,\end{cases}$ 即$\begin{cases}C_1 = 2,\\ C_2 = 1.\end{cases}$故所求特解为

$$y = 2\cos 5x + \sin 5x.$$

(6) 解特征方程 $r^2 - 4r + 13 = 0$,得 $r_{1,2} = 2 \pm 3\mathrm{i}$,故方程的通解为

$$y = \mathrm{e}^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x),$$

且有

$$y' = \mathrm{e}^{2x}[(2C_1 + 3C_2)\cos 3x + (2C_2 - 3C_1)\sin 3x].$$

代入初值条件,得$\begin{cases}C_1 = 0,\\ 2C_1 + 3C_2 = 3,\end{cases}$ 即$\begin{cases}C_1 = 0,\\ C_2 = 1.\end{cases}$故所求特解为

$$y = \mathrm{e}^{2x}\sin 3x.$$

3. 一个单位质量的质点在数轴上运动,开始时质点在原点 O 处且速度为 v_0,在运动过程中,它受到一个力的作用,这个力的大小与质点到原点的距离成正比(比例系数 $k_1 > 0$)而方向与初速一致. 又介质的阻力与速度成正比(比例系数$k_2 > 0$). 求反映这质点的运动规律的函数.

解　设质点的位置函数为 $x = x(t)$. 由题意得

$$x'' = k_1 x - k_2 x',$$

即 $x'' + k_2 x' - k_1 x = 0$,且 $x\big|_{t=0} = 0, x'\big|_{t=0} = v_0$.

解特征方程 $r^2 + k_2 r - k_1 = 0$,得 $r_{1,2} = \dfrac{-k_2 \pm\sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2}$,故有通解

$$x = C_1\mathrm{e}^{r_1 t} + C_2\mathrm{e}^{r_2 t},$$

且有

$$x' = r_1 C_1\mathrm{e}^{r_1 t} + r_2 C_2\mathrm{e}^{r_2 t},$$

代入初值条件 $t = 0, x = 0, x' = v_0$,得$\begin{cases}C_1 + C_2 = 0,\\ r_1 C_1 + r_2 C_2 = v_0,\end{cases}$解得

$$\begin{cases}C_1 = \dfrac{-v_0}{r_2 - r_1} = \dfrac{v_0}{\sqrt{k_2^2 + 4k_1}},\\[2ex] C_2 = \dfrac{v_0}{r_2 - r_1} = -\dfrac{v_0}{\sqrt{k_2^2 + 4k_1}}.\end{cases}$$

故

$$x = \frac{v_0}{\sqrt{k_2^2 + 4k_1}}\left(\mathrm{e}^{\frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2}t} - \mathrm{e}^{\frac{-k_2 - \sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2}t}\right)$$

$$= \frac{v_0}{\sqrt{k_2^2 + 4k_1}} e^{\frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}t} (1 - e^{-t\sqrt{k_2^2+4k_1}}).$$

4. 在图 7 - 3 所示的电路中先将开关 K 拨向 A,达到稳定状态后再将开关 K 拨向 B,求电压 $u_C(t)$ 及电流 $i(t)$. 已知 $E = 20$ V, $C = 0.5 \times 10^{-6}$ F(法), $L = 0.1$ H(亨), $R = 2\,000\ \Omega$.

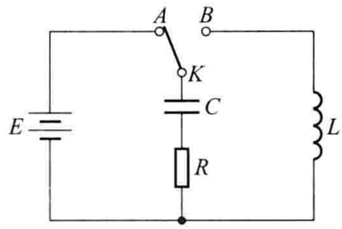


图 7 - 3

解　由回路定律,得

$$L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + Ri = 0.$$

因 $\frac{q}{C} = u_C$,即 $q = Cu_C$, $i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_C}{dt}$,则 $\frac{di}{dt} = C\frac{d^2u_C}{dt^2}$. 于是有

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C + RC\frac{du_C}{dt} = 0,$$

即

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = 0,$$

且

$$u_C\big|_{t=0} = E, \left.\frac{du_C}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

已知

$$\frac{R}{L} = \frac{2\,000}{0.1} = 2 \times 10^4, \frac{1}{LC} = \frac{1}{0.1 \times 0.5 \times 10^{-6}} = 2 \times 10^7,$$

故微分方程为

$$u_C'' + 2 \times 10^4 u_C' + 2 \times 10^7 u_C = 0.$$

其特征方程为

$$r^2 + 2 \times 10^4 r + 2 \times 10^7 = 0,$$

解得 $r_1 \approx -1.9 \times 10^4$, $r_2 \approx -10^3$,故 $u_C = C_1 e^{-1.9 \times 10^4 t} + C_2 e^{-10^3 t}$,且有

$$u_C' = -1.9 \times 10^4 C_1 e^{-1.9 \times 10^4 t} - 10^3 C_2 e^{-10^3 t}.$$

代入初值条件 $t = 0$, $u_C = 20$, $u_C' = 0$,得

$$\begin{cases} C_1+C_2=20, \\ -1.9\times10^4C_1-10^3C_2=0, \end{cases}$$

解得

$$C_1=-\frac{10}{9},C_2=\frac{190}{9}.$$

故

$$u_C=\frac{10}{9}(19\mathrm{e}^{-10^3t}-\mathrm{e}^{-1.9\times10^4t}),$$

$$i=Cu'_C=0.5\times10^{-6}\times\frac{10}{9}(-19\times10^3\mathrm{e}^{-10^3t}+1.9\times10^4\mathrm{e}^{-1.9\times10^4t})$$

$$=\frac{19}{18}\times10^{-2}(\mathrm{e}^{-1.9\times10^4t}-\mathrm{e}^{-10^3t}).$$

5. 设底面直径为 0.5 m 的圆柱形浮筒铅直放在水中,当稍向下压后突然放开,浮筒在水中上下振动的周期为 2 s,求浮筒的质量.

解　设 x 轴的正向铅直向下,原点在水面处.平衡状态下浮筒上一点 A 在水平面处,又设在时刻 t,点 A 的位置为 $x=x(t)$,此时它受到的恢复力的大小为 $1\,000g\pi R^2|x|$(R 是浮筒的半径),恢复力的方向与位移方向相反,故有

$$mx''=-1\,000g\pi R^2x,$$

其中 m 是浮筒的质量.

记 $\omega^2=\dfrac{1\,000g\pi R^2}{m}$,则得微分方程

$$x''+\omega^2x=0.$$

解特征方程 $r^2+\omega^2=0$,得 $r_{1,2}=\pm\omega\mathrm{i}$,故

$$x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t=A\sin(\omega t+\varphi),A=\sqrt{C_1^2+C_2^2},\sin\varphi=\frac{C_1}{A}.$$

由于振动周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2$,故 $\omega=\pi$,即

$$\frac{1\,000g\pi R^2}{m}=\pi^2,$$

从中解出

$$m=\frac{1\,000gR^2}{\pi}\approx195(\mathrm{kg}).$$

习题 7-8　常系数非齐次线性微分方程

1. 求下列各微分方程的通解:

(1) $2y''+y'-y=2\mathrm{e}^x$;　　　(2) $y''+a^2y=\mathrm{e}^x$;

(3) $2y''+5y'=5x^2-2x-1$;　　(4) $y''+3y'+2y=3xe^{-x}$;

(5) $y''-2y'+5y=e^x\sin 2x$;　　(6) $y''-6y'+9y=(x+1)e^{3x}$;

(7) $y''+5y'+4y=3-2x$;　　(8) $y''+4y=x\cos x$;

(9) $y''+y=e^x+\cos x$;　　(10) $y''-y=\sin^2 x$.

解　(1) 由 $2r^2+r-1=0$,解得 $r_1=\dfrac{1}{2}$,$r^2=-1$. 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2e^{-x}.$$

因 $f(x)=2e^x$,$\lambda=1$ 不是特征方程的根,故可设 $y^*=ae^x$ 是原方程的一个特解,代入原方程得

$$2ae^x+ae^x-ae^x=2e^x.$$

消去 e^x,有 $a=1$,即

$$y^*=e^x.$$

故原方程的通解为

$$y=Y+y^*=C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2e^{-x}+e^x.$$

(2) 由 $r^2+a^2=0$,解得 $r_{1,2}=\pm a\mathrm{i}$. 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1\cos ax+C_2\sin ax.$$

因 $f(x)=e^x$,$\lambda=1$ 不是特征方程的根,故设 $y^*=be^x$ 是原方程的一个特解,代入方程得

$$be^x+a^2be^x=e^x,$$

消去 e^x,有 $b=\dfrac{1}{1+a^2}$,即 $y^*=\dfrac{e^x}{1+a^2}$. 故原方程的通解为

$$y=Y+y^*=C_1\cos ax+C_2\sin ax+\frac{e^x}{1+a^2}.$$

(3) 由 $2r^2+5r=0$,解得 $r_1=0$,$r_2=-\dfrac{5}{2}$,故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}.$$

因 $f(x)=5x^2-2x-1$,$\lambda=0$ 是特征方程的单根,故设 $y^*=x(b_0x^2+b_1x+b_2)$ 是原方程的一个特解,代入方程并整理,得

$$15b_0x^2+(12b_0+10b_1)x+4b_1+5b_2=5x^2-2x-1.$$

比较系数得 $b_0=\dfrac{1}{3}$,$b_1=-\dfrac{3}{5}$,$b_2=\dfrac{7}{25}$,即

$$y^*=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{25}x.$$

故原方程的通解为

$$y=Y+y^*=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}+\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{25}x.$$

(4) 由 $r^2+3r+2=0$ 解得 $r_1=-1,r_2=-2$,故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}.$$

因 $f(x)=3xe^{-x},\lambda=-1$ 是特征方程的单根,故可设

$$y^*=xe^{-x}(ax+b)=e^{-x}(ax^2+bx)$$

是原方程的一个特解,代入方程并消去 e^{-x},得

$$2ax+(2a+b)=3x.$$

比较系数,得 $a=\frac{3}{2},b=-3$,即

$$y^*=e^{-x}\left(\frac{3}{2}x^2-3x\right).$$

故原方程的通解为

$$y=Y+y^*=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+e^{-x}\left(\frac{3}{2}x^2-3x\right).$$

(5) 由 $r^2-2r+5=0$,解得 $r_{1,2}=1\pm2i$,故对应的齐次方程的通解为

$$Y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

因 $f(x)=e^x\sin 2x=e^x(0\cdot\cos 2x+1\cdot\sin 2x),\lambda+i\omega=1+2i$ 是特征方程的单根,故可设

$$y^*=xe^x(a\cos 2x+b\sin 2x)$$

是原方程的一个特解,代入方程并消去 e^x,得

$$4b\cos 2x-4a\sin 2x=\sin 2x.$$

比较系数,得 $a=-\frac{1}{4},b=0$,即

$$y^*=xe^x\left(-\frac{1}{4}\cos 2x\right)=-\frac{1}{4}xe^x\cos 2x.$$

故原方程的通解为

$$y=Y+y^*=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)-\frac{1}{4}xe^x\cos 2x.$$

(6) 由 $r^2-6r+9=0$ 得 $r_{1,2}=3$,故对应的齐次方程的通解为

$$Y=e^{3x}(C_1+C_2x).$$

因 $f(x)=e^{3x}(x+1),\lambda=3$ 是特征方程的(二重)根,故可设

$$y^*=e^{3x}(ax+b)x^2$$

是原方程的一个特解,代入方程并消去 e^{3x},得

$$6ax+2b=x+1.$$

比较系数,得 $a=\frac{1}{6},b=\frac{1}{2}$,即

$$y^*=e^{3x}\left(\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}\right)x^2.$$

故原方程的通解为

$$y = Y + y^* = e^{3x}(C_1 + C_2 x) + e^{3x}\left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{2}\right)x^2.$$

（7）由 $r^2+5r+4=0$ 解得 $r_1=-1, r_2=-4$，故对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x}.$$

因 $f(x)=3-2x$，$\lambda=0$ 不是特征方程的根，故可设

$$y^* = ax + b$$

是原方程的一个特解，代入方程，得

$$4ax + 5a + 4b = -2x + 3.$$

比较系数得 $a=-\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{11}{8}$，即

$$y^* = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{8}.$$

故原方程的通解为

$$y = Y + y^* = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x} - \frac{1}{2}x + \frac{11}{8}.$$

（8）由 $r^2+4=0$ 解得 $r_{1,2}=\pm 2i$，故对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

因 $f(x)=x\cos x$，$\lambda+i\omega=i$ 不是特征方程的根，故可设

$$y^* = (ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x$$

是原方程的一个特解，代入方程，得

$$(3ax+3b+2c)\cos x + (3cx+3d-2a)\sin x = x\cos x.$$

比较系数有

$$\begin{cases} 3a=1, \\ 3b+2c=0, \\ 3c=0, \\ 3d-2a=0, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a=\dfrac{1}{3}, \\ b=0, \\ c=0, \\ d=\dfrac{2}{9}, \end{cases}$$

即 $y^*=\dfrac{1}{3}x\cos x+\dfrac{2}{9}\sin x$. 故原方程的通解为

$$y = Y + y^* = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{3}x\cos x + \frac{2}{9}\sin x.$$

(9) 由 $r^2+1=0$ 解得 $r_{1,2}=\pm\mathrm{i}$,故对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

因 $f(x)=\mathrm{e}^x+\cos x$,对应于方程 $y''+y=\mathrm{e}^x$,可设特解 $y_1^*=A\mathrm{e}^x$;对应于方程 $y''+y=\cos x$($\lambda+\mathrm{i}\omega=\mathrm{i}$ 是特征方程的根)可设特解 $y_2^*=x(B\cos x+C\sin x)$,故由叠加原理,设

$$y^* = A\mathrm{e}^x + x(B\cos x + C\sin x)$$

是原方程的一个特解,代入方程,得

$$2A\mathrm{e}^x + 2C\cos x - 2B\sin x = \mathrm{e}^x + \cos x.$$

比较系数,得 $A=\frac{1}{2}$,$B=0$,$C=\frac{1}{2}$,即

$$y^* = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x\sin x.$$

故原方程的通解为

$$y = Y + y^* = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x\sin x.$$

(10) 由 $r^2-1=0$ 解得 $r_{1,2}=\pm 1$,故对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x}.$$

因 $f(x)=\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$,对应于方程 $y''-y=\frac{1}{2}$,可设特解 $y_1^*=A$;对应于方程 $y''-y=-\frac{1}{2}\cos 2x$,可设特解 $y_2^*=B\cos 2x+C\sin 2x$,故由叠加原理,设

$$y^* = A + B\cos 2x + C\sin 2x$$

是原方程的一个特解,代入方程,得

$$-A - 5B\cos 2x - 5C\sin 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x.$$

比较系数得 $A=-\frac{1}{2}$,$B=\frac{1}{10}$,$C=0$,即

$$y^* = -\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\cos 2x.$$

故原方程的通解为

$$y = Y + y^* = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{10}\cos 2x.$$

2. 求下列各微分方程满足已给初值条件的特解:

(1) $y''+y+\sin 2x=0$,$y|_{x=\pi}=1$,$y'|_{x=\pi}=1$;

(2) $y''-3y'+2y=5$,$y|_{x=0}=1$,$y'|_{x=0}=2$;

(3) $y''-10y'+9y=e^{2x},y\big|_{x=0}=\frac{6}{7},y'\big|_{x=0}=\frac{33}{7}$;

(4) $y''-y=4xe^{x},y\big|_{x=0}=0,y'\big|_{x=0}=1$;

(5) $y''-4y'=5,y\big|_{x=0}=1,y'\big|_{x=0}=0$.

解　(1) 由 $r^2+1=0$ 解得 $r_{1,2}=\pm i$,故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

因 $f(x)=-\sin 2x=e^{0x}(0\cdot\cos 2x-\sin 2x)$,$\lambda+i\omega=2i$ 不是特征方程的根,故可设

$$y^*=A\cos 2x+B\sin 2x$$

是原方程的一个特解,代入方程得

$$-3A\cos 2x-3B\sin 2x=-\sin 2x.$$

比较系数得 $A=0,B=\frac{1}{3}$,即

$$y^*=\frac{1}{3}\sin 2x.$$

故原方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{3}\sin 2x.$$

且有

$$y'=-C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{2}{3}\cos 2x.$$

代入初值条件 $x=\pi,y=1,y'=1$,有

$$\begin{cases}-C_1=1,\\-C_2+\frac{2}{3}=1,\end{cases}$$

解得 $C_1=-1,C_2=-\frac{1}{3}$,故所求特解为

$$y=-\cos x-\frac{1}{3}\sin x+\frac{1}{3}\sin 2x.$$

(2) 由 $r^2-3r+2=0$ 解得 $r_1=1,r_2=2$,故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}.$$

因 $f(x)=5$,$\lambda=0$ 不是特征方程的根,故可设 $y^*=A$ 是原方程的一个特解,代入方程得 $A=\frac{5}{2}$,即 $y^*=\frac{5}{2}$. 于是原方程的通解为

$$y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+\frac{5}{2},$$

且有 $y'=C_1e^{x}+2C_2e^{2x}$. 代入初值条件 $x=0,y=1,y'=2$,有

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \dfrac{5}{2} = 1, \\ C_1 + 2C_2 = 2, \end{cases}$$

解得 $C_1 = -5, C_2 = \dfrac{7}{2}$,故所求特解为

$$y = -5e^x + \frac{7}{2}e^{2x} + \frac{5}{2}.$$

(3) 由 $r^2 - 10r + 9 = 0$ 解得 $r_1 = 1, r_2 = 9$,故对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1e^x + C_2e^{9x}.$$

因 $f(x) = e^{2x}, \lambda = 2$ 不是特征方程的根,故可设 $y^* = Ae^{2x}$ 是原方程的一个特解,代入方程并消去 e^{2x},得 $A = -\dfrac{1}{7}$,即 $y^* = -\dfrac{1}{7}e^{2x}$. 于是原方程的通解为

$$y = C_1e^x + C_2e^{9x} - \frac{1}{7}e^{2x},$$

且有

$$y' = C_1e^x + 9C_2e^{9x} - \frac{2}{7}e^{2x}.$$

代入初值条件 $x = 0, y = \dfrac{6}{7}, y' = \dfrac{33}{7}$,有

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - \dfrac{1}{7} = \dfrac{6}{7}, \\ C_1 + 9C_2 - \dfrac{2}{7} = \dfrac{33}{7}, \end{cases}$$

解得 $C_1 = \dfrac{1}{2}, C_2 = \dfrac{1}{2}$,故所求特解为

$$y = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{9x} - \frac{1}{7}e^{2x}.$$

(4) 由 $r^2 - 1 = 0$ 得特征根 $r_{1,2} = \pm 1$,故对应的齐次方程的通解为

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x}.$$

因 $f(x) = 4xe^x, \lambda = 1$ 是特征方程的单根,故可设 $y^* = xe^x(Ax + B) = e^x(Ax^2 + Bx)$ 是原方程的一个特解,代入方程并消去 e^x,得

$$4Ax + 2A + 2B = 4x.$$

比较系数得 $A = 1, B = -1$,即

$$y^* = e^x(x^2 - x).$$

于是原方程的通解为

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + e^x(x^2 - x),$$

即

$$y = e^x(x^2 - x + C_1) + C_2e^{-x},$$

且有

$$y' = e^x(x^2 + x - 1 + C_1) - C_2 e^{-x}.$$

代入初值条件 $x=0,y=0,y'=1$,有

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 - C_2 - 1 = 1, \end{cases}$$

解得 $C_1 = 1, C_2 = -1$,故所求特解为

$$y = e^x(x^2 - x + 1) - e^{-x}.$$

(5) 由 $r^2 - 4r = 0$,解得 $r_1 = 0, r_2 = 4$,故对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1 + C_2 e^{4x}.$$

因 $f(x) = 5 = 5 \cdot e^{0x}$,$\lambda = 0$ 是特征方程的单根,故可设 $y^* = Ax$ 是原方程的一个特解,代入方程得 $A = -\frac{5}{4}$,即

$$y^* = -\frac{5}{4}x.$$

于是原方程的通解为

$$y = C_1 + C_2 e^{4x} - \frac{5}{4}x,$$

且有

$$y' = 4C_2 e^{4x} - \frac{5}{4}.$$

代入初值条件 $x=0,y=1,y'=0$,有

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ 4C_2 - \frac{5}{4} = 0, \end{cases}$$

解得 $C_1 = \frac{11}{16}, C_2 = \frac{5}{16}$,故所求特解为

$$y = \frac{11}{16} + \frac{5}{16}e^{4x} - \frac{5}{4}x.$$

3. 大炮以仰角 α、初速 v_0 发射炮弹,若不计空气阻力,求弹道曲线.

解 取炮口在原点,炮弹前进的水平方向为 x 轴,铅直向上为 y 轴,设在时刻 t,炮弹位于 $(x(t), y(t))$. 按题意,有

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 y}{dt^2} = -g, & (1) \\ \dfrac{d^2 x}{dt^2} = 0, & (2) \end{cases}$$

且

$$\begin{cases} y\big|_{t=0}=0, & y'\big|_{t=0}=v_0\sin\alpha, \\ x\big|_{t=0}=0, & x'\big|_{t=0}=v_0\cos\alpha. \end{cases}$$

解方程(1),得

$$y=-\frac{g}{2}t^2+C_1t+C_2,$$

代入初值条件 $t=0,y=0,y'=v_0\sin\alpha$,得 $C_2=0,C_1=v_0\sin\alpha$,即

$$y=v_0\sin\alpha\cdot t-\frac{g}{2}t^2;$$

解方程(2),得

$$x=C_3t+C_4,$$

代入初值条件 $t=0,x=0,x'=v_0\cos\alpha$,得 $C_4=0,C_3=v_0\cos\alpha$,即

$$x=v_0\cos\alpha\cdot t.$$

故弹道曲线为

$$\begin{cases} x=v_0\cos\alpha\cdot t, \\ y=v_0\sin\alpha\cdot t-\dfrac{g}{2}t^2. \end{cases}$$

4. 在 R、L、C 含源串联电路中,电动势为 E 的电源对电容器 C 充电. 已知 $E=20$ V, $C=0.2$ μF(微法), $L=0.1$ H(亨), $R=1\,000\,\Omega$,试求合上开关 K 后的电流 $i(t)$ 及电压 $u_C(t)$.

解　由回路定律知

$$LCu_C''+RCu_C'+u_C=E.$$

即

$$u_C''+\frac{R}{L}u_C'+\frac{1}{LC}u_C=\frac{E}{LC}.$$

且依题意,有初值条件,$u_C\big|_{t=0}=0,u_C'\big|_{t=0}=0.$

已知 $R=1\,000(\Omega),L=0.1(\mathrm{H}),C=0.2(\mathrm{mF})=0.2\times10^{-6}(\mathrm{F}),E=20(\mathrm{V})$,故微分方程为

$$u_C''+10^4u_C'+5\times10^7u_C=10^9,$$

其对应的齐次方程的特征方程为

$$r^2+10^4r+5\times10^7=0,$$

解得

$$r_{1,2}=-\frac{10^4}{2}\pm\frac{10^4}{2}\mathrm{i}=-5\times10^3\pm5\times10^3\mathrm{i}.$$

因 $f(t)=10^9$. 可令 $u_C^*=A$ 是原方程的特解,代入方程,得 $A=20$,即 $u_C^*=20$. 故方程的通解为

$$u_C=\mathrm{e}^{-5\times10^3t}[C_1\cos(5\times10^3t)+C_2\sin(5\times10^3t)]+20,$$

代入初值条件，$t=0,u_C=0$，有 $C_1+20=0$，即 $C_1=-20$. 又

$$u'_C=-5\times10^3e^{-5\times10^3t}[-20\cos(5\times10^3t)+C_2\sin(5\times10^3t)]+$$
$$e^{-5\times10^3t}[20\times5\times10^3\sin(5\times10^3t)+5\times10^3C_2\cos(5\times10^3t)],$$

代入初值条件 $t=0,u'_C=0$，有 $-5\times10^3(-20)+5\times10^3C_2=0$，即 $C_2=-20$. 故

$$u_C=20-20e^{-5\times10^3t}[\cos(5\times10^3t)+\sin(5\times10^3t)](\mathrm{V}),$$
$$\begin{aligned}i&=Cu'_C=0.2\times10^{-6}u'_C\\&=4\times10^{-2}e^{-5\times10^3t}\sin(5\times10^3t)(\mathrm{A}).\end{aligned}$$

5. 一链条悬挂在一钉子上，起动时一端离开钉子 8 m，另一端离开钉子12 m，分别在以下两种情况下求链条滑下来所需要的时间：

(1) 若不计钉子对链条所产生的摩擦力；

(2) 若摩擦力为 1 m 长的链条的重量.

解 设链条的线密度为 ρ(kg/m)，则链条的质量为 20ρ(kg). 又设在时刻 t，链条的一端离钉子 $x=x(t)$，则另一端离钉子 $20-x$(图 7－4)，当 $t=0$ 时，$x=12$.

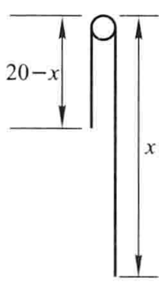


图 7－4

(1) 若不计摩擦力，则运动过程中的链条所受力的大小为 $[x-(20-x)]\rho g$，按牛顿定律，有

$$20\rho x''=[x-(20-x)]\rho g,$$

即

$$x''-\frac{g}{10}x=-g.$$

且有初值条件

$$x\big|_{t=0}=12,x'\big|_{t=0}=0.$$

由特征方程 $r^2-\frac{g}{10}=0$，解得 $r_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{g}{10}}$，又将 $x^*=A$ 代入方程，得 $A=10$，即 $x^*=10$. 求得方程通解

$$x=C_1e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}+C_2e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}+10,$$

代入初值条件 $t=0,x=12,x'=0$，得 $C_1=C_2=1$，故

$$x=e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}+e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}+10\quad\left(\text{或 } x=2\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{g}{10}}t\right)+10\right).$$

取 $x=20$，得 $e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}+e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}=10\left(\text{或 }\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{g}{10}}t\right)=5\right)$，即

$$t=\sqrt{\frac{10}{g}}\ln(5+2\sqrt{6})(\mathrm{s})\quad\left(\text{或 } t=\sqrt{\frac{10}{g}}\operatorname{arch}5(\mathrm{s})\right).$$

(2) 摩擦力为 1 m 长链条的重量即为 ρg，则运动过程中的链条所受力的大小为 $[x-(20-x)]\rho g-\rho g$，按牛顿定律，有

$$20\rho x''=[x-(20-x)]\rho g-\rho g,$$

即

$$x''-\frac{g}{10}x=-\frac{21}{10}g,$$

且有初值条件

$$x\big|_{t=0}=12,x'\big|_{t=0}=0.$$

满足该条件的特解为

$$x=\frac{3}{4}\left(e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}+e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}\right)+\frac{21}{2}\left(\text{或 } x=\frac{3}{2}\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{g}{10}}t\right)+\frac{21}{2}\right).$$

取 $x=20$，得 $e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}+e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}=\frac{38}{3}\left(\text{或 }\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{g}{10}}t\right)=\frac{19}{3}\right)$，即

$$t=\sqrt{\frac{10}{g}}\ln\left(\frac{19}{3}+\frac{4}{3}\sqrt{22}\right)(\mathrm{s})\left(\text{或 } t=\sqrt{\frac{10}{g}}\operatorname{arch}\frac{19}{3}(\mathrm{s})\right).$$

6. 设函数 $\varphi(x)$ 连续，且满足

$$\varphi(x)=e^x+\int_0^x t\varphi(t)\,dt-x\int_0^x\varphi(t)\,dt,$$

求 $\varphi(x)$.

解　由所给方程可得 $\varphi(0)=1$，在该方程两端对 x 求导，得

$$\varphi'(x)=e^x+x\varphi(x)-\int_0^x\varphi(t)\,dt-x\varphi(x),$$

即

$$\varphi'(x)=e^x-\int_0^x\varphi(t)\,dt.$$

可见 $\varphi'(0)=1$.

又在方程 $\varphi'(x)=e^x-\int_0^x\varphi(t)\,dt$ 的两端对 x 求导，得

$$\varphi''(x)=e^x-\varphi(x).$$

若记 $\varphi(x)=y$，则有初值问题

$$\begin{cases} y'' + y = e^x, \\ y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 1. \end{cases} \tag{1}$$

上述非齐次方程对应的齐次方程的特征方程为 $r^2+1=0$,解得 $r_{1,2}=\pm i$,而 $f(x)=e^x$,$\lambda=1$ 不是特征方程的根,故令 $y^*=Ae^x$ 是方程(1)的特解,代入方程(1)并消去 e^x,得 $A=\frac{1}{2}$,于是方程(1)有通解

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}e^x,$$

且有

$$y' = -C_1\sin x + C_2\cos x + \frac{1}{2}e^x.$$

代入初值条件 $x=0,y=1,y'=1$,有

$$\begin{cases} C_1 + \frac{1}{2} = 1, \\ C_2 + \frac{1}{2} = 1, \end{cases}$$

即 $C_1=C_2=\frac{1}{2}$. 于是得

$$y = \varphi(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x + e^x).$$

*习题 7-9 欧拉方程

求下列欧拉方程的通解:

1. $x^2y''+xy'-y=0$;
2. $y''-\frac{y'}{x}+\frac{y}{x^2}=\frac{2}{x}$;
3. $x^3y'''+3x^2y''-2xy'+2y=0$;
4. $x^2y''-2xy'+2y=\ln^2x-2\ln x$;
5. $x^2y''+xy'-4y=x^3$;
6. $x^2y''-xy'+4y=x\sin(\ln x)$;
7. $x^2y''-3xy'+4y=x+x^2\ln x$;
8. $x^3y'''+2xy'-2y=x^2\ln x+3x$.

说明 令 $x=e^t$ 或 $t=\ln x$,则$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$,即 $x\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}$. 记$\frac{d}{dt}=D$,$\frac{d^2}{dt^2}=D^2$,$\frac{d^3}{dt^3}=D^3$,则

$$x\frac{dy}{dx} = Dy,$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y,$$

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} = D(D-1)(D-2)y.$$

本节习题中 8 个欧拉方程均用此法转化为常系数线性微分方程求解.

解　1. 令 $x=e^t$,记 $D=\frac{d}{dt}$,则原方程化为

$$[D(D-1)+D-1]y=0,\tag{1}$$

特征方程为 $r(r-1)+r-1=0$,即 $r^2-1=0$,有特征根 $r_{1,2}=\pm1$,故方程(1)有通解

$$y=C_1e^t+C_2e^{-t},$$

即原方程的通解为 $y=C_1x+\frac{C_2}{x}$.

2. 原方程可改写成 $x^2y''-xy'+y=2x$. 令 $x=e^t$,记 $D=\frac{d}{dt}$,则方程化为

$$[D(D-1)-D+1]y=2e^t.\tag{2}$$

方程(2)对应的齐次方程的特征方程为 $r(r-1)-r+1=0$,即 $r^2-2r+1=0$,有特征根 $r_{1,2}=1$. 故方程(2)对应的齐次方程的通解为

$$Y=e^t(C_1+C_2t).$$

因 $f(t)=2e^t$,$\lambda=1$ 是特征(二重)根. 设 $y^*=At^2e^t$,则

$$Dy=A(t^2+2t)e^t,D^2y=A(t^2+4t+2)e^t,$$

代入方程(2)中可得 $A=1$,即 $y^*=t^2e^t$,故方程(2)的通解为

$$y=e^t(C_1+C_2t)+t^2e^t,$$

即原方程的通解为

$$y=x(C_1+C_2\ln x)+x\ln^2x.$$

3. 令 $x=e^t$,记 $D=\frac{d}{dt}$,则方程可化为

$$[D(D-1)(D-2)+3D(D-1)-2D+2]y=0.\tag{3}$$

其特征方程为 $r(r-1)(r-2)+3r(r-1)-2r+2=0$,即 $(r-1)^2(r+2)=0$,有根 $r_{1,2}=1,r_3=-2$. 故方程(3)的通解为

$$y=e^t(C_1+C_2t)+C_3e^{-2t},$$

即原方程的通解为

$$y=x(C_1+C_2\ln x)+\frac{C_3}{x^2}.$$

4. 令 $x=e^t$,记 $D=\frac{d}{dt}$,则方程可化为 $[D(D-1)-2D+2]y=t^2-2t$,即

$$(D^2-3D+2)y=t^2-2t,\tag{4}$$

方程(4)对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-3r+2=0$,有根 $r_1=1,r_2=2$,故齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^t+C_2e^{2t}.$$

因 $f(t)=t^2-2t$,$\lambda=0$ 不是特征方程的根,故可令 $y^*=At^2+Bt+C$ 是(4)的特解,代

入方程(4),比较系数得 $A=B=\frac{1}{2}, C=\frac{1}{4}$,即

$$y^{*}=\frac{1}{2}t^{2}+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}.$$

于是方程(4)的通解为

$$y=C_{1}\mathrm{e}^{t}+C_{2}\mathrm{e}^{2t}+\frac{1}{2}t^{2}+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4},$$

即原方程的通解为

$$y=C_{1}x+C_{2}x^{2}+\frac{1}{2}\ln^{2}x+\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{4}.$$

5. 令 $x=\mathrm{e}^{t}$,记 $\mathrm{D}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$,则方程可化为 $[\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)+\mathrm{D}-4]y=\mathrm{e}^{3t}$,即

$$(\mathrm{D}^{2}-4)y=\mathrm{e}^{3t}. \tag{5}$$

方程(5)对应的齐次方程的特征方程为 $r^{2}-4=0$,有根 $r_{1,2}=\pm 2$,故齐次方程的通解为

$$Y=C_{1}\mathrm{e}^{2t}+C_{2}\mathrm{e}^{-2t}=C_{1}x^{2}+\frac{C_{2}}{x^{2}}.$$

因 $f(t)=\mathrm{e}^{3t}$,$\lambda=3$ 不是特征方程的根,故可令 $y^{*}=A\mathrm{e}^{3t}$ 是方程(5)的特解,即 $y^{*}=Ax^{3}$ 是原方程的特解,代入原方程 $x^{2}y''+xy'-4y=x^{3}$ 中,得 $A=\frac{1}{5}$,即 $y^{*}=\frac{1}{5}x^{3}$. 故原方程的通解为

$$y=Y+y^{*}=C_{1}x^{2}+\frac{C_{2}}{x^{2}}+\frac{1}{5}x^{3}.$$

6. 令 $x=\mathrm{e}^{t}$,记 $\mathrm{D}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}$,则原方程化为 $[\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)-\mathrm{D}+4]y=\mathrm{e}^{t}\sin t$,即

$$(\mathrm{D}^{2}-2\mathrm{D}+4)y=\mathrm{e}^{t}\sin t. \tag{6}$$

方程(6)对应的齐次方程的特征方程为 $r^{2}-2r+4=0$,有根 $r_{1,2}=1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}$,故齐次方程的通解为

$$Y=\mathrm{e}^{t}[C_{1}\cos(\sqrt{3}t)+C_{2}\sin(\sqrt{3}t)].$$

因 $f(x)=\mathrm{e}^{t}\sin t$,$\lambda+\mathrm{i}\omega=1+\mathrm{i}$ 不是特征方程的根,故可令 $y^{*}=\mathrm{e}^{t}(A\cos t+B\sin t)$ 是方程(6)的特解,代入方程(6)并比较系数,可得 $A=0$, $B=\frac{1}{2}$,即

$$y^{*}=\frac{\mathrm{e}^{t}}{2}\sin t,$$

于是方程(6)的通解为

$$y=\mathrm{e}^{t}[C_{1}\cos(\sqrt{3}t)+C_{2}\sin(\sqrt{3}t)]+\frac{\mathrm{e}^{t}}{2}\sin t,$$

即原方程的通解为

$$y = x[C_1\cos(\sqrt{3}\ln x) + C_2\sin(\sqrt{3}\ln x)] + \frac{x}{2}\sin(\ln x).$$

7. 令 $x = e^t$,记 $D = \frac{d}{dy}$,则原方程可化为 $[D(D-1)-3D+4]y = e^t + te^{2t}$,即

$$(D^2 - 4D + 4)y = e^t + te^{2t}. \tag{7}$$

方程(7)对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-4r+4=0$,有根 $r_{1,2}=2$,故齐次方程的通解为

$$Y = e^{2t}(C_1 + C_2 t).$$

因 $\lambda=1$ 不是特征方程的根,故方程 $(D^2-4D+4)y = e^t$ 的特解 $y_1^* = Ae^t$;而 $\lambda=2$ 是特征方程的(二重)根,故方程 $(D^2-4D+4)y = te^{2t}$ 的特解可令作 $y_2^* = t^2e^{2t}(Bt+C)$. 由叠加原理知,可令 $y^* = y_1^* + y_2^* = Ae^t + (Bt^3+Ct^2)e^{2t}$ 是方程(7)的特解,代入方程(7),得

$$Ae^t + (6Bt + 2C)e^{2t} = e^t + te^{2t}.$$

比较系数,得 $A=1, B=\frac{1}{6}, C=0$,即

$$y^* = e^t + \frac{t^3}{6}e^{2t}.$$

于是方程(7)的通解为

$$y = e^{2t}(C_1 + C_2t) + e^t + \frac{t^3}{6}e^{2t},$$

即原方程的通解为

$$y = x^2(C_1 + C_2\ln x) + x + \frac{1}{6}x^2\ln^3 x.$$

8. 令 $x = e^t$,记 $D = \frac{d}{dt}$,则原方程可化为 $[D(D-1)(D-2)+2D-2]y = te^{2t} + 3e^t$,即

$$[(D-1)(D^2-2D+2)]y = te^{2t} + 3e^t. \tag{8}$$

方程(8)对应的齐次方程的特征方程为 $(r-1)(r^2-2r+2)=0$,有根 $r_1=1, r_{2,3}=1\pm i$,故齐次方程的通解为

$$Y = e^t(C_1 + C_2\cos t + C_3\sin t).$$

对方程 $[(D-1)(D^2-2D+2)]y = te^{2t}$,因 $\lambda=2$ 不是特征方程的根,可令 $y_1^* = (At+B)e^{2t}$;对方程 $[(D-1)(D^2-2D+2)]y = 3e^t$,因 $\lambda=1$ 是特征方程的单根,可令 $y_2^* = Cte^t$. 由叠加原理,可令 $y^* = y_1^* + y_2^* = (At+B)e^{2t} + Cte^t$ 是方程(8)的特解,即令

$$y^* = x^2(A\ln x + B) + Cx\ln x$$

是原方程的特解,并有

$$y^{*\prime} = 2Ax\ln x + (A+2B)x + C\ln x + C,$$

$$y^{*\prime\prime}=2A\ln x+(3A+2B)+\frac{C}{x},$$

$$y^{*\prime\prime\prime}=\frac{2A}{x}-\frac{C}{x^2}.$$

代入原方程 $x^3y'''+2xy'-2y=x^2\ln x+3x$ 中,得

$$2Ax^2\ln x+(4A+2B)x^2+Cx=x^2\ln x+3x.$$

比较系数得 $A=\frac{1}{2},B=-1,C=3$,即

$$y^*=x^2\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)+3x\ln x.$$

故原方程的通解为

$$y=x[C_1+C_2\cos(\ln x)+C_3\sin(\ln x)]+x^2\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)+3x\ln x.$$

*习题 7-10 常系数线性微分方程组解法举例

1. 求下列微分方程组的通解:

(1) $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=z,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=y;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=y,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=x;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x+y+3,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+y-3;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+5x+y=\mathrm{e}^t,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-x-3y=\mathrm{e}^{2t};\end{cases}$

(5) $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+2x+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=t,\\[2mm] 5x+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+3y=t^2;\end{cases}$ (6) $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-3x+2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+4y=2\sin t,\\[2mm] 2\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+2x+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-y=\cos t.\end{cases}$

说明 求解线性微分方程组一般采用“消去法”:

1° 从方程组中消去一些未知函数及其各阶导数,得到只含一个未知函数的线性微分方程,然后求出该线性微分方程的通解,本题的(1)(2)(3)题采用这种方法来解;对于学过“线性代数”的读者,可以记 $\mathrm{D}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$,将微分方程组写成代数线性方程组的形式,然后用类似于克拉默法则的方法,消去一些未知函数而获得一个未知函数的微分方程,本题的(4)(5)(6)题采用这种方法来解.

2° 当用“消去法”求得一个未知函数的通解后,求另一未知函数的通解时,一般不必再积分,否则会出现新的任意常数.

解 (1)将

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=z, & ①\\ \dfrac{dz}{dx}=y, & ②\end{cases}$$

中①式的两端关于 x 求导,得$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dz}{dx}$,代入②式得$\dfrac{d^2y}{dx^2}=y$,即

$$\frac{d^2y}{dx^2}-y=0.$$

由它的特征方程 $r^2-1=0$,解得 $r_{1,2}=\pm1$. 于是得

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}.$$

从而由①,得

$$z=\frac{dy}{dx}=C_1e^x-C_2e^{-x}.$$

故方程组的通解为

$$\begin{cases}y=C_1e^x+C_2e^{-x},\\ z=C_1e^x-C_2e^{-x}.\end{cases}$$

(2)将

$$\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}=y, & ①\\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=x, & ②\end{cases}$$

中①式两端关于 t 求二阶导数,得$\dfrac{d^4x}{dt^4}=\dfrac{d^2y}{dt^2}$,代入②式得$\dfrac{d^4x}{dt^4}=x$,即

$$\frac{d^4x}{dt^4}-x=0.$$

由它的特征方程 $r^4-1=0$,解得 $r_{1,2}=\pm1,r_{3,4}=\pm i$. 于是得

$$x=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\cos t+C_4\sin t.$$

再由①,得

$$y=\frac{d^2x}{dt^2}=C_1e^t+C_2e^{-t}-C_3\cos t-C_4\sin t.$$

故方程组的通解为

$$\begin{cases}x=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\cos t+C_4\sin t,\\ y=C_1e^t+C_2e^{-t}-C_3\cos t-C_4\sin t.\end{cases}$$

(3)将

$$\begin{cases}x'+y'=-x+y+3, & ①\\ x'-y'=x+y-3, & ②\end{cases}$$

的①+②得

$$x'=y, \quad ③$$

代入①式，得 $x'+x''=-x+x'+3$，即

$$x''+x=3. \quad ④$$

由它对应的齐次方程的特征方程 $r^2+1=0$，解得 $r_{1,2}=\pm\mathrm{i}$，且易见 $x^*=3$ 是④的特解，于是

$$x=C_1\cos t+C_2\sin t+3.$$

由③得

$$y=x'=-C_1\sin t+C_2\cos t,$$

故方程组的通解为

$$\begin{cases}x=C_1\cos t+C_2\sin t+3,\\ y=-C_1\sin t+C_2\cos t.\end{cases}$$

（4）记 $\mathrm{D}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，则方程组可表示为

$$\begin{cases}(\mathrm{D}+5)x+y=\mathrm{e}^t, & ①\\ -x+(\mathrm{D}-3)y=\mathrm{e}^{2t}, & ②\end{cases}$$

记 $\Delta=\begin{vmatrix}\mathrm{D}+5 & 1\\ -1 & \mathrm{D}-3\end{vmatrix}$，$\Delta_x=\begin{vmatrix}\mathrm{e}^t & 1\\ \mathrm{e}^{2t} & \mathrm{D}-3\end{vmatrix}$，则有 $\Delta x=\Delta_x$，即

$$(\mathrm{D}^2+2\mathrm{D}-14)x=-2\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{2t}. \quad ③$$

由其对应的齐次方程的特征方程 $r^2+2r-14=0$，解得 $r_{1,2}=-1\pm\sqrt{15}$，并令 $x^*=A\mathrm{e}^t+B\mathrm{e}^{2t}$ 是方程③的特解，代入③并比较系数，得

$$x^*=\frac{2}{11}\mathrm{e}^t+\frac{1}{6}\mathrm{e}^{2t},$$

于是得

$$x=C_1\mathrm{e}^{(-1+\sqrt{15})t}+C_2\mathrm{e}^{(-1-\sqrt{15})t}+\frac{2}{11}\mathrm{e}^t+\frac{1}{6}\mathrm{e}^{2t},$$

并由①得

$$y=\mathrm{e}^t-(\mathrm{D}+5)x,$$

即

$$y=(-4-\sqrt{15})C_1\mathrm{e}^{(-1+\sqrt{15})t}-(4-\sqrt{15})C_2\mathrm{e}^{(-1-\sqrt{15})t}-\frac{1}{11}\mathrm{e}^t-\frac{7}{6}\mathrm{e}^{2t}.$$

（5）记 $\mathrm{D}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，方程组可表示为

$$\begin{cases}(\mathrm{D}+2)x+(\mathrm{D}+1)y=t, & ①\\ 5x+(\mathrm{D}+3)y=t^2, & ②\end{cases}$$

则有

$$\begin{vmatrix} D+2 & D+1 \\ 5 & D+3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} D+2 & t \\ 5 & t^2 \end{vmatrix},$$

即

$$(D^2+1)y = 2t^2-3t. \qquad ③$$

③所对应的齐次方程的特征方程的根为 $r_{1,2}=\pm i$,令 $y^*=At^2+Bt+C$,代入③并比较系数,可得 $A=2,B=-3,C=-4$. 于是

$$y = C_1\cos t + C_2\sin t + 2t^2-3t-4.$$

再由②得 $x=\frac{1}{5}[t^2-(D+3)y]$,即

$$x = -\frac{3C_1+C_2}{5}\cos t + \frac{C_1-3C_2}{5}\sin t - t^2+t+3.$$

(6) 记 $D=\frac{d}{dt}$,方程组可表示为

$$\begin{cases}(D-3)x+(2D+4)y = 2\sin t, & ①\\ (2D+2)x+(D-1)y=\cos t, & ②\end{cases}$$

则有

$$\begin{vmatrix} D-3 & 2D+4 \\ 2D+2 & D-1 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} 2\sin t & 2D+4 \\ \cos t & D-1 \end{vmatrix},$$

即

$$(3D^2+16D+5)x = 2\cos t. \qquad ③$$

③所对应的齐次方程的特征方程为 $3r^2+16r+5=0$,有根 $r_1=-5,r_2=-\frac{1}{3}$. 令③的特解 $x^*=A\cos t+B\sin t$,代入③并比较系数,可得 $A=\frac{1}{65},B=\frac{8}{65}$. 于是

$$x = C_1e^{-5t}+C_2e^{-\frac{1}{3}t}+\frac{1}{65}\cos t+\frac{8}{65}\sin t.$$

再由① $-2\times$②,得

$$-(3D+7)x+6y = 2\sin t-2\cos t,$$

即

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{6}[2\sin t-2\cos t+(3D+7)x] \\ &= -\frac{4}{3}C_1e^{-5t}+C_2e^{-\frac{1}{3}t}+\frac{61\sin t-33\cos t}{130}. \end{aligned}$$

2. 求下列微分方程组满足所给初值条件的特解:

(1) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y, x|_{t=0}=0,\\ \frac{dy}{dt}=-x, y|_{t=0}=1;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}-x=0, x|_{t=0}=1,\\ \frac{dx}{dt}+y=0, y|_{t=0}=0;\end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+3x-y=0, x\big|_{t=0}=1, \\ \dfrac{dy}{dt}-8x+y=0, y\big|_{t=0}=4; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt}-4x+\dfrac{dy}{dt}-y=e^{t}, x\big|_{t=0}=\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{dx}{dt}+3x+y=0, y\big|_{t=0}=0; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+2x-\dfrac{dy}{dt}=10\cos t, x\big|_{t=0}=2, \\ \dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}+2y=4e^{-2t}, y\big|_{t=0}=0; \end{cases}$

(6) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}-x+\dfrac{dy}{dt}+3y=e^{-t}-1, x\big|_{t=0}=\dfrac{48}{49}, \\ \dfrac{dx}{dt}+2x+\dfrac{dy}{dt}+y=e^{2t}+t, y\big|_{t=0}=\dfrac{95}{98}. \end{cases}$

解 (1) 记 $D=\dfrac{d}{dt}$,原方程组即为

$$\begin{cases} Dx - y = 0, & ① \\ x + Dy = 0. & ② \end{cases}$$

则有

$$\begin{vmatrix} D & -1 \\ 1 & D \end{vmatrix} x=0,$$

即

$$(D^2+1)x=0. \qquad ③$$

由③的特征方程 $r^2+1=0$,解得 $r_{1,2}=\pm i$,于是

$$x = C_1\cos t + C_2\sin t.$$

代入初值条件 $t=0, x=0$,得 $C_1=0$. 故 $x=C_2\sin t$. 又由①得

$$y=Dx=C_2\cos t,$$

代入初值条件 $t=0, y=1$,得 $C_2=1$. 故方程组的特解为

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos t. \end{cases}$$

(2) 记 $D=\dfrac{d}{dt}$,原方程组即为

$$\begin{cases} (D^2-1)x + 2Dy = 0, & ① \\ Dx + y = 0. & ② \end{cases}$$

则有

$$\begin{vmatrix} D^2-1 & 2D \\ D & 1 \end{vmatrix} x=0,$$

即

$$(D^2+1)x=0. \qquad ③$$

由③的特征方程 $r^2+1=0$,解得 $r_{1,2}=\pm i$,于是

$$x = C_1\cos t + C_2\sin t.$$

代入初值条件 $t=0,x=1$,得 $C_1=1$,即 $x=\cos t+C_2\sin t$. 又由②得

$$y = -Dx = \sin t - C_2\cos t,$$

代入初值条件 $t=0,y=0$,得 $C_2=0$. 故方程组的特解为

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$$

(3) 记 $D=\dfrac{d}{dt}$,方程组即为

$$\begin{cases} (D+3)x - y = 0, & ① \\ -8x + (D+1)y = 0. & ② \end{cases}$$

则有

$$\begin{vmatrix} D+3 & -1 \\ -8 & D+1 \end{vmatrix} x = 0,$$

即

$$(D^2+4D-5)x = 0. \qquad ③$$

由③的特征方程 $r^2+4r-5=0$ 解得 $r_1=1,r_2=-5$. 于是

$$x = C_1e^t + C_2e^{-5t}.$$

又由①得

$$y = (D+3)x = 4C_1e^t - 2C_2e^{-5t}.$$

代入初值条件 $t=0,x=1,y=4$,就有

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ 4C_1 - 2C_2 = 4, \end{cases}$$

解得 $C_1=1,C_2=0$. 故方程组的特解为

$$\begin{cases} x = e^t, \\ y = 4e^t. \end{cases}$$

(4) 记 $D=\dfrac{d}{dt}$,方程组即为

$$\begin{cases} (2D-4)x + (D-1)y = e^t, & ① \\ (D+3)x + y = 0. & ② \end{cases}$$

则有

$$\begin{vmatrix} 2D-4 & D-1 \\ D+3 & 1 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} e^t & D-1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

即

$$(D^2+1)x = -e^t. \qquad ③$$

由方程③对应的齐次方程的特征方程 $r^2+1=0$ 解得

$$r_{1,2}=\pm \mathrm{i}.$$

令 $x^*=A\mathrm{e}^t$,代入方程③并比较系数得 $A=-\dfrac{1}{2}$,即 $x^*=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^t$. 于是

$$x=C_1\cos t+C_2\sin t-\frac{1}{2}\mathrm{e}^t.$$

又由②得

$$y=-(\mathrm{D}+3)x=(C_1-3C_2)\sin t-(3C_1+C_2)\cos t+2\mathrm{e}^t.$$

代入初值条件 $t=0,x=\dfrac{3}{2},y=0$,就有

$$\begin{cases}C_1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2},\\ -3C_1-C_2+2=0,\end{cases}$$

解得 $C_1=2,C_2=-4$. 故方程组的特解为

$$\begin{cases}x=2\cos t-4\sin t-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^t,\\ y=14\sin t-2\cos t+2\mathrm{e}^t.\end{cases}$$

(5) 记 $\mathrm{D}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$,方程组即为

$$\begin{cases}(\mathrm{D}+2)x-\mathrm{D}y=10\cos t, & ①\\ \mathrm{D}x+(\mathrm{D}+2)y=4\mathrm{e}^{-2t}. & ②\end{cases}$$

则有

$$\begin{vmatrix}\mathrm{D}+2 & -\mathrm{D}\\ \mathrm{D} & \mathrm{D}+2\end{vmatrix}y=\begin{vmatrix}\mathrm{D}+2 & 10\cos t\\ \mathrm{D} & 4\mathrm{e}^{-2t}\end{vmatrix},$$

即

$$(\mathrm{D}^2+2\mathrm{D}+2)y=5\sin t. \qquad ③$$

由方程③对应的齐次方程的特征方程 $r^2+2r+2=0$,解得 $r_{1,2}=-1\pm\mathrm{i}$. 令 $y^*=A\cos t+B\sin t$,代入方程③并比较系数,得 $A=-2,B=1$. 于是

$$y=\mathrm{e}^{-t}(C_1\cos t+C_2\sin t)-2\cos t+\sin t.$$

又由① - ②得

$$\begin{aligned}x&=5\cos t-2\mathrm{e}^{-2t}+(\mathrm{D}+1)y\\&=\mathrm{e}^{-t}(C_2\cos t-C_1\sin t)+4\cos t+3\sin t-2\mathrm{e}^{-2t}.\end{aligned}$$

代入初值条件 $t=0,x=2,y=0$,有

$$\begin{cases}C_2+4-2=2,\\ C_1-2=0,\end{cases}$$

解得 $C_1=2,C_2=0$,故方程组的特解为

$$\begin{cases}x=4\cos t+3\sin t-2\mathrm{e}^{-2t}-2\mathrm{e}^{-t}\sin t,\\ y=-2\cos t+\sin t+2\mathrm{e}^{-t}\cos t.\end{cases}$$

(6) 记 $\mathrm{D}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$,方程组即为

$$\begin{cases}(\mathrm{D}-1)x+(\mathrm{D}+3)y=\mathrm{e}^{-t}-1, & ①\\ (\mathrm{D}+2)x+(\mathrm{D}+1)y=\mathrm{e}^{2t}+t. & ②\end{cases}$$

则有

$$\begin{vmatrix}\mathrm{D}-1 & \mathrm{D}+3\\ \mathrm{D}+2 & \mathrm{D}+1\end{vmatrix}x=\begin{vmatrix}\mathrm{e}^{-t}-1 & \mathrm{D}+3\\ \mathrm{e}^{2t}+t & \mathrm{D}+1\end{vmatrix},$$

即

$$(5\mathrm{D}+7)x=5\mathrm{e}^{2t}+3t+2, \qquad ③$$

亦即

$$\mathrm{D}x+\frac{7}{5}x=\mathrm{e}^{2t}+\frac{3}{5}t+\frac{2}{5}.$$

由一阶线性方程的通解公式,得

$$\begin{aligned}x&=\mathrm{e}^{-\int\frac{7}{5}\mathrm{d}t}\left[\int\left(\mathrm{e}^{2t}+\frac{3}{5}t+\frac{2}{5}\right)\mathrm{e}^{\int\frac{7}{5}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C\right]\\&=C\mathrm{e}^{-\frac{7}{5}t}+\frac{5}{17}\mathrm{e}^{2t}+\frac{3}{7}t-\frac{1}{49}.\end{aligned}$$

代入初值条件 $t=0,x=\frac{48}{49}$,得 $C=\frac{12}{17}$. 于是

$$x=\frac{12}{17}\mathrm{e}^{-\frac{7}{5}t}+\frac{5}{17}\mathrm{e}^{2t}+\frac{3}{7}t-\frac{1}{49}.$$

由① - ②得

$$\begin{aligned}y&=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{2t}-t-1)\\&=\frac{18}{17}\mathrm{e}^{-\frac{7}{5}t}-\frac{1}{17}\mathrm{e}^{2t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{7}t-\frac{26}{49}.\end{aligned}$$

总习题七

1. 填空

(1) $xy'''+2x^2y'^2+x^3y=x^4+1$ 是________阶微分方程;

(2) 一阶线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的通解为________;

(3) 与积分方程 $y=\int_{x_0}^{x}f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 等价的微分方程初值问题是________;

(4) 已知 $y=1,y=x,y=x^2$ 是某二阶非齐次线性微分方程的三个解,则该方程的通解为________.

解 (1) 3.

(2) $y = \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)$.

(3) $y' = f(x,y)$, $y\big|_{x=x_0} = 0$.

注 1° 方程 $y = \int_{x_0}^{x} f(x,y)\mathrm{d}x$ 的积分上限 x 是积分方程的变量,它是与 y 相对应的;而积分表达式中 $f(x,y)\mathrm{d}x$ 中的 x 是积分变量,不能将它与积分上限相混淆,故积分方程应理解为 $y = \int_{x_0}^{x} f(t,y)\mathrm{d}t$.

2° 由于积分方程 $y = \int_{x_0}^{x} f(t,y)\mathrm{d}t$ 确定了隐函数 $y=y(x)$,因此积分方程中的 y 取 $y=y(x)$ 后,有恒等式

$$y(x) \equiv \int_{x_0}^{x} f[t,y(t)]\mathrm{d}t.$$

于是上式两端对 x 求导,就得 $y'(x) = f[x,y(x)]$,即 $y' = f(x,y)$. 显然,当 $x = x_0$ 时,$y = \int_{x_0}^{x_0} f(x,y)\mathrm{d}x = 0$,即 $y\big|_{x=x_0} = 0$.

(4) $y = C_1(x-1) + C_2(x^2-1) + 1$.

因为由叠加原理知 $x-1$ 与 x^2-1 是非齐次方程对应的齐次方程的解,且它们是线性无关的,于是根据线性方程通解结构得出以上结论.

2. 以下两题中给出了四个结论,从中选出一个正确的结论:

(1) 设非齐次线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 有两个不同的解:$y_1(x)$ 与 $y_2(x)$,C 为任意常数,则该方程的通解是(　　).

(A) $C[y_1(x) - y_2(x)]$

(B) $y_1(x) + C[y_1(x) - y_2(x)]$

(C) $C[y_1(x) + y_2(x)]$

(D) $y_1(x) + C[y_1(x) + y_2(x)]$

解 $y_1(x) - y_2(x)$ 是对应的齐次方程 $y' + P(x)y = 0$ 的非零解,从而由线性微分方程解的性质定理知 $C[y_1(x) - y_2(x)]$ 是齐次方程的通解,再由非齐次线性方程解的结构定理知 $y_1(x) + C[y_1(x) - y_2(x)]$ 是原方程的通解. 故选(B).

(2) 具有特解 $y_1 = \mathrm{e}^{-x}$,$y_2 = 2x\mathrm{e}^{-x}$,$y_3 = 3\mathrm{e}^{x}$ 的三阶常系数齐次线性微分方程是(　　).

(A) $y''' - y'' - y' + y = 0$

(B) $y''' + y'' - y' - y = 0$

(C) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

(D) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

解 由题设知 $r = -1, -1, 1$ 为所求齐次线性微分方程对应的特征方程的 3 个根,而 $(r+1)^2(r-1) = r^3 + r^2 - r - 1$,故应选(B).

3. 求以下列各式所表示的函数为通解的微分方程:

(1) $(x+C)^2+y^2=1$(其中 C 为任意常数);

(2) $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$(其中 C_1,C_2 为任意常数).

解　(1) 将 $(x+C)^2+y^2=1$ 两端关于 x 求导,得

$$x+C+yy'=0,$$

即有

$$C=-x-yy',$$

将其代入 $(x+C)^2+y^2=1$ 中,得

$$y^2(1+y'^2)=1.$$

(2) 将 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$ 关于 x 求二次导数,得

$$\begin{cases} y'=C_1e^x+2C_2e^{2x}, \\ y''=C_1e^x+4C_2e^{2x}. \end{cases}$$

把以上两式看成是以 C_1 与 C_2 为未知量的线性方程组,解得

$$C_1=(2y'-y'')e^{-x},\quad C_2=\frac{1}{2}(y''-y')e^{-2x},$$

代入 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$ 中,得

$$y=(2y'-y'')+\frac{1}{2}(y''-y'),$$

即 $y''-3y'+2y=0$.

4. 求下列微分方程的通解:

(1) $xy'+y=2\sqrt{xy}$;　　(2) $xy'\ln x+y=ax(\ln x+1)$;

(3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{2(\ln y-x)}$;　　*(4) $\dfrac{dy}{dx}+xy-x^3y^3=0$;

(5) $y''+y'^2+1=0$;　　(6) $yy''-y'^2-1=0$;

(7) $y''+2y'+5y=\sin 2x$;　　(8) $y'''+y''-2y'=x(e^x+4)$;

*(9) $(y^4-3x^2)dy+xydx=0$;　　(10) $y'+x=\sqrt{x^2+y}$.

解　(1) 将方程化为 $y'+\dfrac{y}{x}=2\sqrt{\dfrac{y}{x}}$,并令 $\dfrac{y}{x}=u$,则方程成为

$$xu'=2\sqrt{u}-2u.$$

分离变量后有

$$\frac{du}{2\sqrt{u}(1-\sqrt{u})}=\frac{dx}{x},$$

积分得

$$\ln\left|1-\sqrt{u}\right|=-\ln|x|+\ln C_1,$$

即 $x(1-\sqrt{u})=C$,代入 $u=\dfrac{y}{x}$,得原方程的通解 $x-\sqrt{xy}=C$.

（2）原方程可化为 $y'+\frac{1}{x\ln x}y=a\left(1+\frac{1}{\ln x}\right)$，由一阶线性方程的通解公式，得

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int\frac{1}{x\ln x}dx}\left[\int a\left(1+\frac{1}{\ln x}\right)e^{\int\frac{1}{x\ln x}dx}dx+C\right] \\ &= \frac{1}{\ln x}\left[\int a(\ln x+1)dx+C\right]=\frac{1}{\ln x}(ax\ln x+C) \\ &= ax+\frac{C}{\ln x}. \end{aligned}$$

故方程的通解为 $y=ax+\frac{C}{\ln x}$.

（3）原方程可表示为 $\frac{dx}{dy}+\frac{2}{y}x=\frac{2\ln y}{y}$，由一阶线性方程的通解公式，得

$$\begin{aligned} x &= e^{-\int\frac{2}{y}dy}\left(\int\frac{2\ln y}{y}e^{\int\frac{2}{y}dy}dy+C\right) \\ &= \frac{1}{y^2}\left(\int 2y\ln y dy+C\right)=\frac{1}{y^2}\left(y^2\ln y-\frac{1}{2}y^2+C\right) \\ &= \ln y-\frac{1}{2}+\frac{C}{y^2}. \end{aligned}$$

故方程的通解为 $x=\frac{C}{y^2}+\ln y-\frac{1}{2}$.

*（4）原方程为伯努利方程 $y'+xy=x^3y^3$. 该方程两端同除以 y^3 后成为

$$\frac{y'}{y^3}+x\frac{1}{y^2}=x^3.$$

令 $\frac{1}{y^2}=z$，则 $-2\frac{y'}{y^3}=z'$，且原方程化为

$$z'-2xz=-2x^3.$$

得

$$\begin{aligned} z &= e^{\int 2xdx}\left(\int -2x^3e^{-\int 2xdx}dx+C\right)=e^{x^2}\left(\int -2x^3e^{-x^2}dx+C\right) \\ &= e^{x^2}\left(x^2e^{-x^2}-\int 2xe^{-x^2}dx+C\right)=e^{x^2}(x^2e^{-x^2}+e^{-x^2}+C) \\ &= x^2+1+Ce^{x^2}. \end{aligned}$$

代入 $z=\frac{1}{y^2}$，即得原方程的通解

$$\frac{1}{y^2}=Ce^{x^2}+x^2+1.$$

（5）令 $y'=p$，则 $y''=p'$ 且方程成为

$$p'+p^2+1=0.$$

分离变量并积分

$$\int \frac{\mathrm{d}p}{1+p^2} = -\int \mathrm{d}x,$$

得 $\arctan p = -x + C_1$，即

$$y' = p = \tan(-x + C_1),$$

于是得通解

$$\begin{aligned} y &= \int -\tan(x - C_1)\,\mathrm{d}x \\ &= \ln|\cos(x - C_1)| + C_2, \end{aligned}$$

或写成 $y = \ln|\cos(x + C_1)| + C_2$.

(6) 此方程不显含 x，令 $y' = p$，则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，且原方程化为

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p^2 - 1 = 0.$$

分离变量

$$\frac{p\mathrm{d}p}{p^2 + 1} = \frac{\mathrm{d}y}{y},$$

积分得

$$\frac{1}{2}\ln(p^2 + 1) = \ln y + \ln C_1,$$

即 $p^2 + 1 = (C_1 y)^2$，故 $p = \pm\sqrt{(C_1 y)^2 - 1}$. 取 $y' = \sqrt{(C_1 y)^2 - 1}$，分离变量并积分

$$\begin{aligned} x &= \int \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(C_1 y)^2 - 1}} = \frac{1}{C_1}\int \frac{\mathrm{d}(C_1 y)}{\sqrt{(C_1 y)^2 - 1}} \\ &= \frac{1}{C_1}\{\ln[C_1 y + \sqrt{(C_1 y)^2 - 1}] - C_2\}, \end{aligned}$$

即 $C_1 y = \dfrac{e^{C_1 x + C_2} + e^{-(C_1 x + C_2)}}{2}$.

对于 $y' = -\sqrt{(C_1 y)^2 - 1}$，可得相同的结果，故原方程的通解为

$$y = \frac{1}{2C_1}(e^{C_1 x + C_2} + e^{-C_1 x - C_2}).$$

(7) 原方程对应的齐次方程的特征方程为 $r^2 + 2r + 5 = 0$，有根 $r_{1,2} = -1 \pm 2\mathrm{i}$，故对应齐次方程的通解为 $Y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$.

因 $f(x) = \sin 2x$，$\lambda + \mathrm{i}\omega = 2\mathrm{i}$ 不是特征方程的根，故令 $y^* = A\cos 2x + B\sin 2x$ 是原方程的特解. 将 y^* 代入原方程，可得

$$(A + 4B)\cos 2x + (B - 4A)\sin 2x = \sin 2x.$$

比较系数，得 $\begin{cases} A + 4B = 0, \\ B - 4A = 1, \end{cases}$ 即 $A = -\dfrac{4}{17}$，$B = \dfrac{1}{17}$. 于是

$$y^* = -\frac{4}{17}\cos 2x + \frac{1}{17}\sin 2x.$$

故原方程的通解为

$$y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) - \frac{4}{17}\cos 2x + \frac{1}{17}\sin 2x.$$

(8) 原方程对应的齐次方程的特征方程为 $r^3+r^2-2r=0$,有根 $r_1=0, r_2=1, r_3=-2$,故对应齐次方程的通解为 $Y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-2x}$.

对于方程

$$y'''+y''-2y'=xe^x, \tag{①}$$

因 $f_1(x)=xe^x$,其中 $\lambda=1$ 是特征方程的(单)根,故令 $y_1^*=x(A_1x+B_1)e^x$,代入①中并消去 e^x,得 $6A_1x+8A_1+3B_1=x$,比较系数得

$$\begin{cases}6A_1=1,\\8A_1+3B_1=0,\end{cases}$$

即 $A_1=\frac{1}{6}, B_1=-\frac{4}{9}$. 于是 $y_1^*=\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{4}{9}x\right)e^x$.

对于方程

$$y'''+y''-2y'=4x, \tag{②}$$

因 $f_2(x)=4x$,其中 $\lambda=0$ 是特征方程的(单)根,故令 $y_2^*=x(A_2x+B_2)$,代入②中,得 $-4A_2x+2A_2-2B_2=4x$. 比较系数得 $A_2=-1, B_2=-1$. 于是 $y_2^*=-x^2-x$.

根据线性方程解的叠加原理知 $y^*=y_1^*+y_2^*$ 是原方程的特解,故原方程的通解为

$$y=Y+y^*=C_1+C_2e^x+C_3e^{-2x}+\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{4}{9}x\right)e^x-x^2-x.$$

*(9) 原方程可改写成 $\frac{dx}{dy}-\frac{3}{y}x=-y^3x^{-1}$,这是伯努利方程. 在此方程两端同乘以 x,得 $x\frac{dx}{dy}-\frac{3}{y}x^2=-y^3$.

令 $x^2=z$,则 $\frac{dz}{dy}=2x\frac{dx}{dy}$,且原方程化为

$$\frac{dz}{dy}-\frac{6}{y}z=-2y^3,$$

解得

$$\begin{aligned}z &= e^{\int\frac{6}{y}dy}\left(\int -2y^3e^{-\int\frac{6}{y}dy}dy+C\right)=y^6\left(\int -\frac{2}{y^3}dy+C\right)\\&=y^6\left(\frac{1}{y^2}+C\right)=y^4+Cy^6.\end{aligned}$$

代入 $z=x^2$,得原方程的通解 $x^2=y^4+Cy^6$.

(10) 令 $u=\sqrt{x^2+y}$，即 $y=u^2-x^2$，则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-2x$. 且原方程化为 $2u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-x=u$，即$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{u}\right)=\frac{1}{2}$.

又令$\frac{u}{x}=v$，即 $u=xv$，则$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=v+x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$. 且原方程化为

$$v+x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{2v}=\frac{1}{2}.$$

分离变量得$\frac{v\mathrm{d}v}{2v^2-v-1}=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x}{x}$. 积分

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\ln|x|&=\int\frac{v\mathrm{d}v}{2v^2-v-1}=\frac{1}{3}\left(\int\frac{1}{v-1}\mathrm{d}v+\int\frac{1}{2v+1}\mathrm{d}v\right)\\&=\frac{1}{3}\left[\ln|v-1|+\frac{1}{2}\ln|2v-1|\right]+C_1,\end{aligned}$$

即 $(v-1)^2(2v-1)x^3=C_2(C_2=\mathrm{e}^{-6C_1})$. 代入 $v=\frac{u}{x}$，得

$$2u^3-3xu^2+x^3=C_2.$$

再代入 $u=\sqrt{x^2+y}$，得原方程的通解

$$2(x^2+y)^{\frac{3}{2}}-3x(x^2+y)+x^3=C_2,$$

即 $(x^2+y)^{\frac{3}{2}}=x^3+\frac{3}{2}xy+C\left(C=\frac{C_2}{2}\right)$.

5. 求下列微分方程满足所给初值条件的特解：

*(1) $y^3\mathrm{d}x+2(x^2-xy^2)\mathrm{d}y=0$，$x=1$ 时 $y=1$；

(2) $y''-ay'^2=0$，$x=0$ 时 $y=0$，$y'=-1$；

(3) $2y''-\sin 2y=0$，$x=0$ 时 $y=\frac{\pi}{2}$，$y'=1$；

(4) $y''+2y'+y=\cos x$，$x=0$ 时 $y=0$，$y'=\frac{3}{2}$.

解 *(1) 原方程可以表示成伯努利方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{2}{y}x=-\frac{2}{y^3}x^2,$$

即

$$x^{-2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{2}{y}x^{-1}=-\frac{2}{y^3}.$$

令 $z=x^{-1}$，则$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=-x^{-2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$，且原方程化为一阶线性方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+\frac{2}{y}z=\frac{2}{y^3}.$$

解得

$$z = e^{-\int \frac{2}{y}dy}\left(\int \frac{2}{y^3}e^{\int \frac{2}{y}dy}dy + C\right) = \frac{1}{y^2}\left(\int \frac{2}{y}dy + C\right)$$

$$= \frac{1}{y^2}(2\ln|y| + C).$$

将 $z = x^{-1}$ 代入上式，得 $x^{-1} = \frac{1}{y^2}(2\ln|y| + C)$，即原方程的通解

$$y^2 = x(2\ln|y| + C).$$

由初值条件 $x = 1, y = 1$，得 $C = 1$，故所求特解为

$$y^2 = x(2\ln|y| + 1).$$

（2）令 $y' = p$，则原方程化为 $p' - ap^2 = 0$. 分离变量并积分

$$\int \frac{dp}{p^2} = \int a dx$$

得

$$-\frac{1}{p} = ax + C_1,$$

即 $p = -\frac{1}{ax + C_1}$. 代入初值条件 $x = 0, p = -1$，得 $C_1 = 1$，从而有

$$y' = -\frac{1}{ax + 1},$$

于是

$$y = -\int \frac{1}{ax + 1}dx = -\frac{1}{a}\ln(ax + 1) + C_2.$$

代入初值条件 $x = 0, y = 0$，得 $C_2 = 0$. 故所求特解为

$$y = -\frac{1}{a}\ln(ax + 1).$$

（3）在方程 $2y'' - \sin 2y = 0$ 两端同乘以 y'，则有

$$2y'y'' - \sin 2yy' = 0,$$

即

$$\left(y'^2 + \frac{1}{2}\cos 2y\right)' = 0,$$

于是

$$y'^2 + \frac{1}{2}\cos 2y = C_1.$$

代入初值条件 $y = \frac{\pi}{2}, y' = 1$，得 $C_1 = \frac{1}{2}$. 故有 $y'^2 + \frac{1}{2}\cos 2y = \frac{1}{2}$，即

$$y'^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2y = \sin^2 y,$$

并因 $y=\frac{\pi}{2}$时，$y'=1$，故上式开方后取

$$y' = \sin y.$$

分离变量并积分

$$\int \frac{dy}{\sin y} = \int dx,$$

得

$$\ln \tan \frac{y}{2} = x + C_2.$$

代入初值条件 $x=0, y=\frac{\pi}{2}$，得 $C_2=0$，故所求特解为 $\ln \tan \frac{y}{2}=x$，即

$$y = 2\arctan e^x.$$

(4) 由原方程对应齐次方程的特征方程 $r^2+2r+1=0$，解得 $r_{1,2}=-1$，故对应齐次方程的通解为 $Y=(C_1+C_2x)e^{-x}$.

因 $f(x)=\cos x$，$\lambda+i\omega=0+i$ 不是特征方程的根，故令 $y^*=A\cos x+B\sin x$ 是原方程的特解，并代入原方程，得

$$-2A\sin x + 2B\cos x = \cos x.$$

比较系数得 $A=0, B=\frac{1}{2}$，故 $y^*=\frac{1}{2}\sin x$，且原方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + \frac{1}{2}\sin x,$$

并有

$$y' = (C_2 - C_1 - C_2x)e^{-x} + \frac{1}{2}\cos x.$$

代入初值条件 $x=0, y=0, y'=\frac{3}{2}$，有

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 - C_1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \end{cases}$$

即 $C_1=0, C_2=1$. 故所求特解为

$$y = xe^{-x} + \frac{1}{2}\sin x.$$

6. 已知某曲线经过点(1,1)，它的切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标，求它的方程.

解　设(x,y)为曲线上的点，则曲线在该点处的切线方程为

$$Y - y = y'(X - x),$$

切线在纵轴上的截距为 $y-xy'$. 并依题意，有

$$y - xy' = x, \quad y\big|_{x=1} = 1.$$

将上述方程写成 $y' - \frac{1}{x}y = -1$，可解得

$$\begin{aligned} y &= e^{\int \frac{1}{x}dx}\left(\int -e^{-\int \frac{1}{x}dx} + C\right) = x\left(\int -\frac{1}{x}dx + C\right) \\ &= x(C - \ln|x|). \end{aligned}$$

代入初值条件 $x=1, y=1$，得 $C=1$. 故所求曲线的方程为

$$y = x(1 - \ln|x|).$$

7. 已知某车间的容积为 $30\times30\times6\ m^3$，其中的空气含 0.12% 的 CO_2（以容积计算）. 现以含 CO_2 0.04% 的新鲜空气输入，问每分钟应输入多少，才能在30 min后使车间空气中 CO_2 的含量不超过 0.06%？（假定输入的新鲜空气与原有空气很快混合均匀后，以相同的流量排出.）

解　设每分钟输入 $v(m^3)$ 的空气. 又设在时刻 t 车间中 CO_2 的浓度为 $x = x(t)(\%)$，则在时间间隔 $[t, t+dt]$ 内，车间内 CO_2 的含量的改变量为

$$30\times30\times6\ dx = 0.04\times10^{-2}v dt - vx dt$$

即

$$\frac{dx}{x - 0.0004} = -\frac{v}{5400}dt,$$

且 $x\big|_{t=0} = 0.0012$.

将上述微分方程两端积分，得

$$\ln(x - 0.0004) = -\frac{v}{5400}t + \ln C,$$

即 $x = 0.0004 + Ce^{-\frac{v}{5400}t}$. 代入初值条件 $t=0, x=0.0012$，可得 $C=0.0008$. 于是有

$$x = 0.0004 + 0.0008e^{-\frac{v}{5400}t}.$$

依题意，当 $t=30$ 时，$x\leqslant0.0006$，将 $t=30, x=0.0006$ 代入上式，解得

$$v = 180\ln 4 \approx 250(m^3).$$

故每分钟至少输入新鲜空气 250 m^3.

8. 设可导函数 $\varphi(x)$ 满足

$$\varphi(x)\cos x + 2\int_0^x \varphi(t)\sin t dt = x + 1,$$

求 $\varphi(x)$.

解　在方程 $\varphi(x)\cos x + 2\int_0^x \varphi(t)\sin t dt = x+1$ 两端关于 x 求导，得

$$\varphi'(x)\cos x - \varphi(x)\sin x + 2\varphi(x)\sin x = 1,$$

即 $\varphi' + \tan x\cdot\varphi = \sec x$，且在原方程中取 $x=0$，可得 $\varphi(0)=1$.

由一阶线性方程的通解公式，得

$$\begin{aligned}\varphi &= e^{-\int\tan x\mathrm{d}x}\left(\int\sec x e^{\int\tan x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)\\ &= \cos x\left(\int\sec^2 x\mathrm{d}x + C\right) = \cos x(\tan x + C)\\ &= \sin x + C\cos x.\end{aligned}$$

代入初值条件 $x=0,\varphi=1$,可得 $C=1$,故

$$\varphi(x) = \sin x + \cos x.$$

9. 设光滑曲线 $y=\varphi(x)$ 过原点,且当 $x>0$ 时 $\varphi(x)>0$,对应于$[0,x]$一段曲线的弧长为 e^x-1,求 $\varphi(x)$.

解　根据题设条件得

$$\int_0^x\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x = e^x - 1,\quad y\big|_{x=0} = 0.$$

在积分方程两端对 x 求导,得

$$\sqrt{1+y'^2} = e^x,$$

即 $y' = \pm\sqrt{e^{2x}-1}$. 取 $y'=\sqrt{e^{2x}-1}$,积分得

$$y = \sqrt{e^{2x}-1} - \arctan\sqrt{e^{2x}-1} + C,$$

由初值条件 $y\big|_{x=0}=0$ 知 $C=0$,故

$$y = \sqrt{e^{2x}-1} - \arctan\sqrt{e^{2x}-1}.$$

注:此函数满足题设条件:$x>0$ 时,$y=\varphi(x)>0$. 若取 $y'=-\sqrt{e^{2x}-1}$,则积分所得的函数不满足这个题设条件.

10. 设 $y_1(x)$、$y_2(x)$ 是二阶齐次线性方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的两个解,令

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ y'_1(x) & y'_2(x)\end{vmatrix} = y_1(x)y'_2(x) - y'_1(x)y_2(x),$$

证明:(1) $W(x)$满足方程 $W'+p(x)W=0$;

(2) $W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x p(t)\mathrm{d}t}$.

证　(1) 依题意,对 $i=1,2$,有

$$y''_i + p(x)y'_i + q(x)y_i = 0,$$

即 $y''_i+p(x)y'_i=-q(x)y_i$. 于是

$$\begin{aligned}&W'+p(x)W\\ &= (y'_1y'_2+y_1y''_2-y''_1y_2-y'_1y'_2)+p(x)(y_1y'_2-y'_1y_2)\\ &= y_1[y''_2+p(x)y'_2]-y_2[y''_1+p(x)y'_1]\\ &= y_1[-q(x)y_2]-y_2[-q(x)y_1] = 0.\end{aligned}$$

故 W 满足所给微分方程.

(2) 因 $W'+p(x)W=0$,分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}W}{W}=-p(x)\mathrm{d}x$. 将上式两端分别在

$[W_0, W]$ 与 $[x_0, x]$ 上积分，得

$$\ln W - \ln W_0 = -\int_{x_0}^{x} p(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中 $W_0 = W(x_0)$. 于是得

$$W = W(x_0)\,\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\,\mathrm{d}x}.$$

***11.** 求下列欧拉方程的通解：

(1) $x^2y'' + 3xy' + y = 0$;

(2) $x^2y'' - 4xy' + 6y = x$.

解 (1) 令 $x = \mathrm{e}^t$，即 $t = \ln x$，并记 $\mathrm{D} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，则原方程可化为

$$[\mathrm{D}(\mathrm{D}-1) + 3\mathrm{D} + 1]y = 0,$$

即 $(\mathrm{D}^2 + 2\mathrm{D} + 1)y = 0$.

该方程的特征方程为 $r^2 + 2r + 1 = 0$，有根 $r_{1,2} = -1$，于是该方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 t)\mathrm{e}^{-t},$$

故原方程的通解为

$$y = \frac{C_1 + C_2\ln x}{x}.$$

(2) 令 $x = \mathrm{e}^t$，即 $t = \ln x$，并记 $\mathrm{D} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，则原方程可化为

$$[\mathrm{D}(\mathrm{D}-1) - 4\mathrm{D} + 6]y = \mathrm{e}^t,$$

即 $(\mathrm{D}^2 - 5\mathrm{D} + 6)y = \mathrm{e}^t$.

该方程对应齐次方程的特征方程为 $r^2 - 5r + 6 = 0$，有根 $r_1 = 2, r_2 = 3$. 故齐次方程的通解为

$$Y = C_1\mathrm{e}^{2t} + C_2\mathrm{e}^{3t}.$$

因 $f(t) = \mathrm{e}^t$，$\lambda = 1$ 不是特征方程的根，故可令 $y^* = A\mathrm{e}^t$ 是非齐次方程的特解. 代入 $(\mathrm{D}^2 - 5\mathrm{D} + 6)y = \mathrm{e}^t$ 中并消去 e^t，得 $A = \dfrac{1}{2}$，即

$$y^* = \frac{1}{2}\mathrm{e}^t.$$

于是得

$$y = C_1\mathrm{e}^{2t} + C_2\mathrm{e}^{3t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^t,$$

即原方程的通解为

$$y = C_1x^2 + C_2x^3 + \frac{x}{2}.$$

***12.** 求下列常系数线性微分方程组的通解：

(1) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+2\dfrac{dy}{dt}+y=0,\\ 3\dfrac{dx}{dt}+2x+4\dfrac{dy}{dt}+3y=t;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}+2\dfrac{dx}{dt}+x+\dfrac{dy}{dt}+y=0,\\ \dfrac{dx}{dt}+x+\dfrac{d^2y}{dt^2}+2\dfrac{dy}{dt}+y=e^t.\end{cases}$

解 (1) 记 $D=\dfrac{d}{dt}$,方程组可表示为

$$\begin{cases}Dx+(2D+1)y=0, & ①\\ (3D+2)x+(4D+3)y=t. & ②\end{cases}$$

则有

$$\begin{vmatrix}D & 2D+1\\ 3D+2 & 4D+3\end{vmatrix}x=\begin{vmatrix}0 & 2D+1\\ t & 4D+3\end{vmatrix},$$

即

$$(2D^2+4D+2)x=-t-2. \qquad ③$$

方程③对应齐次方程的特征方程为 $2r^2+4r+2=0$,有根 $r_{1,2}=-1$. 因 $f(t)=-t-2$,故令 $x^*=At+B$ 是③的特解,代入③中,即得 $A=\dfrac{1}{2}$,$B=0$. 故方程③有通解

$$x=(C_1+C_2t)e^{-t}+\frac{1}{2}t.$$

又由② $-2\times$①可得

$$\begin{aligned}y&=-(D+1)x+t\\&=-(C_1+C_2+C_2t)e^{-t}-\frac{1}{2},\end{aligned}$$

故方程组的通解为

$$\begin{cases}x=(C_1+C_2t)e^{-t}+\dfrac{1}{2}t,\\ y=-(C_1+C_2+C_2t)e^{-t}-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

(2) 记 $D=\dfrac{d}{dt}$,方程组可表示为

$$\begin{cases}(D^2+2D+1)x+(D+1)y=0,\\ (D+1)x+(D^2+2D+1)y=e^t,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}(D+1)^2x+(D+1)y=0, & ①\\ (D+1)x+(D+1)^2y=e^t, & ②\end{cases}$$

则有

$$\begin{vmatrix}(D+1)^2 & D+1\\ D+1 & (D+1)^2\end{vmatrix}x=\begin{vmatrix}0 & D+1\\ e^t & (D+1)^2\end{vmatrix}$$

即

$$(D^3+3D^2+2D)x=-e^t. \qquad ③$$

方程③对应齐次方程的特征方程为 $r(r^2+3r+2)=0$，有根 $r_1=0, r_2=-1, r_3=-2$. 而 $f(t)=-e^t, \lambda=1$ 不是特征方程的根，故令 $x^*=Ae^t$ 是方程③的特解，代入③中并消去 e^t，可得 $A=-\frac{1}{6}$，即 $x^*=-\frac{1}{6}e^t$，于是方程③的通解为

$$x=C_1+C_2e^{-t}+C_3e^{-2t}-\frac{1}{6}e^t.$$

又由方程①得

$$\begin{aligned}(D+1)y&=-(D+1)^2x=-D^2x-2Dx-x\\&=-C_1-C_3e^{-2t}+\frac{2}{3}e^t,\end{aligned}$$

即 $y'+y=-C_1-C_3e^{-2t}+\frac{2}{3}e^t$，可解得

$$\begin{aligned}y&=e^{-\int dt}\left[\int\left(-C_1-C_3e^{-2t}+\frac{2}{3}e^t\right)e^{\int dt}dt+C_4\right]\\&=e^{-t}\left[\int\left(-C_1e^t-C_3e^{-t}+\frac{2}{3}e^{2t}\right)dt+C_4\right]\\&=-C_1+C_3e^{-2t}+\frac{1}{3}e^t+C_4e^{-t}.\end{aligned}$$

故方程组的通解为

$$\begin{cases}x=C_1+C_2e^{-t}+C_3e^{-2t}-\frac{1}{6}e^t,\\y=C_4e^{-t}-C_1+C_3e^{-2t}+\frac{1}{3}e^t.\end{cases}$$

二、全国硕士研究生入学统一考试数学

试题选解

(一) 函数　极限　连续

1. (2004. Ⅲ,Ⅳ)函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界(　　).

(A) $(-1,0)$　　(B) $(0,1)$　　(C) $(1,2)$　　(D) $(2,3)$

解　因为 $x\to1$ 及 $x\to2$ 时,均有 $f(x)\to\infty$,所以 $f(x)$ 在 $(0,1),(1,2),(2,3)$ 内均无界,故应选(A).

2. (1998. Ⅱ)设数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,则下列断言正确的是(　　).

(A) 若 $\{x_n\}$ 发散,则 $\{y_n\}$ 必发散　　(B) 若 $\{x_n\}$ 无界,则 $\{y_n\}$ 必有界

(C) 若 $\{x_n\}$ 有界,则 $\{y_n\}$ 必为无穷小　　(D) 若 $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 为无穷小,则 $\{y_n\}$ 必为无穷小

解　取 $x_n=n,y_n=\dfrac{1}{n^2}$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,且 $\{x_n\}$ 发散,但 $\{y_n\}$ 收敛,故(A)不正确.

取 $x_n=[1+(-1)^n]n,y_n=[1-(-1)^n]n$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,且 $\{x_n\},\{y_n\}$ 都无界,故(B)不正确.

取 $x_n=\dfrac{1}{n^2},y_n=n$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,且 $\{x_n\}$ 有界,但 $\{y_n\}$ 不是无穷小,故(C)也不正确.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$ 知 $\{x_ny_n\}$ 为无穷小 $(n\to\infty)$,故当 $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 为无穷小时,$\{y_n\}=\left\{(x_ny_n)\cdot\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 为无穷小,故应选(D).

3. (2007. Ⅰ)当 $x\to0^+$ 时,与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是(　　).

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$　(B) $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$　(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　(D) $1-\cos\sqrt{x}$

解　当 $x\to0^+$ 时,有 $1-e^{\sqrt{x}}=-(e^{\sqrt{x}}-1)\sim-\sqrt{x}$, $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$, $1-\cos\sqrt{x}\sim\dfrac{1}{2}(\sqrt{x})^2=\dfrac{1}{2}x$. 利用排除法知应选(B).

注　本题直接找出 $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ 的等价无穷小有些困难,但由于另外三个的等价无穷小很容易得到,因此通过排除法可得到答案. 事实上,

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)-\ln(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\xlongequal{\sqrt{x}=t}\lim_{t\to0^+}\frac{\ln(1+t^2)-\ln(1-t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{1}{1-t}}{1}=\lim_{t\to0^+}\frac{2t(1-t)+1+t^2}{(1+t^2)(1-t)}=1.$$

4. (2009. Ⅰ, Ⅲ) 当 $x\to0$ 时, $f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小, 则(　　).

(A) $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$　　　(B) $a=1,b=\dfrac{1}{6}$

(C) $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$　　　(D) $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$

解　因为 $f(x)=x-\sin ax,g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 为等价无穷小, 所以

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\cdot(-bx)}=\lim_{x\to0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}=\lim_{x\to0}\frac{a^2\sin ax}{-6bx}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{a^2\cdot ax}{-6bx}=-\frac{a^3}{6b}=1,$$

得 $a^3=-6b$, 由此排除(B)(C).

另外, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-a\cos ax}{-3bx^2}$存在, 蕴含了 $1-a\cos ax\to0(x\to0)$, 得 $a=1$, 排除(D). 故应选(A).

5. (2001. Ⅱ) 设当 $x\to0$ 时, $(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小, 而 $x\sin x^n$ 是比 $(e^{x^2}-1)$ 高阶的无穷小, 则正整数 n 等于(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

解　当 $x\to0$ 时, $(1-\cos x)\ln(1+x^2)\sim\dfrac{1}{2}x^4$, $x\sin x^n\sim x^{n+1}$, $e^{x^2}-1\sim x^2$, 故应选(B).

6. (2007. Ⅰ, Ⅲ) 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 的渐近线的条数为(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

解　因为 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=\infty$, 所以 $x=0$ 为垂直渐近线; 又 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=0$, 所以 $y=0$ 为水平渐近线; 进一步,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(1+e^x)}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}[y-1\cdot x]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}[\ln(1+e^x)-x]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[\ln e^x(1+e^{-x})-x]=\lim_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-x})=0,$$

于是有斜渐近线: $y=x$. 故应选(D).

注　一般来说, 有水平渐近线(即 $\lim\limits_{x\to\infty}y=c$)就不再考虑斜渐近线, 但当 $\lim\limits_{x\to\infty}y$ 不

存在时,就要分别讨论 $x\to-\infty$ 和 $x\to+\infty$ 两种情况,即左右两侧的渐近线.本题在 $x<0$ 的一侧有水平渐近线,而在 $x>0$ 的一侧有斜渐近线.关键应注意指数函数 e^x 当 $x\to\infty$ 时极限不存在,必须分 $x\to-\infty$ 和 $x\to+\infty$ 进行讨论.

7. (2010. Ⅰ)极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x$ 等于( ).

(A) 1　　(B) e　　(C) e^{a-b}　　(D) e^{b-a}

解　因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left[1+\dfrac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)}\right]^{\frac{(x-a)(x+b)}{(a-b)x+ab}}\right\}^{\frac{x[(a-b)x+ab]}{(x-a)(x+b)}}=$ e^{a-b},所以应选(C).

8. (2008. Ⅰ)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界,$\{x_n\}$ 为数列,下列命题正确的是( ).

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛　　(B) 若 $\{x_n\}$ 单调,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 收敛　　(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调,则 $\{x_n\}$ 收敛

解　若 $\{x_n\}$ 单调,则由函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界知,$\{f(x_n)\}$ 单调有界,从而 $\{f(x_n)\}$ 收敛,故应选(B).

9. (1994. Ⅰ,Ⅱ) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)\right]=$ ________.

解　由等价无穷小代换定理

$$\lim_{x\to 0}(\cot x)\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

10. (1999. Ⅱ)求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\tan x-\sin x}{x[\ln(1+x)-x]}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\ln(1+x)-x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\frac{1}{1+x}-1}=-\frac{1}{2}.$$

11. (2000. Ⅰ) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

解　因为

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=1,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1,$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1.$$

12. (1997. Ⅰ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$ ________.

解 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\ln(1+x)}=3,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\dfrac{1}{x}}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\dfrac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=0,$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\left[\frac{3\sin x}{\ln(1+x)}+\frac{x^2\cos\dfrac{1}{x}}{\ln(1+x)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}(3+0)=\frac{3}{2}.$$

13. (2008. Ⅰ)求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

解法一 $$\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)\cos x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

解法二 $$\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{\sin^4 x}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t}{t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{3t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{6t}=\frac{1}{6}.$$

14. (2011. Ⅰ)求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}$.

分析 本题考查极限的计算,属于 1^∞ 形式的极限. 计算时,先按 1^∞ 未定式的计算方法将极限式变形,再综合利用等价无穷小替换、洛必达法则等方法进行计算.

解 $$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{\ln(1+x)-x}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x}\cdot\frac{1}{e^x-1}}$$

$$= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{-x}{2x(1+x)}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

15. (1995. Ⅲ) $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right) =$ ________.

解　因为

$$\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)} \leqslant \frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n} \leqslant \frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)},$$

$$\lim_{n \to \infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)} = \lim_{n \to \infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)} = \frac{1}{2},$$

所以由夹逼准则知原式 $= \frac{1}{2}$.

16. (1998. Ⅰ, Ⅱ) $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2} =$ ________.

解法一　利用洛必达法则,

$$\lim_{x \to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2} = \lim_{x \to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{x \to 0}\frac{(1+x)^{-\frac{1}{2}}-(1-x)^{-\frac{1}{2}}}{x}$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{x \to 0}\left[-\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}\right] = -\frac{1}{4}.$$

解法二　利用泰勒公式,因为

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2+o(x^2),$$

$$\sqrt{1-x} = 1-\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2+o(x^2),$$

所以

$$\lim_{x \to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2} = \lim_{x \to 0}\frac{-\frac{1}{4}x^2+o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{4}.$$

17. (2006. Ⅰ) $\lim\limits_{x \to 0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x} =$ ________.

解法一　利用等价无穷小,

$$原极限 = \lim_{x \to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 2.$$

解法二 利用三角公式及两个重要极限,

$$\text{原极限}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=2\cdot 1=2.$$

18. (1994. Ⅲ) 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)$.

解 因为

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)=\frac{1+\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\tan\frac{2}{n}}=1,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right)^{\frac{1-\tan\frac{2}{n}}{2\tan\frac{2}{n}}\cdot\frac{4\tan\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}\cdot\frac{1}{1-\tan\frac{2}{n}}}=e^4.$$

19. (2006. Ⅰ) 设数列$\{x_n\}$满足$0<x_1<\pi, x_{n+1}=\sin x_n\ (n=1,2,\cdots)$.

(Ⅰ) 证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,并求该极限;

(Ⅱ) 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

解 (Ⅰ) 用归纳法证明$\{x_n\}$单调减少且有下界.

由$0<x_1<\pi$,得

$$0<x_2=\sin x_1<x_1<\pi;$$

设$0<x_n<\pi$,则

$$0<x_{n+1}=\sin x_n<x_n<\pi,$$

所以$\{x_n\}$单调减少且有下界，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

记$a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，由$x_{n+1}=\sin x_n$得

$$a=\sin a,$$

所以$a=0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

（Ⅱ）因为

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}},$$

而

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{6x^2}=-\frac{1}{6},$$

故$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$，

又由（Ⅰ），$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}.$$

20.（2002. Ⅴ）设$0<x_1<3$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$（$n=1,2,\cdots$），证明数列$\{x_n\}$的极限存在，并求此极限.

证 由题设$0<x_1<3$知，x_1及$3-x_1$均为正数，故

$$0<x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}\leqslant\frac{1}{2}(x_1+3-x_1)=\frac{3}{2}.$$

设当$k>1$时，$0<x_k\leqslant\frac{3}{2}$，则

$$0<x_{k+1}=\sqrt{x_k(3-x_k)}\leqslant\frac{1}{2}(x_k+3-x_k)=\frac{3}{2},$$

故由数学归纳法知，对任意正整数$n>1$，均有

$$0<x_n\leqslant\frac{3}{2},$$

即数列$\{x_n\}$是有界的.

又当$n>1$时，

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n=\sqrt{x_n}(\sqrt{3-x_n}-\sqrt{x_n})$$
$$=\frac{\sqrt{x_n}(3-2x_n)}{\sqrt{3-x_n}+\sqrt{x_n}}\geqslant 0\quad\left(\text{因 }0<x_n\leqslant\frac{3}{2}\right),$$

故当$n>1$时，$x_{n+1}\geqslant x_n$，即数列$\{x_n\}$单调增加.

根据单调有界极限存在准则知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，由

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n(3-x_n)},$$

得 $a=\sqrt{a(3-a)}$，从而 $2a^2-3a=0$. 解得 $a=\frac{3}{2}, a=0$. 因 $a=\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant x_2>0$，故 $a=0$ 舍去，得$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\frac{3}{2}$.

21. （1999. Ⅰ）$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=$________.

解法一　利用洛必达法则，

$$\begin{aligned}\text{原极限} &= \lim_{x\to0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^2\sin x}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2\sin x + x\cos x}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{\cos x}{3\cos x - x\sin x} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

解法二　利用麦克劳林公式，

$$\text{原极限} = \lim_{x\to0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^2\sin x} = \lim_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)-x+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}$$

$$=\frac{1}{3}.$$

解法三　利用等价无穷小代换及洛必达法则，

$$\text{原极限} = \lim_{x\to0}\frac{\tan x - x}{x^2\tan x} = \lim_{x\to0}\frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan^2 x}{3x^2} = \lim_{x\to0}\frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

22. （2005. Ⅲ，Ⅳ）求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+x}{1-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{x}\right)$.

解　当 $x\to0$ 时，$1-\mathrm{e}^{-x}\sim x$，并利用洛必达法则得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{1+x}{1-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to0}\frac{x+x^2-1+\mathrm{e}^{-x}}{x(1-\mathrm{e}^{-x})}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{x+x^2-1+\mathrm{e}^{-x}}{x^2}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{1+2x-\mathrm{e}^{-x}}{2x}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{2+\mathrm{e}^{-x}}{2} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

23. （2004. Ⅱ）设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则$f(x)$的间断点为$x=$________.

解 因为当$x\neq 0$时，

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)x}{nx^2+1}=\frac{1}{x},$$

所以

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\qquad \lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty,$$

从而$f(x)$的间断点为$x=0$.

24. （2005. Ⅱ）设函数

$$f(x)=\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1},$$

则（ ）.

（A）$x=0,x=1$都是$f(x)$的第一类间断点

（B）$x=0,x=1$都是$f(x)$的第二类间断点

（C）$x=0$是$f(x)$的第一类间断点，$x=1$是$f(x)$的第二类间断点

（D）$x=0$是$f(x)$的第二类间断点，$x=1$是$f(x)$的第一类间断点

解 因为

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to 1^+}f(x)=0,\quad \lim_{x\to 1^-}f(x)=-1,$$

所以应选（D）.

25. （2002. Ⅱ）设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0,\\ ae^{2x}, & x\leqslant 0\end{cases}$$

在$x=0$处连续，则$a=$________.

解 $$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\tan x}{\dfrac{x}{2}}=-2,$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}ae^{2x}=a=f(0).$$

因$f(x)$在$x=0$处连续，故$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，从而得$a=-2$.

26. （1998. Ⅱ）求函数$f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}$在区间$(0,2\pi)$内的间断点，并判断其类型.

解 $f(x)$在$(0,2\pi)$内的间断点为$x=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4}$.

在 $x=\frac{\pi}{4}$ 处，$f\left(\frac{\pi}{4}^{+}\right)=+\infty$，在 $x=\frac{5}{4}\pi$ 处，$f\left(\frac{5\pi}{4}^{+}\right)=+\infty$，故 $x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$ 为第二类间断点(无穷间断点)；

在 $x=\frac{3\pi}{4}$ 处，$\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}f(x)=1$，在 $x=\frac{7}{4}\pi$ 处，$\lim\limits_{x\to\frac{7\pi}{4}}f(x)=1$，故 $x=\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$ 为第一类间断点(可去间断点).

27. (2001. Ⅱ) 求极限 $\lim\limits_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，记此极限为 $f(x)$，求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

解　因为

$$f(x)=e^{\lim\limits_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln\frac{\sin t}{\sin x}},$$

而

$$\lim_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln\frac{\sin t}{\sin x}=\lim_{t\to x}x\frac{\cos t/\sin t}{\cos t}=\frac{x}{\sin x},$$

故 $f(x)=e^{\frac{x}{\sin x}}$.

$f(x)$ 的间断点为 $x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

在 $x=0$ 处，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{x}{\sin x}}=e$，故 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点(可去间断点)；

在 $x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 处，$\lim\limits_{x\to k\pi}f(x)=\infty$，故 $x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 是函数 $f(x)$ 的第二类间断点(无穷间断点).

28. (1992. Ⅳ) 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}, & x\neq1,\\[2ex] 1, & x=1,\end{cases}$$

问函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是否连续？若不连续，修改函数在 $x=1$ 处的定义，使之连续.

解　因为

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to1}\frac{\tan(x-1)}{\cos\frac{\pi}{2}x}$$
$$=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to1}\frac{\sec^2(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}=-\frac{4}{\pi^2}\neq f(1),$$

所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续. 若修改定义，令 $f(1)=-\frac{4}{\pi^2}$，则函数在 $x=1$ 处连续.

29. (2003. Ⅱ)设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0,\\ 6, & x=0,\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}, & x>0,\end{cases}$$

问 a 为何值时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续;a 为何值时,$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点?

解 $$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}=\lim_{x\to0^-}\frac{ax^3}{x-\arcsin x}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{3ax^2}{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to0^-}\frac{3ax^2}{\sqrt{1-x^2}-1}\cdot\lim_{x\to0^-}\sqrt{1-x^2}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{6ax}{\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}=-6a,$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}=4\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x^2}$$

$$=4\lim_{x\to0^+}\frac{ae^{ax}+2x-a}{2x}=2\lim_{x\to0^+}(a^2e^{ax}+2)$$

$$=2a^2+4.$$

令 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$,有 $2a^2+4=-6a$,得 $a=-1$ 或 $a=-2$.

当 $a=-1$ 时,$\lim\limits_{x\to0}f(x)=6=f(0)$,$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

当 $a=-2$ 时,$\lim\limits_{x\to0}f(x)=12\neq f(0)$,$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

（二）一元函数微分学

1. （2012. Ⅰ）设函数 $y(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $y'(0)=(\quad)$.

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$　　　(B) $(-1)^n(n-1)!$

(C) $(-1)^{n-1}n!$　　　(D) $(-1)^n n!$

解　因为 $y'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y(x)-y(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)}{x}$.

$$=\lim_{x\to 0}(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)=-1\times(-2)\cdots(1-n)$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)!,$$

所以应选(A).

2. （2001. Ⅰ）设 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为（　　）.

(A) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在　　　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在　　　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在

解　令 $1-e^h=t$，则 $h=\ln(1-t)$，当 $h\to 0$ 时，$t\to 0$，故

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}f(1-e^h)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{\ln(1-t)}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t}\cdot\frac{t}{\ln(1-t)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t}\cdot(-1),$$

由导数的定义知，应选(B). 关于其他三个选项的排除，可用反例说明. 取 $f(x)=|x|$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导，但

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)=\lim_{h\to 0}\frac{|1-\cos h|}{h^2}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(h-\sin h)=\lim_{h\to 0}\frac{|h-\sin h|}{h^2}=0,$$

故排除(A)和(C).

又取 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续，从而 $f'(0)$ 不存在. 但

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}(1-1)=0,$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]=\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{h}(0-0)=0.$$

即 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在，故排除(D).

3.（2002. Ⅰ，Ⅱ）设函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界可导，则（　　）.

（A）当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

（B）当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

（C）当 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$

（D）当 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$

解　取 $f(x)=\dfrac{\sin x^2}{x}$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，而 $f'(x)=2\cos x^2-\dfrac{\sin x^2}{x^2}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 不存在，故排除（A）.

取 $f(x)=\sin x$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界可导，且 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$，而 $f'(x)=\cos x$，$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=1$，故排除（C）和（D）. 因此，应选（B）.

注　可直接证明（B）为正确选项. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=k\neq0$，不妨设 $k>0$，则存在 $M>0$，当 $x>M$ 时，$f'(x)>\dfrac{k}{2}$. 由 $\int_M^x f'(x)\,\mathrm{d}x>\int_M^x\dfrac{k}{2}\mathrm{d}x$ 得，$f(x)>\dfrac{k}{2}(x-M)+f(M)$，与 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界矛盾，故选（B）.

4.（1999. Ⅱ）曲线 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^t\sin 2t,\\ y=\mathrm{e}^t\cos t\end{cases}$ 在点 $(0,1)$ 处的法线方程为________.

解
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\mathrm{e}^t\cos t-\mathrm{e}^t\sin t}{\mathrm{e}^t\sin 2t+2\mathrm{e}^t\cos 2t}=\frac{\cos t-\sin t}{\sin 2t+2\cos 2t}.$$

点 $(0,1)$ 对应参数 $t=0$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=\dfrac{1}{2}$，于是所求法线方程为
$$y-1=-2x,$$
即 $2x+y-1=0$.

5.（2010. Ⅰ）设 $x=\mathrm{e}^{-t}$，$y=\int_0^t\ln(1+u^2)\,\mathrm{d}u$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$________.

解
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=-\mathrm{e}^t\ln(1+t^2),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=-\left[\mathrm{e}^t\ln(1+t^2)+\mathrm{e}^t\frac{2t}{1+t^2}\right]\cdot(-\mathrm{e}^t)=\mathrm{e}^{2t}\left[\ln(1+t^2)+\frac{2t}{1+t^2}\right],$$

于是 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=0$.

6.（2004. Ⅱ）设函数 $y(x)$ 由参数方程
$$\begin{cases}x=t^3+3t+1,\\ y=t^3-3t+1\end{cases}$$
确定，则曲线 $y=y(x)$ 向上凸的 x 取值范围为________.

解　由题设知

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{t^2-1}{t^2+1},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{4t}{3(t^2+1)^3}.$$

令 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}<0$，得 $t<0$. 代入 $x=t^3+3t+1$ 并由单调性知 $x<1$，故所求取值范围为 $(-\infty,1)$ 或 $(-\infty,1]$.

7. (2011. Ⅰ)曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是(　　).

(A) $(1,0)$　　(B) $(2,0)$　　(C) $(3,0)$　　(D) $(4,0)$

解　由 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 可知 1,2,3,4 分别是 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4=0$ 的一、二、三、四重根，故由导数与原函数之间的关系可知

$$y'(1)\neq0,\quad y'(2)=y'(3)=y'(4)=0,$$

$$y''(2)\neq0,\quad y''(3)=y''(4)=0,\quad y'''(3)\neq0,\quad y'''(4)=0,$$

故 $(3,0)$ 是一拐点.

注　由 $y''(3)=0$，$y'''(3)\neq0$ 得出 $(3,0)$ 是一拐点，参阅习题 3 - 4 中第 16 题的解答.

8. (2002. Ⅰ)设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数，且 $f(0)\neq0$，$f'(0)\neq0$，若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to0$ 时是比 h 高阶的无穷小，试确定 a,b 的值.

解法一　由题设条件知

$$\lim_{h\to0}[af(h)+bf(2h)-f(0)]=(a+b-1)f(0)=0,$$

由于 $f(0)\neq0$，故有 $a+b-1=0$.

又由洛必达法则，有

$$0=\lim_{h\to0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{af'(h)+2bf'(2h)}{1}=(a+2b)f'(0),$$

因 $f'(0)\neq0$，故有 $a+2b=0$.

于是，解得 $a=2$，$b=-1$.

解法二　由 $f(h)$ 在 $h=0$ 处可导，即

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0),$$

于是

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)+\alpha,\quad \lim_{h\to0}\alpha=0.$$

从而有

$$f(h)=f(0)+f'(0)h+o_1(h),\quad \lim_{h\to0}\frac{o_1(h)}{h}=\lim_{h\to0}\alpha=0.$$

同理有

$$f(2h)=f(0)+f'(0)2h+o_2(h),\quad \lim_{h\to 0}\frac{o_2(h)}{h}=0.$$

所以

$$af(h)+bf(2h)-f(0)=(a+b-1)f(0)+(a+2b)f'(0)h+o(h),$$

按题设，当 $h\to 0$ 时上式右端应是 h 的高阶无穷小，从而

$$(a+b-1)f(0)=0,\quad (a+2b)f'(0)=0,$$

于是 $a+b-1=0, a+2b=0$，得 $a=2, b=-1$.

9. （2011. Ⅰ）求方程 $k\arctan x-x=0$ 不同实根的个数，其中 k 为参数.

解　令 $f(x)=k\arctan x-x$，则 $f(0)=0, f'(x)=\dfrac{k}{1+x^2}-1=\dfrac{k-1-x^2}{1+x^2}$.

（1）当 $k\leqslant 1$ 时，在 $(-\infty,+\infty)$ 内 $f'(x)\leqslant 0$，且等号仅当 $k=1, x=0$ 时成立，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调减少，又 $f(0)=0$，因此 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有且仅有一个零点.

（2）当 $k>1$ 时，在 $(-\sqrt{k-1},\sqrt{k-1})$ 内 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $[-\sqrt{k-1},\sqrt{k-1}]$ 上单调增加，又 $f(0)=0$，因此 $f(x)$ 在 $[-\sqrt{k-1},\sqrt{k-1}]$ 上有且只有一个零点；在 $(-\infty,-\sqrt{k-1})$ 及 $(\sqrt{k-1},+\infty)$ 内均有 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\sqrt{k-1})$ 及 $(\sqrt{k-1},+\infty)$ 内均单调减少，又 $f(-\sqrt{k-1})<f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$，$f(\sqrt{k-1})>f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$. 因此 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\sqrt{k-1})$ 及 $(\sqrt{k-1},+\infty)$ 内各有一个零点.

综上所述，$k\leqslant 1$ 时，方程 $k\arctan x-x=0$ 只有一个实根，$k>1$ 时，方程 $k\arctan x-x=0$ 有三个实根.

10. （2002. Ⅰ）已知两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\displaystyle\int_0^{\arctan x}e^{-t^2}\,dt$ 在点 $(0,0)$ 处的切线相同，写出此切线方程，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\dfrac{2}{n}\right)$.

解　由已知条件得 $f(0)=0$，

$$f'(0)=\frac{e^{-(\arctan x)^2}}{1+x^2}\bigg|_{x=0}=1,$$

故所求切线方程为 $y=x$.

$$\lim_{n\to\infty}nf\left(\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}2\,\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{2}{n}}=2f'(0)=2.$$

11. （1987. Ⅰ，Ⅱ）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上可微，对于 $[0,1]$ 上的每一个 x，函数 $f(x)$ 的值都在开区间 $(0,1)$ 内，且 $f'(x)\neq 1$，证明在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 x，使

$f(x)=x$.

证 令 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续. 由于 $0<f(x)<1$，所以 $F(0)=f(0)-0>0$，$F(1)=f(1)-1<0$，故由零点定理知，在 $(0,1)$ 内至少存在一点 x，使 $F(x)=f(x)-x=0$，即 $f(x)=x$.

12. (2010. Ⅰ)求 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt$ 的单调区间与极值.

解 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt=x^2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt-\int_1^{x^2}te^{-t^2}dt$,

令 $f'(x)=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt=0$，得 $x=-1,x=0,x=1$.

由 $f''(x)=2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt+4x^2e^{-x^4}$，因为

$$f''(\pm 1)=\frac{4}{e}>0,\quad f''(0)=-2\int_0^1 e^{-t^2}dt<0,$$

所以 $x=-1,x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点，极小值为 $f(\pm1)=0$；$x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点，极大值为 $f(0)=\int_0^1 te^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

因此，$f(x)$ 在 $(-\infty,-1]$ 及 $[0,1]$ 上单调减少，$f(x)$ 在 $[-1,0]$ 及 $[1,+\infty)$ 上单调增加.

13. (2012. Ⅰ)证明：$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{x^2}{2}\ (-1<x<1)$.

证 令 $f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\ (-1<x<1)$. 因为 $f(-x)=f(x)$，所以只要讨论当 $x\geqslant0$ 时的情形即可. 又

$$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+x\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-x+(1+x)}{(1-x)^2}-\sin x-x$$

$$=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x\quad(0\leqslant x<1),$$

$$f''(x)=\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}+\frac{2(1-x^2)-2x(-2x)}{(1-x^2)^2}-\cos x-1$$

$$=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2}-\cos x-1$$

$$=\frac{4}{(1-x^2)^2}-\cos x-1\quad(0\leqslant x<1),$$

$$f'''(x)=\frac{-4\cdot2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4}+\sin x=\frac{16x}{(1-x^2)^3}+\sin x\quad(0\leqslant x<1),$$

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'''(x)>0$，从而 $f''(x)$ 单调增加，$f''(x)>f''(0)=2>0$，由此得 $f'(x)$ 单调增加，$f'(x)>f'(0)=0$，又得 $f(x)$ 单调增加，$f(x)>f(0)=0$，因此当 $x\in(-1,1)$ 时，

$f(x) \geqslant 0$，即

$$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x \geqslant 1+\frac{x^2}{2}\ (-1<x<1).$$

14.（2011. Ⅰ）证明：(1) 对任意正整数 n，都有 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$；

(2) 设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\ (n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

解 (1) 令 $\frac{1}{n}=x$，则原不等式可化为 $\frac{x}{x+1}<\ln(1+x)<x$.

先证明 $\ln(1+x)<x\ (x>0)$.

令 $f(x)=x-\ln(1+x)$. 由于 $f'(x)=1-\frac{1}{1+x}>0\ (x>0)$，可知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加. 又由于 $f(0)=0$，因此当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)=0$，即 $\ln(1+x)<x\ (x>0)$.

再证明 $\frac{x}{x+1}<\ln(1+x)\ (x>0)$.

令 $g(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{x+1}$. 由于 $g(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}>0\ (x>0)$，可知 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加. 由于 $g(0)=0$，因此当 $x>0$ 时，$g(x)>g(0)=0$，即 $\frac{x}{x+1}<\ln(1+x)\ (x>0)$.

因此，我们证明了 $\frac{x}{x+1}<\ln(1+x)<x\ (x>0)$. 再令 $x=\frac{1}{n}$，即可得到所需证明的不等式.

(2) $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$，由不等式 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 可知：数列 $\{a_n\}$ 单调减少.

又由不等式 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$ 可知：

$$\begin{aligned}a_n&=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln n\\&=\ln(n+1)-\ln n>0.\end{aligned}$$

因此数列 $\{a_n\}$ 是有界的. 故由单调有界收敛准则可知，数列 $\{a_n\}$ 收敛.

15.（2007. Ⅰ）设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶导数，且 $f''(x)>0$. 令 $u_n=f(n)\ (n=1,2,\cdots)$，则下列结论正确的是（　　）.

(A) 若 $u_1>u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛　　(B) 若 $u_1>u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散

(C) 若 $u_1<u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛　　(D) 若 $u_1<u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散

解 设 $f(x)=x^2$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶导数，且 $f''(x)>0$，$u_1<u_2$，但

$\{u_n\}=\{n^2\}$发散,故排除(C);设$f(x)=\dfrac{1}{x}$,则$f(x)$在$(0,+\infty)$上具有二阶导数,且$f''(x)>0,u_1>u_2$,但$\{u_n\}=\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$收敛,故排除(B);又设$f(x)=-\ln x$,则$f(x)$在$(0,+\infty)$上具有二阶导数,且$f''(x)>0,u_1>u_2$,但$\{u_n\}=\{-\ln n\}$发散,故排除(A).因此,应选(D).

注 也可直接证明(D)为正确选项.若$u_1<u_2$,则存在$k>0$,使得$u_2-u_1>k>0$.在区间$[1,2]$上应用拉格朗日中值定理,存在$\xi_1\in(1,2)$使得

$$\frac{u_2-u_1}{2-1}=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f'(\xi_1)>k>0,$$

又因为在$(0,+\infty)$上$f''(x)>0$,因此$f'(x)$在$(\xi_1,+\infty)$上单调增加,于是对任意$x\in(\xi_1,+\infty)$有

$$f'(x)>f'(\xi_1)>k>0.$$

在区间$[\xi_1,x]$上应用拉格朗日中值定理,存在$\xi_2\in(\xi_1,x)$,使得

$$\frac{f(x)-f(\xi_1)}{x-\xi_1}=f'(\xi_2)>k>0,$$

即$f(x)=f(\xi_1)+f'(\xi_2)(x-\xi_1)\to+\infty\ (x\to+\infty)$,故应选(D).

16. (2007. Ⅰ,Ⅲ)设函数$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内具有二阶导数且存在相等的最大值,$f(a)=g(a),f(b)=g(b)$,证明:存在$\xi\in(a,b)$,使得$f''(\xi)=g''(\xi)$.

分析 需要证明的结论与导数有关,自然联想到用微分中值定理,事实上,若令$F(x)=f(x)-g(x)$,则问题转化为证明$F''(\xi)=0$,只需对$F'(x)$用罗尔定理,关键是找到$F'(x)$的端点函数值相等的区间(特别是两个一阶导数同时为零的点),而利用$F(a)=F(b)=0$,若能再找一点$c\in(a,b)$,使得$F(c)=0$,则在区间$[a,c],[c,b]$上两次利用罗尔定理有一阶导函数相等的两点,再对$F'(x)$用罗尔定理即可.

证 构造辅助函数$F(x)=f(x)-g(x)$,由题设有$F(a)=F(b)=0$.又$f(x)$,$g(x)$在(a,b)内具有相等的最大值,不妨设存在$x_1\leqslant x_2,x_1,x_2\in(a,b)$,使得

$$f(x_1)=M=\max_{[a,b]}f(x),\quad g(x_2)=M=\max_{[a,b]}g(x).$$

若$x_1=x_2$,令$c=x_1$,则$F(c)=0$.

若$x_1<x_2$,因$F(x_1)=f(x_1)-g(x_1)\geqslant0,F(x_2)=f(x_2)-g(x_2)\leqslant0$,从而存在$c\in[x_1,x_2]\subset(a,b)$,使$F(c)=0$.

在区间$[a,c],[c,b]$上分别利用罗尔定理知,存在$\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$,使得

$$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0.$$

再对$F'(x)$在区间$[\xi_1,\xi_2]$上应用罗尔定理,知存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$,有

$$F''(\xi)=0,$$

即 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

17.（2009. Ⅰ，Ⅲ）

（Ⅰ）证明拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$；

（Ⅱ）证明：若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$，则 $f'_+(0)$ 存在，且 $f'_+(0)=A$.

证 （Ⅰ）作辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$，易验证 $\varphi(x)$ 满足：$\varphi(a)=\varphi(b)$；$\varphi(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $\varphi'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

根据罗尔定理，可得在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使 $\varphi'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

所以，$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

（Ⅱ）任取 $x_0\in(0,\delta)$，则函数 $f(x)$ 满足：在闭区间 $[0,x_0]$ 上连续，在开区间 $(0,x_0)$ 内可导，从而由拉格朗日中值定理可得，存在 $\xi_{x_0}\in(0,x_0)\subset(0,\delta)$，使得 $f'(\xi_{x_0})=\dfrac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}$.

又由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$，对上式两边取 $x_0\to0^+$ 时的极限可得，

$$f'_+(0)=\lim_{x_0\to0^+}\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\lim_{x_0\to0^+}f'(\xi_{x_0})=\lim_{\xi_{x_0}\to0^+}f'(\xi_{x_0})=A,$$

故 $f'_+(0)$ 存在，且 $f'_+(0)=A$.

18.（1996. Ⅲ）设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$，$f'(a)f'(b)>0$，证明存在 $\xi\in(a,b)$ 和 $\eta\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$ 及 $f''(\eta)=0$.

证 先证明存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$. 用反证法.

若不存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$，则在 (a,b) 内恒有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$），不妨设 $f(x)>0$（对 $f(x)<0$，类似可证），则

$$f'(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a}\geqslant0,$$

$$f'(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{x-b}\leqslant0.$$

从而 $f'(a)f'(b)\leqslant0$，与已知条件矛盾，所以在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$.

再证存在 $\eta\in(a,b)$，使 $f''(\eta)=0$.

由$f(a)=f(b)=f(\xi)$及罗尔定理知，存在$\eta_1\in(a,\xi)$和$\eta_2\in(\xi,b)$，使$f'(\eta_1)=f'(\eta_2)=0$，再在$[\eta_1,\eta_2]$上对函数$f'(x)$运用罗尔定理，知存在$\eta\in(\eta_1,\eta_2)\subset(a,b)$，使$f''(\eta)=0$.

19. (2001. Ⅰ)设$y=f(x)$在$(-1,1)$内具有二阶连续导数且$f''(x)\neq 0$，试证：

(1) 对于$(-1,1)$内的任一$x\neq 0$，存在惟一的$\theta(x)\in(0,1)$，使$f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)$成立；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

证法一 (1) 任给非零$x\in(-1,1)$，由拉格朗日中值定理得

$$f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)\quad(0<\theta(x)<1).$$

因为$f''(x)$在$(-1,1)$内连续且$f''(x)\neq 0$，所以$f''(x)$在$(-1,1)$内不变号，不妨设$f''(x)>0$，则$f'(x)$在$(-1,1)$内严格单增，故$\theta(x)$惟一.

(2) 由泰勒公式得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2,$$

ξ在0与x之间. 所以

$$xf'(\theta(x)x)=f(x)-f(0)=f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2,$$

从而

$$\theta(x)\frac{f'(\theta(x)x)-f'(0)}{\theta(x)x}=\frac{1}{2}f''(\xi).$$

由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(\theta(x)x)-f'(0)}{\theta(x)x}=f''(0),\quad \lim_{x\to 0}f''(\xi)=\lim_{\xi\to 0}f''(\xi)=f''(0),$$

故$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

证法二 (1) 同证法一(1).

(2) 对于非零$x\in(-1,1)$，由拉格朗日中值定理得

$$f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)\quad(0<\theta(x)<1),$$

所以

$$\frac{f'(\theta(x)x)-f'(0)}{x}=\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}.$$

由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(\theta(x)x)-f'(0)}{\theta(x)x}=f''(0),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0),$$

故$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

20. （2005. Ⅲ，Ⅳ）以下四个命题中，正确的是（　　）.

（A）若$f'(x)$在$(0,1)$内连续，则$f(x)$在$(0,1)$内有界

（B）若$f(x)$在$(0,1)$内连续，则$f(x)$在$(0,1)$内有界

（C）若$f'(x)$在$(0,1)$内有界，则$f(x)$在$(0,1)$内有界

（D）若$f(x)$在$(0,1)$内有界，则$f'(x)$在$(0,1)$内有界

解　若$f'(x)$在$(0,1)$内有界，则存在常数$M>0$，对任意$x\in(0,1)$，$|f'(x)|\leqslant M$. 又当$x\in(0,1)$时，由拉格朗日中值定理，有

$$f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)=f'(\xi)\left(x-\frac{1}{2}\right),$$

其中ξ介于x与$\dfrac{1}{2}$之间，于是有

$$|f(x)|\leqslant\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|+M\left|x-\frac{1}{2}\right|<\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|+\frac{1}{2}M,$$

故应选（C）.

注　本题也可以用排除法．对选项（A）、（B），取$f(x)=\ln x$，则$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，$\ln x$与$\dfrac{1}{x}$均在$(0,1)$内连续，但$\ln x$在$(0,1)$内无界，故（A）、（B）均不正确；对选项（D），取$f(x)=\sqrt{1-x^2}$，$f(x)$在$(0,1)$内有界，但$f'(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$在$(0,1)$内无界，故（D）不正确.

21. （2001. Ⅱ）设$f(x)$在区间$[-a,a]\ (a>0)$上具有二阶连续导数，$f(0)=0$.

（1）写出$f(x)$的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式；

（2）证明在$[-a,a]$上至少存在一点η，使

$$a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

解　（1）对任意$x\in[-a,a]$，

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2=f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2,$$

其中ξ在0与x之间.

（2）$\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}f'(0)x\,\mathrm{d}x+\int_{-a}^{a}\frac{x^2}{2!}f''(\xi)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}x^2f''(\xi)\,\mathrm{d}x.$

因为$f''(x)$在$[-a,a]$上连续，故对任意的$x\in[-a,a]$，有$m\leqslant f''(x)\leqslant M$，其中$M,m$分别为$f''(x)$在$[-a,a]$上的最大、最小值，所以有

$$m\int_0^a x^2\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}x^2f''(\xi)\,\mathrm{d}x\leqslant M\int_0^a x^2\,\mathrm{d}x,$$

即

$$m \leqslant \frac{3}{a^3} \int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M.$$

因而由 $f''(x)$ 的连续性知，至少存在一点 $\eta \in [-a,a]$，使

$$f''(\eta) = \frac{3}{a^3} \int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

即 $a^3 f''(\eta) = 3\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

下面我们给出(2)的另一种证法.

令 $F(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$. 因为 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上有二阶连续导数，所以 $F(x)$ 在 $[-a,a]$ 上有三阶连续导数，且

$$F(0)=0,\quad F'(0)=0,\quad F''(0)=0.$$

由泰勒公式知，存在 $\xi \in (-a,a)$，使得

$$F(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3!}F'''(\xi)x^3,\quad \xi \in (-a,a).$$

由 $F'''(x) = f''(x) + f''(-x)$，故有

$$\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3!}[f''(\xi) + f''(-\xi)]x^3,\quad \xi \in (-a,a).$$

又因为 $f''(x)$ 连续，所以在 ξ 与 $-\xi$ 之间存在 η，使得 $\dfrac{f''(\xi)+f''(-\xi)}{2} = f''(\eta)$，从而

$$\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}f''(\eta)x^3,\quad \eta \in (-a,a).$$

在上式中令 $x=a$ 即得所证.（按此证法，η 可在开区间 $(-a,a)$ 内取得，比原题结论更精确.）

22. (2006. Ⅰ)设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量，Δy 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则（　　）.

(A) $0<\mathrm{d}y<\Delta y$　　(B) $0<\Delta y<\mathrm{d}y$

(C) $\Delta y<\mathrm{d}y<0$　　(D) $\mathrm{d}y<\Delta y<0$

解　由一阶泰勒公式

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(\xi)}{2!}(\Delta x)^2,$$

其中 ξ 介于 x_0 与 $x_0+\Delta x$ 之间，及已知条件知 $\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x>0$，$\Delta y - \mathrm{d}y = \dfrac{f''(\xi)}{2!}(\Delta x)^2>0$，故应选(A).

23. (1990. Ⅲ)证明当 $x>0$ 时，有不等式

$$\arctan x + \frac{1}{x} > \frac{\pi}{2}.$$

证　设$f(x)=\arctan x+\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}(x>0)$，则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}<0,$$

故函数$f(x)$在$(0,+\infty)$内单调减少．又$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，于是

$$f(x)=\arctan x+\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}>0\quad(x>0),$$

即$\arctan x+\frac{1}{x}>\frac{\pi}{2}\quad(x>0)$．

24. (1999．Ⅰ)试证：当$x>0$时，

$$(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2.$$

证法一　令$\varphi(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2(x>0)$，易知$\varphi(1)=0$．由于

$$\varphi'(x)=2x\ln x-x+2-\frac{1}{x},\varphi'(1)=0,$$

$$\varphi''(x)=2\ln x+1+\frac{1}{x^2},$$

$$\varphi'''(x)=\frac{2(x^2-1)}{x^3},$$

故当$0<x<1$时，$\varphi'''(x)<0$；当$1<x<+\infty$时，$\varphi'''(x)>0$，从而$\varphi''(x)$在$x=1$处取得最小值，而$\varphi''(1)=2>0$，故当$x\in(0,+\infty)$时，$\varphi''(x)>0$，从而$\varphi'(x)$在$(0,+\infty)$内单调增加．

又$\varphi'(1)=0$，故当$0<x<1$时，$\varphi'(x)<0$；当$1<x<+\infty$时，$\varphi'(x)>0$．从而$\varphi(x)$在$x=1$处取得最小值，而$\varphi(1)=0$，故$\varphi(x)\geqslant0$，即当$x>0$时，$(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$．

证法二　令$\varphi(x)=\ln x-\frac{x-1}{x+1}(x>0)$，则

$$\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+1}{x(x+1)^2}>0\quad(x>0),$$

从而$\varphi(x)$在$(0,+\infty)$内单调增加，而$\varphi(1)=0$，所以当$0<x<1$时，$\varphi(x)<0$；当$1<x<+\infty$时，$\varphi(x)>0$．于是当$x>0$时，

$$(x^2-1)\varphi(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2\geqslant0,$$

即$(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$．

进一步，我们还可以证明：当$x>0$时，$(x^2-1)\ln x\geqslant2(x-1)^2$．

事实上，令$\varphi(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$，则$\varphi(1)=0$，且$\varphi'(x)=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0$，$x\neq1$．所以当$0<x<1$时，$\varphi(x)<0$；当$1<x<+\infty$时，$\varphi(x)>0$．故当$x>0$时，$(x-1)\varphi(x)\geqslant0$，即有$(x^2-1)\ln x\geqslant2(x-1)^2$．

25. (2005. Ⅲ, Ⅳ) 设 $f(x) = x\sin x + \cos x$, 下列命题中正确的是(　　).

(A) $f(0)$ 是极大值, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 是极小值

(B) $f(0)$ 是极小值, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 是极大值

(C) $f(0)$ 是极大值, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 也是极大值

(D) $f(0)$ 是极小值, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 也是极小值

解　由于 $f'(x) = \sin x + x\cos x - \sin x = x\cos x$, $f''(x) = \cos x - x\sin x$, $f'(0) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $f''(0) = 1 > 0$, $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0$, 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极小值, 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处取得极大值, 应选(B).

26. (2001. Ⅱ) 设 $\rho = \rho(x)$ 是抛物线 $y = \sqrt{x}$ 上任一点 $M(x, y)$ $(x \geqslant 1)$ 处的曲率半径, $s = s(x)$ 是该抛物线上介于点 $A(1, 1)$ 与 M 之间的弧长, 计算 $3\rho \frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}s^2} - \left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right)^2$ 的值. $\left(\text{在直角坐标系下曲率公式为 } K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.\right)$

解　$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $y'' = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$, 所以抛物线在点 $M(x, y)$ 处的曲率半径

$$\rho = \rho(x) = \frac{1}{K} = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} = \frac{1}{2}(4x + 1)^{\frac{3}{2}},$$

抛物线上 $\overset{\frown}{AM}$ 的弧长

$$s = s(x) = \int_1^x \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^x \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\,\mathrm{d}x.$$

由参数方程求导公式得

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s} = \frac{\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}(4x + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot 4}{\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}} = 6\sqrt{x},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right)\frac{1}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}} = \frac{6}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}} = \frac{6}{\sqrt{4x + 1}},$$

从而

$$3\rho \frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}s^2} - \left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right)^2 = \frac{3}{2}(4x + 1)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{6}{\sqrt{4x + 1}} - 36x = 9.$$

27. （1990. Ⅲ）在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的第一象限部分上求一点$P$,使该点处的切线、椭圆及两坐标轴所围图形的面积为最小（其中$a>0,b>0$）.

解　设所求点为$P(x_0,y_0)$,则该点处的切线方程为

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1,$$

图形面积为

$$S=\frac{a^2b^2}{2x_0y_0}-\frac{1}{4}\pi ab,\quad x_0\in(0,a).$$

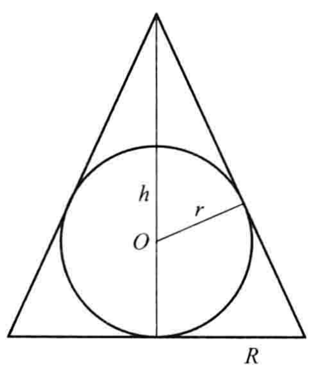
设$A=x_0y_0=\frac{b}{a}x_0\sqrt{a^2-x_0^2}$,则

$$A'(x_0)=\frac{b}{a}\left(\sqrt{a^2-x_0^2}-\frac{x_0^2}{\sqrt{a^2-x_0^2}}\right)=\frac{b(a^2-2x_0^2)}{a\sqrt{a^2-x_0^2}}.$$

由$A'(x_0)=0$,得$x_0=\frac{a}{\sqrt{2}}$,易知$\frac{a}{\sqrt{2}}$为A的极大值点,即S的极小值点,也是S的最小值点,此时,$y_0=\frac{b}{\sqrt{2}}$.故所求点为$P\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$时,所围图形面积最小.

28. （1993. Ⅲ）作半径为r的球的外切正圆锥,问此圆锥的高h为何值时,其体积最小,并求出该最小值.

解　设圆锥的底面圆半径为R（见图研2-1）,则有



图研 2-1

$$Rh=(R+\sqrt{R^2+h^2})r,$$

解得

$$R=\frac{rh}{\sqrt{h^2-2hr}},$$

于是圆锥的体积为

$$V(h)=\frac{\pi}{3}R^2h=\frac{\pi r^2}{3}\ \frac{h^2}{h-2r},\quad 2r<h<+\infty .$$

由

$$V'(h)=\frac{\pi r^2}{3}\ \frac{h^2-4rh}{(h-2r)^2}$$

可得 $V(h)$ 在 $(2r,+\infty)$ 内的惟一驻点 $h=4r$，当 $h=4r$ 时，V 取最小值，$V(4r)=\frac{8\pi r^3}{3}$.

29. (1994. Ⅲ) 设 $y=\frac{x^3+4}{x^2}$，求

(1) 函数的增减区间及极值；(2) 函数图像的凹凸区间及拐点；

(3) 渐近线；(4) 作出其图形.

解 定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 当 $x=-\sqrt[3]{4}$ 时，$y=0$.

(1) 设 $f(x)=\frac{x^3+4}{x^2}$，则 $f'(x)=1-\frac{8}{x^3}$，故驻点为 $x=2$. 又

x	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	-	0	+
$y=f(x)$ 的图形	↗	↘	(2,3)	↗

所以，$(-\infty,0)$ 及 $(2,+\infty)$ 为增区间，$(0,2)$ 为减区间，$x=2$ 为极小值点，极小值为 $f(2)=3$.

(2) $f''(x)=\frac{24}{x^4}>0$，故 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 均为凹区间，图像无拐点.

(3) 因

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+4}{x^2}=+\infty ,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^3}=1=a,$$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2}-x\right)=0=b,$$

所以，$x=0$ 为铅直渐近线，$y=x$ 为斜渐近线.

(4) 图形见图研 2－2.

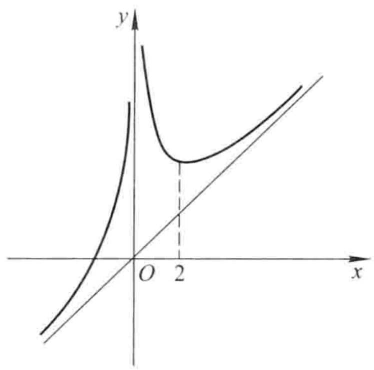
30. (1993. Ⅴ) 已知某厂生产 x 件产品的成本为

$$C=25\,000+200x+\frac{1}{40}x^2\text{（元）},$$

问：(1) 要使平均成本最小，应生产多少件产品？

(2) 若产品以每件 500 元售出，要使利润最大，应生产多少件产品？

解 (1) 设平均成本为 y，则



图研 2 - 2

$$y=\frac{25\,000}{x}+200+\frac{x}{40}.$$

由 $y'=-\frac{25\,000}{x^2}+\frac{1}{40}=0$，得 $x_1=1\,000$，$x_2=-1\,000$（舍去）. 因为 $y''|_{x=1\,000}=5\cdot 10^{-5}>0$，所以当 $x=10^3$ 时，y 取得极小值，也是最小值，因此，要使平均成本最小，应生产 1 000 件产品.

（2）利润函数为

$$L=500x-\left(25\,000+200x+\frac{x^2}{40}\right)=300x-\frac{x^2}{40}-25\,000,$$

由 $L'=300-\frac{x}{20}=0$，得 $x=6\,000$. 因 $L''|_{x=6\,000}=-\frac{1}{20}<0$，所以当 $x=6\,000$ 时，L 取得极大值，也是最大值，因此，要使利润最大，应生产 6 000 件产品.

（三）一元函数积分学

1. (2006.Ⅱ)设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^3}\displaystyle\int_0^x \sin t^2\mathrm{d}t, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$________.

解 $$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x \sin t^2\mathrm{d}t}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{3x^2}=\frac{1}{3},$$

因此，$a=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\dfrac{1}{3}$.

2. (1999.Ⅱ)设 $\alpha(x)=\displaystyle\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，$\beta(x)=\displaystyle\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t$，则当 $x\to0$ 时，$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的（　　）.

(A) 高阶无穷小　　(B) 低阶无穷小

(C) 同阶但不等价的无穷小　　(D) 等价无穷小

解 由于

$$\lim_{x\to0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t}{\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0}\frac{5\cdot\frac{\sin 5x}{5x}}{\cos x\cdot(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}}=\frac{5}{\mathrm{e}},$$

故选(C).

3. (2006.Ⅱ)设 $f(x)$ 是奇函数，除 $x=0$ 外处处连续，$x=0$ 是其第一类间断点，则 $\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是（　　）.

(A) 连续的奇函数　　(B) 连续的偶函数

(C) 在 $x=0$ 间断的奇函数　　(D) 在 $x=0$ 间断的偶函数

解 对于任意的 x_0，存在 $a>0$，使得 $x_0\in(-a,a)$，由条件可知 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上有界，设 $|f(x)|<M_a(x\in[-a,a])$，记 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，当 $x_0+\Delta x\in[-a,a]$ 时，有

$$|F(x_0+\Delta x)-F(x_0)|=\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t\right|<M_a|\Delta x|,$$

故 $\Delta x\to0$ 时，$F(x_0+\Delta x)-F(x_0)\to0$，即 $F(x)$ 在 x_0 处连续. 又

$$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t\xlongequal{t=-u}\int_0^x -f(-u)\mathrm{d}u=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=F(x),$$

所以 $F(x)$ 是连续的偶函数，故选(B).

4. （1993. Ⅰ，Ⅱ）求 $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$.

解　令 $u=\sqrt{e^x-1}$，即 $x=\ln(u^2+1)$，因此有

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx=\int 2\ln(u^2+1)du=2u\ln(u^2+1)-2\int \frac{2u^2}{u^2+1}du$$

$$=2u\ln(u^2+1)-4u+4\arctan u+C$$

$$=2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C.$$

5. （1994. Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ）求 $\int \frac{dx}{\sin(2x)+2\sin x}$.

解法一

$$\int \frac{dx}{\sin(2x)+2\sin x}=\int \frac{dx}{2\sin x(\cos x+1)}=\int \frac{d(\cos x)}{2(\cos^2 x-1)(\cos x+1)}$$

$$\xlongequal{u=\cos x}\int \frac{du}{2(u^2-1)(u+1)}$$

$$=-\frac{1}{8}\int\left[\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}+\frac{2}{(1+u)^2}\right]du$$

$$=-\frac{1}{8}\left[-\ln(1-u)+\ln(1+u)-\frac{2}{1+u}\right]+C$$

$$=-\frac{1}{8}\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x}+\frac{1}{4(1+\cos x)}+C.$$

解法二

$$\int \frac{dx}{\sin(2x)+2\sin x}=\int \frac{dx}{2\sin x(\cos x+1)}=\frac{1}{4}\int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\int \frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\int \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}d\left(\tan\frac{x}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

6. （1989. Ⅲ）已知 $f(2)=\frac{1}{2}$，$f'(2)=0$ 及 $\int_0^2 f(x)dx=1$，求 $\int_0^1 x^2f''(2x)dx$.

解　令 $t=2x$，则

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 f''(2x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{8}\int_0^2 t^2 f''(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\int_0^2 t^2 \mathrm{d}[f'(t)] \\ &= \frac{1}{8}[t^2 f'(t)]_0^2 - \frac{1}{4}\int_0^2 tf'(t)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{4}\int_0^2 t\mathrm{d}[f(t)] \\ &= -\frac{1}{4}[tf(t)]_0^2 + \frac{1}{4}\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=0.\end{aligned}$$

7. (1995. Ⅲ)设 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t}\mathrm{d}t$,计算 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x &= [xf(x)]_0^\pi - \int_0^\pi xf'(x)\mathrm{d}x \\ &= \pi\int_0^\pi \frac{\sin t}{\pi - t}\mathrm{d}t - \int_0^\pi \frac{x\sin x}{\pi - x}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi \frac{(\pi - x)\sin x}{\pi - x}\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x = 2.\end{aligned}$$

8. (1998. Ⅱ)计算积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}}$.

解　注意到 $x=1$ 是被积函数的瑕点,而

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} = [\arcsin(2x-1)]_{\frac{1}{2}}^{1} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x}} = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}} = \left[\ln\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right)\right]_1^{\frac{3}{2}} = \ln(2+\sqrt{3}).$$

因此

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}} + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x}} = \frac{\pi}{2}+\ln(2+\sqrt{3}).$$

9. (2005. Ⅱ)设函数 $f(x)$ 连续,且 $f(0)\neq 0$,求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}.$$

解　$\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t \xlongequal{t=x-u} \int_x^0 -f(u)\mathrm{d}u = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$

因此

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x tf(t)\,dt}{x\int_0^x f(t)\,dt}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,dt + xf(x) - xf(x)}{\int_0^x f(t)\,dt + xf(x)}$$

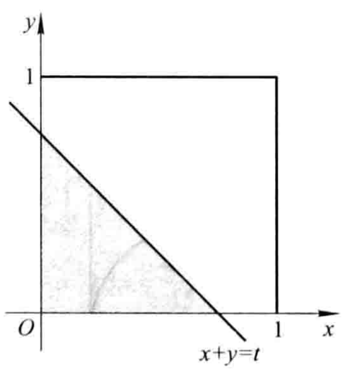
$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)\,dt}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\int_0^x f(t)\,dt}{x} + f(x)\right]}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0} f(x)}{\lim\limits_{x\to 0} f(x) + f(0)} = \frac{1}{2}.$$

10. (2000.Ⅱ)设 xOy 平面上有正方形 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$ 及直线 $l: x+y=t(t\geqslant 0)$. 若 $S(t)$ 表示正方形 D 位于直线 l 左下方部分的面积，试求 $\int_0^x S(t)\,dt(x\geqslant 0)$.

解　如图研 3－1 可知，

$$S(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}t^2, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ -\dfrac{1}{2}t^2+2t-1, & 1<t\leqslant 2,\\ 1, & t>2,\end{cases}$$



图研 3－1

所以当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$\int_0^x S(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{2}t^2\,dt = \frac{1}{6}x^3$；

当 $1<x\leqslant 2$ 时，$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 S(t)\mathrm{d}t+\int_1^x\left(-\frac{1}{2}t^2+2t-1\right)\mathrm{d}t$

$$=-\frac{1}{6}x^3+x^2-x+\frac{1}{3};$$

当 $x>2$ 时，$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\int_0^2 S(t)\mathrm{d}t+\int_2^x \mathrm{d}t=x-1.$

因此

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\frac{1}{6}x^3, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -\frac{1}{6}x^3+x^2-x+\frac{1}{3}, & 1<x\leqslant 2,\\ x-1, & x>2.\end{cases}$$

11. (1992. Ⅲ)求曲线 $y=\sqrt{x}$的一条切线 l,使该曲线与切线 l 及直线$x=0$,$x=2$ 所围成图形面积最小.

解　由 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$,得曲线在$(t,\sqrt{t})$处的切线方程为

$$y-\sqrt{t}=\frac{1}{2\sqrt{t}}(x-t),$$

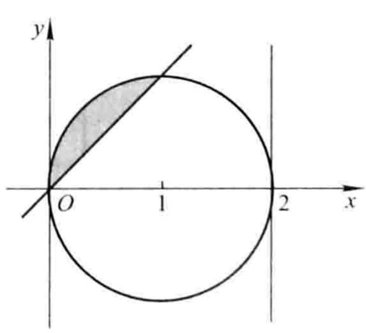
即 $y=\frac{1}{2\sqrt{t}}x+\frac{\sqrt{t}}{2}$. 所围面积为

$$S(t)=\int_0^2\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}x+\frac{\sqrt{t}}{2}-\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t}-\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

令 $S'(t)=0$,得 $t=1$,又 $S''(1)=\frac{1}{2}>0$. 故当 $t=1$ 时,面积取极小值,由于驻点惟一,因此 $t=1$ 是最小值点,此时 l 的方程为 $y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$.

12. (1993. Ⅲ)设平面图形 A 由 $x^2+y^2\leqslant 2x$ 与 $y\geqslant x$ 所确定,求图形 A 绕直线 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积.

解　A 的图形如图研 3－2,取 y 为积分变量,则 y 的变化范围为[0,1]. 相应于



图研 3－2

$[0,1]$上的任一小区间$[y,y+\mathrm{d}y]$的体积元素为

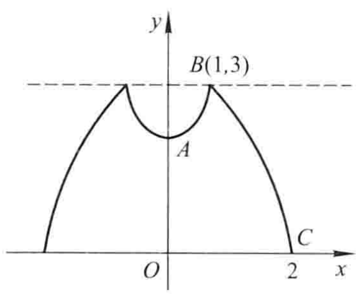
$$\begin{aligned}\mathrm{d}V&=\{\pi[2-(1-\sqrt{1-y^2})]^2-\pi(2-y)^2\}\,\mathrm{d}y\\&=2\pi[\sqrt{1-y^2}-(y-1)^2]\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

因此所求体积为

$$\begin{aligned}V&=\int_0^1 2\pi[\sqrt{1-y^2}-(y-1)^2]\,\mathrm{d}y\\&=2\pi\left[\frac{y}{2}\sqrt{1-y^2}+\frac{1}{2}\arcsin y+\frac{(1-y)^3}{3}\right]_0^1\\&=\frac{\pi^2}{2}-\frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

13. (1994.Ⅲ)求曲线 $y=3-|x^2-1|$ 与 x 轴围成的封闭图形绕直线 $y=3$ 旋转所得的旋转体体积.

解　如图研 3－3,曲线$\widehat{AB}$的方程为 $y=x^2+2(0\leqslant x\leqslant 1)$,$\widehat{BC}$的方程为 $y=4-x^2$ $(1\leqslant x\leqslant 2)$.



图研 3－3

取 x 为积分变量,记相应于区间$[0,1]$和$[1,2]$上的体积分别为 V_1 和 V_2,则它们的体积元素分别为

$$\mathrm{d}V_1=\pi\{3^2-[3-(x^2+2)]^2\}\,\mathrm{d}x=\pi(8+2x^2-x^4)\,\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}V_2=\pi\{3^2-[3-(4-x^2)]^2\}\,\mathrm{d}x=\pi(8+2x^2-x^4)\,\mathrm{d}x.$$

由对称性得

$$\begin{aligned}V&=2(V_1+V_2)=2\pi\int_0^1(8+2x^2-x^4)\,\mathrm{d}x+2\pi\int_1^2(8+2x^2-x^4)\,\mathrm{d}x\\&=2\pi\int_0^2(8+2x^2-x^4)\,\mathrm{d}x=\frac{448}{15}\pi.\end{aligned}$$

14. (1991.Ⅰ,Ⅱ)设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,$(0,1)$内可导,且 $3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x=f(0)$,证明在$(0,1)$内存在一点 c,使 $f'(c)=0$.

解　由积分中值定理知,在$\left[\frac{2}{3},1\right]$上存在一点 c_1,使

$$\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}f(c_1),$$

从而有 $f(c_1)=f(0)$，故 $f(x)$ 在区间 $[0,c_1]$ 上满足罗尔定理条件，因此在 $(0,c_1)$（$\subset(0,1)$）内存在一点 c，使 $f'(c)=0$，证毕.

15. （1993. Ⅲ）设 $f'(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，且 $f(0)=0$，证明：$\left|\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \dfrac{Ma^2}{2}$，其中 $M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant a}|f'(x)|$.

解　由微分中值定理可知：对于任意 $x\in[0,a]$，存在 $\xi\in(0,x)$，使得 $f(x)-f(0)=f'(\xi)x$，由条件 $f(0)=0$ 得 $f(x)=f'(\xi)x$，因此有

$$\left|\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^a |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^a |f'(\xi)x|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^a Mx\,\mathrm{d}x = \frac{Ma^2}{2}.$$

16. （1999. Ⅱ）设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数，$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

解　由于 $f(x)$ 单调减少，因此

$$f(k+1)\leqslant \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(k)\quad (k=1,2,\cdots),$$

因此有

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\left[f(k) - \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x\right] + f(n) \geqslant 0, \end{aligned}$$

即数列 $\{a_n\}$ 有下界. 又

$$a_{n+1}-a_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0,$$

即得数列 $\{a_n\}$ 单调减少，由单调有界数列必有极限的准则知数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

17. （2004. Ⅱ）设 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,\mathrm{d}t$，(1) 证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数；(2) 求 $f(x)$ 的值域.

解　(1) $f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\frac{3\pi}{2}}|\sin t|\,\mathrm{d}t$，设 $t=u+\pi$，则有

$$f(x+\pi)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin(u+\pi)|\,\mathrm{d}u=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin u|\,\mathrm{d}u=f(x),$$

故 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数.

(2) 因为 $|\sin x|$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，注意到 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数，故只需在 $[0,\pi]$ 上讨论 $f(x)$ 的值域. 因为

$$f'(x)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|-|\sin x|=|\cos x|-|\sin x|,$$

令 $f'(x)=0$,解得 $x_1=\dfrac{\pi}{4}, x_2=\dfrac{3\pi}{4}$,且

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin t\,\mathrm{d}t=\sqrt{2},$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}|\sin t|\,\mathrm{d}t=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t-\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\sin t\,\mathrm{d}t=2-\sqrt{2}.$$

又

$$f(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,\mathrm{d}t=1,\quad f(\pi)=\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}(-\sin t)\,\mathrm{d}t=1,$$

因而 $f(x)$ 的最小值是 $2-\sqrt{2}$,最大值是 $\sqrt{2}$,故 $f(x)$ 的值域是 $[2-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

18. (2002. Ⅰ,Ⅱ)设

$$f(x)=\begin{cases}2x+\dfrac{3}{2}x^2, & -1\leqslant x<0,\\ \dfrac{xe^x}{(e^x+1)^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

求函数 $F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t$ 的表达式.

解 当 $-1\leqslant x<0$ 时,

$$F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^{x}\left(2t+\frac{3}{2}t^2\right)\mathrm{d}t$$
$$=\left[t^2+\frac{1}{2}t^3\right]_{-1}^{x}=\frac{1}{2}x^3+x^2-\frac{1}{2}.$$

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,

$$F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^{0}\left(2t+\frac{3}{2}t^2\right)\mathrm{d}t+\int_0^x\frac{te^t}{(e^t+1)^2}\mathrm{d}t$$
$$=\left[t^2+\frac{1}{2}t^3\right]_{-1}^{0}-\int_0^x t\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{e^t+1}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}-\left[\frac{t}{e^t+1}\right]_0^x+\int_0^x\frac{1}{e^t+1}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}+\int_0^x\frac{-1}{1+e^{-t}}\mathrm{d}(e^{-t})$$
$$=-\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}-\left[\ln(1+e^{-t})\right]_0^x=-\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}-\ln(1+e^{-x})+\ln 2.$$

因此

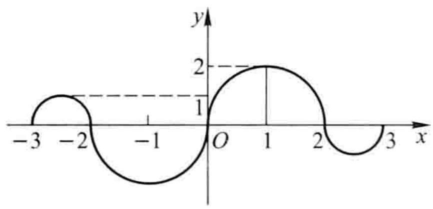
$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^3+x^2-\dfrac{1}{2}, & -1\leqslant x<0,\\ -\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{e^x+1}-\ln\dfrac{1+e^{-x}}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

19. (2007. Ⅰ,Ⅲ)如图研 3-4,连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2]$,$[2,3]$ 上的图

形分别是直径为 1 的上、下半圆周，在区间 $[-2,0]$，$[0,2]$ 的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周，设 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$，则下列结论正确的是（　　）.

(A) $F(3)=-\frac{3}{4}F(-2)$　　(B) $F(3)=\frac{5}{4}F(2)$

(C) $F(-3)=\frac{3}{4}F(2)$　　(D) $F(-3)=-\frac{5}{4}F(-2)$



图研 3－4

解　根据定积分的几何意义，有

$$F(2)=\frac{1}{2}\pi,$$

$$F(3)=\int_0^2 f(t)\,dt+\int_2^3 f(t)\,dt=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}\pi,$$

$$F(-2)=\int_0^{-2}f(x)\,dx=-\int_{-2}^0 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\pi,$$

$$F(-3)=\int_0^{-3}f(x)\,dx=-\left[\int_{-3}^{-2}f(x)\,dx+\int_{-2}^0 f(x)\,dx\right]=-\left[\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\pi\right]=\frac{3}{8}\pi.$$

故选(C).

20. (2007. Ⅰ) $\int_1^2\frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}\,dx=$ ________.

解　作换元 $x=\frac{1}{t}$，则

$$\int_1^2\frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}\,dx=\int_{\frac{1}{2}}^1 te^t\,dt=\left[te^t-e^t\right]_{\frac{1}{2}}^1=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}.$$

21. (2008. Ⅰ) 设 $f(x)$ 是连续函数.

(1) 利用定义证明函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ 可导，且 $F'(x)=f(x)$；

(2) 当 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数时，证明函数 $G(x)=2\int_0^x f(t)\,dt-x\int_0^2 f(t)\,dt$ 也是以 2 为周期的周期函数.

证　(1) $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_0^{x+\Delta x}f(t)\,dt-\int_0^x f(t)\,dt}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x}f(t)\,dt}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x),$$

因此 $F(x)$ 可导,且 $F'(x) = f(x)$.

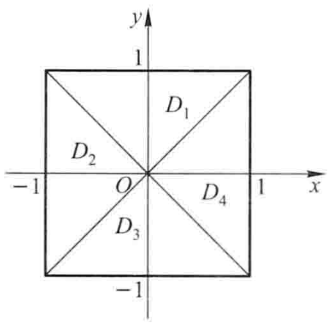
$$(2)\ G(x+2) - G(x) = 2\left(\int_0^{x+2} f(t)\,dt - \int_0^{x} f(t)\,dt\right) - 2\int_0^2 f(t)\,dt$$

$$= 2\int_x^{x+2} f(t)\,dt - 2\int_0^2 f(t)\,dt,$$

由于 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数,故必有 $\int_x^{x+2} f(t)\,dt = \int_0^2 f(t)\,dt$, 因此 $G(x+2) - G(x) = 0$,即 $G(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

22. (2009. Ⅰ)如图研 3-5,正方形 $\{(x,y) \mid |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\}$ 被其对角线划分为四个区域 $D_k(k=1,2,3,4)$, $I_k = \iint\limits_{D_k} y\cos x\,dx\,dy$,则 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 4}\{I_k\} =$ (　　).

(A) I_1　　(B) I_2　　(C) I_3　　(D) I_4



图研 3-5

解　记 D_1^* 和 D_3^* 为 D_1 和 D_3 中 $x \geqslant 0$ 部分的区域,利用二重积分区域的对称性及被积函数的奇偶性,可得

$$I_2 = I_4 = 0,$$

$$I_1 = 2\iint\limits_{D_1^*} y\cos x\,dx\,dy > 0, \quad I_3 = 2\iint\limits_{D_3^*} y\cos x\,dx\,dy < 0.$$

故选(A).

23. (2010. Ⅰ)设 $x = e^{-t}$, $y = \int_0^t \ln(1+u^2)\,du$,则 $\left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{t=0} =$ ________.

解
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -e^t \ln(1+t^2),$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left[-e^t\ln(1+t^2)\right] \Big/ \frac{dx}{dt} = e^{2t}\left[\ln(1+t^2) + \frac{2t}{1+t^2}\right],$$

于是$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=0.$

24. (2010. Ⅰ) $\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}dx=$ ________.

解　作换元 $x=u^2$,则

$$\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}dx=\int_0^{\pi}2u^2\cos u du=[2u^2\sin u+4u\cos u-4\sin u]_0^{\pi}=-4\pi.$$

25. (2010. Ⅰ)求$f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt$的单调区间与极值.

解　$$f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt=x^2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt-\int_1^{x^2}te^{-t^2}dt,$$

令$f'(x)=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt=0$,得$x=-1,0,1.$

在$(-\infty,-1)$和$(0,1)$上可得$f'(x)<0$,因此$f(x)$在$(-\infty,-1]$和$[0,1]$上单调减少;在$(-1,0)$和$(1,+\infty)$上可得$f'(x)>0$,因此$f(x)$在$[-1,0]$和$[1,+\infty)$上单调增加.

又$f''(x)=2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt+4x^2e^{-x^4}$,得

$$f''(\pm1)=4e^{-1}>0,\quad f''(0)=-2\int_0^1e^{-t^2}dt<0,$$

所以$x=-1$和$x=1$为$f(x)$的极小值点,极小值为$f(\pm1)=0$;$x=0$为$f(x)$的极大值点,极大值为$f(0)=-\int_1^0te^{-t^2}dt=\int_0^1te^{-t^2}dt=\left[-\dfrac{1}{2}e^{-t^2}\right]_0^1=\dfrac{e-1}{2e}.$

26. (2010. Ⅰ,Ⅲ)(1) 比较$\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^ndt$与$\int_0^1t^n|\ln t|dt(n=1,2,\cdots)$;

(2) 记$u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^ndt(n=1,2,\cdots)$,求$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

解　(1) 当$0\leqslant t\leqslant1$时,$0\leqslant\ln(1+t)\leqslant t$,故$|\ln t|[\ln(1+t)]^n\leqslant t^n|\ln t|$,于是

$$\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^ndt\leqslant\int_0^1t^n|\ln t|dt.$$

(2) 由(1)得

$$0\leqslant\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^ndt\leqslant\int_0^1t^n|\ln t|dt,$$

而

$$\int_0^1t^n|\ln t|dt=-\int_0^1t^n\ln tdt=-\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\left(\ln t-\frac{1}{n+1}\right)\right]_0^1=\frac{1}{(n+1)^2},$$

由夹逼准则得$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0.$

27. (2011. Ⅰ)设$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin xdx$,$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot xdx$,$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos xdx$,则$I,J,K$的大

小关系是(　　).

(A) $I<J<K$　　(B) $I<K<J$　　(C) $J<I<K$　　(D) $K<J<I$

解　当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$时,$0<\sin x<\cos x<\cot x$,因此 $\ln\sin x<\ln\cos x<\ln\cot x$. 故选(B).

28. (2011. Ⅰ)曲线 $y=\int_0^x \tan t\mathrm{d}t\left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right)$的弧长 $s=$ ________.

解
$$s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x\mathrm{d}x$$
$$=\left[\ln(\sec x+\tan x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln(\sqrt{2}+1).$$

29. (2012. Ⅰ)设 $I_k=\int_{\mathrm{e}}^{k\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x(k=1,2,3)$,则有(　　).

(A) $I_1<I_2<I_3$　　(B) $I_3<I_2<I_1$

(C) $I_2<I_3<I_1$　　(D) $I_2<I_1<I_3$

解
$$I_2-I_1=\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x<0,I_3-I_2=\int_{2\pi}^{3\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x>0,$$
$$I_3-I_1=\int_{\pi}^{3\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x=\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x+\int_{2\pi}^{3\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x,$$
对 $\int_{2\pi}^{3\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x$ 作换元 $x=\pi+u$,得
$$\int_{2\pi}^{3\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x=-\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{e}^{(u+\pi)^2}\sin u\mathrm{d}u=-\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{e}^{(x+\pi)^2}\sin x\mathrm{d}x,$$
因此
$$I_3-I_1=\int_{\pi}^{2\pi}\left[\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{(x+\pi)^2}\right]\sin x\mathrm{d}x>0.$$
故选(D).

30. (2012. Ⅰ) $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x=$ ________.

解　作换元 $x=1+\sin u$,则
$$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin u)\cos^2 u\mathrm{d}u$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}.$$

（四）微分方程

1. （1999. Ⅰ，Ⅱ）$y''-4y=e^{2x}$的通解为________.

解　此方程对应的齐次方程的特征方程为$r^2-4=0$，其根为$r_{1,2}=\pm 2$. 又因自由项$f(x)=e^{2x}$，$\lambda=2$是特征方程的单根，故令$y^*=Axe^{2x}$是原方程的特解，代入方程可得$A=\frac{1}{4}$，于是原方程的通解为

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+\frac{x}{4}e^{2x}.$$

2. （2000. Ⅰ）微分方程$xy''+3y'=0$的通解为________.

解　原方程可变形为$\frac{dy'}{y'}=-\frac{3}{x}dx$，积分得$\ln y'=-3\ln x+\ln C_0$，

即$y'=\frac{C_0}{x^3}$. 故

$$y=-\frac{C_0}{2}\frac{1}{x^2}+C_2=\frac{C_1}{x^2}+C_2.$$

3. （2001. Ⅰ）设$y=e^x(C_1\sin x+C_2\cos x)$（$C_1,C_2$为任意常数）为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解，则该微分方程为________.

解　由所给通解的表达式知，$r_{1,2}=1\pm i$是所求微分方程的特征方程的根，于是特征方程为$r^2-2r+2=0$，故所求微分方程为

$$y''-2y'+2y=0.$$

4. （2001. Ⅱ）过点$\left(\frac{1}{2},0\right)$且满足关系式$y'\arcsin x+\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}=1$的曲线方程为________.

解　将所给关系式改写成$y'+\frac{1}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}y=\frac{1}{\arcsin x}$，由一阶线性微分方程的通解公式，得

$$y=e^{-\int\frac{dx}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}}\left(\int\frac{1}{\arcsin x}e^{\int\frac{dx}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}}dx+C\right),$$

即

$$y=\frac{1}{\arcsin x}(x+C),$$

代入初值条件$x=\frac{1}{2}$，$y=0$，得$C=-\frac{1}{2}$，故所求曲线的方程为

$$y=\frac{x-\dfrac{1}{2}}{\arcsin x}.$$

5. （2002. Ⅰ，Ⅱ）微分方程 $yy''+y'^2=0$ 满足初值条件 $y\Big|_{x=0}=1, y'\Big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$ 的特解是________.

解　令 $y'=p$，则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，且原方程成为 $yp\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p^2=0$，即

$$p=0 \quad 或 \quad y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p=0.$$

由于 $p=0$ 不满足条件 $y'\Big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$，故取 $y\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p=0$. 分离变量后积分得

$$p=\frac{C_1}{y},$$

代入初值条件 $y\Big|_{x=0}=1, p\Big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$，得 $C_1=\dfrac{1}{2}$，即

$$y'=\frac{1}{2y},$$

分离变量后积分得 $y^2=x+C_2$，代入初值条件 $y\Big|_{x=0}=1$，得 $C_2=1$. 于是有 $y^2=x+1$，解得特解

$$y=\sqrt{x+1}.$$

***6.** （2004. Ⅰ）欧拉方程 $x^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+4x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=0(x>0)$ 的通解为________.

解　令 $x=\mathrm{e}^t$，记 $\mathrm{D}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，则原方程成为

$$\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)y+4\mathrm{D}y+2y=0.$$

特征方程是 $r(r-1)+4r+2=0$，解得特征根是 $r_1=-1, r_2=-2$，故得通解 $y=C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2\mathrm{e}^{-2t}$，于是原方程的通解为

$$y=\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^2}.$$

7. （2004. Ⅱ）微分方程 $(y+x^3)\mathrm{d}x-2x\mathrm{d}y=0$ 满足 $y\Big|_{x=1}=\dfrac{6}{5}$ 的特解为________.

解　原方程变形为一阶线性方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{2x}y=\frac{x^2}{2},$$

解得

$$y=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{2x}\mathrm{d}x}\left(\int\frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{2x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$= \frac{1}{5}x^3 + C\sqrt{x}.$$

由 $y\Big|_{x=1} = \frac{6}{5}$ 得 $C = 1$，故特解为

$$y = \frac{1}{5}x^3 + \sqrt{x}.$$

8. (2005. Ⅰ,Ⅱ)微分方程 $xy' + 2y = x\ln x$ 满足 $y\Big|_{x=1} = -\frac{1}{9}$ 的特解为________.

解　原方程变形为一阶线性方程

$$y' + \frac{2}{x}y = \ln x,$$

解得

$$y = e^{-\int \frac{2}{x}dx}\left(\int \ln x\, e^{\int \frac{2}{x}dx}dx + C\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C\right).$$

由 $y\Big|_{x=1} = -\frac{1}{9}$，得 $C = 0$，故特解为

$$y = \frac{x}{3}\left(\ln x - \frac{1}{3}\right).$$

9. (2009. Ⅰ)若二阶常系数齐次线性微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^x$，则非齐次方程 $y'' + ay' + by = x$ 满足条件 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ 的解为 $y =$________.

解　由常系数线性齐次微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^x$ 可知 $y_1 = e^x, y_2 = xe^x$ 为齐次微分方程的两个线性无关的解. 可见齐次方程的特征方程是 $(r-1)^2 = r^2 - 2r + 1 = 0$，故齐次微分方程为 $y'' - 2y' + y = 0$.

设非齐次方程 $y'' - 2y' + y = x$ 的特解为 $y^* = Ax + B$，代入方程 $y'' - 2y' + y = x$，解得 $A = 1, B = 2$，即 $y^* = x + 2$. 故 $y'' - 2y' + y = x$ 的通解为

$$y = (C_1 + C_2x)e^x + x + 2,$$

且

$$y' = (C_1 + C_2 + C_2x)e^x + 1.$$

代入初值条件 $y(0) = 2, y'(0) = 0$，得 $C_1 = 0, C_2 = -1$. 因此所求的解为 $y = -xe^x + x + 2$.

10. (2011. Ⅰ)微分方程 $y' + y = e^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的解为 $y =$________.

解　原方程的通解为

$$y = e^{-\int 1dx}\left[\int e^{-x}\cos x e^{\int 1dx}dx + C\right] = e^{-x}\left[\int \cos x dx + C\right] = e^{-x}[\sin x + C],$$

由 $y(0) = 0$，得 $C = 0$，故所求解为 $y = \sin x e^{-x}$.

11. (1989. Ⅰ，Ⅱ)设线性无关的函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶非齐次方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$$

的解，C_1,C_2 是任意常数，则该非齐次方程的通解是(　　).

(A) $C_1y_1+C_2y_2+y_3$　　(B) $C_1y_1+C_2y_2-(C_1+C_2)y_3$

(C) $C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$　　(D) $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$

解　因 y_1-y_3 与 y_2-y_3 是对应的齐次方程的解，且由 y_1,y_2,y_3 线性无关可推知 y_1-y_3 与 y_2-y_3 线性无关，而 y_3 是非齐次方程的特解，故

$$y=C_1(y_1-y_3)+C_2(y_2-y_3)+y_3=C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$$

是非齐次方程的通解，所以选择(D).

12. (1989. Ⅲ)微分方程 $y''-y=e^x+1$ 的一个特解应具有形式(式中 a,b 为常数)(　　).

(A) ae^x+b　　(B) axe^x+b　　(C) ae^x+bx　　(D) axe^x+bx

解　原方程对应的齐次方程的特征方程的根为 $r_{1,2}=\pm1$. 相对于方程 $y''-y=e^x$，因 $f_1(x)=e^x,\lambda=1$ 是特征方程的(单)根，故该方程的特解应形如 $y_1^*=axe^x$.

又相对于方程 $y''-y=1$，因 $f_2(x)=1,\lambda=0$ 不是特征方程的根，故该方程的特解应形如 $y_2^*=b$.

按叠加原理，原方程的特解应形如 $y^*=y_1^*+y_2^*=axe^x+b$. 故应选择(B).

13. (2008. Ⅰ)在下列微分方程中，以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$($C_1,C_2,C_3$ 为任意的常数)为通解的是(　　).

(A) $y'''+y''-4y'-4y=0$　　(B) $y'''+y''-4y'+4y=0$

(C) $y'''-y''-4y'+4y=0$　　(D) $y'''-y''+4y'-4y=0$

解　由 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$ 可知微分方程的特征方程的根为 $\lambda_1=1$，$\lambda_{2,3}=\pm2i$，故对应的特征方程为

$$\begin{aligned}(r-1)(r+2i)(r-2i)&=(r-1)(r^2+4)\\&=r^3-r^2+4r-4=0,\end{aligned}$$

所以微分方程为 $y'''-y''+4y'-4y=0$. 应选(D).

14. (1989. Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ)设 $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)\,dt$，其中 f 为连续函数，求 $f(x)$.

解　因 $f(x)=\sin x-x\int_0^x f(t)\,dt+\int_0^x tf(t)\,dt$，代入 $x=0$，得 $f(0)=0$，

且

$$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)\,dt.$$

代入 $x=0$，得 $f'(0)=1$. 又

$$f''(x)=-\sin x-f(x).$$

记 $y=f(x)$，即得初值问题

$$\begin{cases}y''+y=-\sin x,\\ y\big|_{x=0}=0,y'\big|_{x=0}=1.\end{cases}$$

上述微分方程对应的齐次方程的特征方程有根 $r_{1,2}=\pm\mathrm{i}$，而自由项为 $-\sin x$，$\lambda+\mathrm{i}\omega=\mathrm{i}$ 是特征方程的根，故令 $y^{*}=x(A\cos x+B\sin x)$ 是原方程的特解，代入微分方程并比较系数，得 $A=\dfrac{1}{2}$，$B=0$，即 $y^{*}=\dfrac{1}{2}x\cos x$. 于是得通解

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}x\cos x,$$

且

$$y'=-C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}x\sin x.$$

由 $y\big|_{x=0}=0$ 及 $y'\big|_{x=0}=1$，得

$$\begin{cases}C_1=0,\\ C_2+\dfrac{1}{2}=1,\end{cases}$$

即 $C_1=0$，$C_2=\dfrac{1}{2}$，故

$$y=f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}x\cos x.$$

15. (1991. Ⅰ，Ⅱ)在上半平面上求一条向下凸的曲线，其上任一点 $P(x,y)$ 处的曲率等于此曲线在该点的法线 PQ 长度的倒数(Q 是法线与 x 轴的交点)，且曲线在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴平行.

解　曲线 $y=y(x)$ 在点 $P(x,y)$ 处的法线方程为

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x).$$

令 $Y=0$，得点 Q 的坐标 $(x+yy',0)$，于是

$$|PQ|=\sqrt{(yy')^2+y^2}=|y|\sqrt{1+y'^2}.$$

依题意有

$$\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{|y|(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

因所求曲线在上半平面上且向下凸，有 $|y|=y$，$|y''|=y''$，故得微分方程

$$\frac{y''}{1+y'^2}=\frac{1}{y},$$

且由题设知 $y\big|_{x=1}=1$，$y'\big|_{x=1}=0$.

令 $y'=p$，则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，且微分方程降阶为

$$\frac{p\mathrm{d}p}{1+p^2}=\frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

由条件 $y=1$，$p=0$，积分 $\displaystyle\int_0^p\frac{p\mathrm{d}p}{1+p^2}=\int_1^y\frac{\mathrm{d}y}{y}$，得 $\dfrac{1}{2}\ln(1+p^2)=\ln y$，从而

$$p=\pm\sqrt{y^2-1},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2-1}}=\pm\,\mathrm{d}x.$$

积分得

$$\ln(y+\sqrt{y^2-1})=\pm x+C,$$

即 $y=\dfrac{\mathrm{e}^{x+C}+\mathrm{e}^{-(x+C)}}{2}$. 代入初值条件 $x=1,y=1$,得 $C=-1$,故

$$y=\frac{\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{-(x-1)}}{2}.$$

16. (1995. Ⅰ, Ⅱ)设曲线 L 位于 xOy 平面的第一象限内,L 上任一点 M 处的切线与 y 轴总相交,交点记为 A. 已知 $|MA|=|OA|$,且 L 过点 $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$,求 L 的方程.

解 设点 M 的坐标为 (x,y),则切线 MA 的方程为

$$Y-y=y'(X-x).$$

令 $X=0$,得 A 的坐标 $(0,y-xy')$.

因 $|MA|=|OA|$,故有

$$|y-xy'|=\sqrt{(x-0)^2+(y-y+xy')^2},$$

化简后得

$$2yy'-\frac{1}{x}y^2=-x.$$

即

$$(y^2)'-\frac{1}{x}y^2=-x.$$

由一阶线性方程的通解公式解得

$$y^2=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int -x\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=x(-x+C)=-x^2+Cx.$$

由于 L 位于第一象限,故取

$$y=\sqrt{Cx-x^2}.$$

代入初值条件 $x=\dfrac{3}{2},y=\dfrac{3}{2}$,得 $C=3$. 故 L 的方程为

$$y=\sqrt{3x-x^2}.$$

17. (1995. Ⅲ)设 $y=\mathrm{e}^x$ 是微分方程 $xy'+p(x)y=x$ 的一个解,求此微分方程满足条件 $y\big|_{x=\ln 2}=0$ 的特解.

解 将 $y=\mathrm{e}^x$ 代入原方程,可得

$$x\mathrm{e}^x+p(x)\mathrm{e}^x=x,$$

故

$$p(x) = xe^{-x} - x,$$

即原方程对应的齐次方程为 $xy' + (xe^{-x} - x)y = 0$，消去 x，得 $y' + (e^{-x} - 1)y = 0$，分离变量并积分得齐次方程的通解为

$$Y = Ce^{x+e^{-x}},$$

于是得原方程的通解为

$$y = Ce^{x+e^{-x}} + e^{x}.$$

由初值条件 $y\big|_{x=\ln 2} = 0$，得 $C \cdot 2e^{\frac{1}{2}} + 2 = 0$，即 $C = -e^{-\frac{1}{2}}$. 故所求特解为

$$y = e^{x} - e^{x+e^{-x}-\frac{1}{2}}.$$

18. (1996. Ⅲ) 设 $f(x)$ 为连续函数.

(1) 求初值问题 $\begin{cases} y' + ay = f(x), \\ y\big|_{x=0} = 0 \end{cases}$ 的解 $y(x)$，其中 a 是正常数；

(2) 若 $|f(x)| \leqslant k$（k 为常数），证明当 $x \geqslant 0$ 时，有 $|y(x)| \leqslant \dfrac{k}{a}(1 - e^{-ax})$.

解　(1) 方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int a\mathrm{d}x}\left(\int f(x)e^{\int a\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right) = e^{-ax}\left(\int f(x)e^{ax}\mathrm{d}x + C\right) \\ &= e^{-ax}(F(x) + C), \end{aligned}$$

其中 $F(x)$ 是 $f(x)e^{ax}$ 的一个原函数. 由 $y\big|_{x=0} = 0$，得 $C = -F(0)$，故

$$y = e^{-ax}[F(x) - F(0)] = e^{-ax}\int_0^x f(t)e^{at}\mathrm{d}t.$$

(2) 因 $|f(x)| \leqslant k$，故

$$\begin{aligned} |y| &= e^{-ax}\left|\int_0^x f(t)e^{at}\mathrm{d}t\right| \leqslant e^{-ax}\int_0^x |f(t)|e^{at}\mathrm{d}t \\ &\leqslant ke^{-ax}\int_0^x e^{at}\mathrm{d}t = ke^{-ax}\frac{1}{a}(e^{ax} - 1) \\ &= \frac{k}{a}(1 - e^{-ax}). \end{aligned}$$

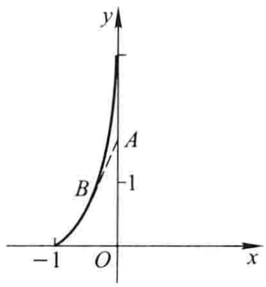
19. (1993. Ⅰ，Ⅱ) 设物体 A 从点 $(0,1)$ 出发，以常速率 v 沿 y 轴正向运动. 物体 B 从点 $(-1,0)$ 与 A 同时出发，其速率为 $2v$，方向始终指向 A. 试建立物体 B 的运动轨迹所满足的微分方程，并写出初值条件.

解　设物体 B 的运动轨迹的方程为 $y = y(x)$，又设在时刻 t，物体 B 位于点 (x,y) 处，此时物体 A 位于点 $(0,1+vt)$. 按题意，则如图研 4-1 所示，有

$$y' = \frac{1 + vt - y}{0 - x},$$

即

$$y - xy' - 1 = vt. \tag{1}$$



图研 4－1

又此刻，物体 B 从点$(-1,0)$行至(x,y)的路程为

$$\int_{-1}^{x}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x = 2vt. \tag{2}$$

由(1)式与(2)式消去 vt，得

$$y - xy' - 1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{x}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x.$$

在上式两端对 x 求导，得

$$y' - (y' + xy'') = \frac{1}{2}\sqrt{1+y'^2},$$

即

$$xy'' + \frac{1}{2}\sqrt{1+y'^2} = 0,$$

初值条件为 $y|_{x=-1} = 0, y'|_{x=1} = 1$.

20. （1998. Ⅱ）利用代换 $y = \frac{u}{\cos x}$将方程

$$y''\cos x - 2y'\sin x + 3y\cos x = \mathrm{e}^x$$

化简，并求出原方程的通解.

解法一　由 $u = y\cos x$ 两端对 x 求导，得

$$u' = y'\cos x - y\sin x,\quad u'' = y''\cos x - 2y'\sin x - y\cos x.$$

于是原方程化为 $u'' + 4u = \mathrm{e}^x$，其通解为

$$u = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{\mathrm{e}^x}{5}(C_1, C_2 \text{ 为任意常数}).$$

从而原方程的通解为

$$y = C_1\frac{\cos 2x}{\cos x} + 2C_2\sin x + \frac{\mathrm{e}^x}{5\cos x}.$$

解法二　$y = u\sec x, y' = u'\sec x + u\sec x\cdot\tan x,$

$y'' = u''\sec x + 2u'\sec x\cdot\tan x + u\sec x\cdot\tan^2 x + u\sec^3 x.$

代入原方程得 $u''+4u=\mathrm{e}^{x}$.（下同解法一）

21. (1997.Ⅱ)设曲线 L 的极坐标方程为 $\rho=\rho(\theta)$，$M(\rho,\theta)$ 为 L 上任一点，$M_0(2,0)$ 为 L 上一定点. 若极径 OM_0，OM 与曲线 L 所围成的面积等于 L 上 M_0，M 两点间弧长的值之一半. 求曲线 L 的方程.

解 由题意得

$$\frac{1}{2}\int_0^{\theta}\rho^2\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\theta}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\mathrm{d}\theta,$$

上式两端对 θ 求导，得 $\rho^2=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}$，即 $\rho'=\pm\rho\sqrt{\rho^2-1}$. 分离变量并积分

$$\int\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho\sqrt{\rho^2-1}}=\pm\int\mathrm{d}\theta,$$

即

$$\int\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho^2\sqrt{1-\frac{1}{\rho^2}}}=\pm\int\mathrm{d}\theta,$$

得 $-\arcsin\frac{1}{\rho}=\pm\theta+C$，代入初值条件 $\theta=0,\rho=2$，得 $C=-\frac{\pi}{6}$. 故曲线 L 的方程为 $\arcsin\frac{1}{\rho}=\frac{\pi}{6}\pm\theta$，即

$$\rho=\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\pm\theta\right)}.$$

若将 L 表示成直角坐标方程，则由 $\rho\sin\left(\frac{\pi}{6}\pm\theta\right)=1$，即

$$\rho\left(\frac{1}{2}\cos\theta\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)=1,$$

得 $x\pm\sqrt{3}y=2$.

22. (1998.Ⅱ)设 $y=y(x)$ 是一向上凸的连续曲线，其上任一点 (x,y) 处的曲率为 $\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$. 又此曲线上点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=x+1$，求该曲线的方程，并求 $y=y(x)$ 的极值.

解 因曲线向上凸，故 $y''\leqslant 0$，曲率 $K=\frac{|y''|}{(\sqrt{1+y'^2})^3}=\frac{-y''}{(\sqrt{1+y'^2})^3}$，按题意有

$$\frac{-y''}{(\sqrt{1+y'^2})^3}=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}},$$

即

$$\frac{y''}{1+y'^2}=-1.$$

令 $y' = p$,则上述方程化为$\frac{p'}{1+p^2} = -1$,即

$$\frac{\mathrm{d}p}{1+p^2} = -\mathrm{d}x,$$

积分得 $\arctan p = C_1 - x$.

因 $y = y(x)$ 在点$(0,1)$处的切线方程为 $y = x+1$,故 $p|_{x=0} = y'|_{x=0} = 1$. 由此条件得 $\arctan 1 = C_1$,即 $C_1 = \frac{\pi}{4}$. 于是

$$y' = p = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right),$$

积分得

$$y = \ln\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] + C_2.$$

因曲线过点$(0,1)$,故由 $y|_{x=0} = 1$,得 $C_2 = 1 - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \frac{1}{2}\ln 2$. 故所求曲线的方程为

$$y = \ln\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] + 1 + \frac{1}{2}\ln 2.$$

由于 $y = y(x)$ 是连续曲线,故 $y = \ln\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] + 1 + \frac{1}{2}\ln 2$ 的定义域为 $-\frac{\pi}{2} < x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$,即 $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$. 又 $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \leqslant 1$. 故当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时,y 有极大值 $1 + \frac{1}{2}\ln 2$.

23. (1998. Ⅲ) 设函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上连续. 若由曲线 $y = f(x)$,直线 $x = 1$, $x = t\ (t > 1)$ 与 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体体积为

$$V(t) = \frac{\pi}{3}[t^2 f(t) - f(1)],$$

试求 $y = f(x)$ 所满足的微分方程,并求该微分方程满足条件 $y|_{x=2} = \frac{2}{9}$ 的解.

解 依题意,有

$$\pi\int_1^t f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3}[t^2 f(t) - f(1)],$$

即

$$3\int_1^t f^2(x)\,\mathrm{d}x = t^2 f(t) - f(1).$$

两端对 t 求导,得 $3f^2(t) = 2tf(t) + t^2 f'(t)$. 将变量 t 用 x 表示,即

$$x^2 y' + 2xy = 3y^2$$

为 $y=f(x)$ 满足的微分方程.

将此方程改写为

$$y'+2\frac{y}{x}=3\left(\frac{y}{x}\right)^2,$$

令 $u=\frac{y}{x}$,则 $y'=u+xu'$,且方程成为 $xu'=3u(u-1)$, 分离变量并积分

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{u(u-1)}=3\int\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

得

$$\ln\left|\frac{u-1}{u}\right|=3\ln|x|+\ln C_1,$$

代入 $u=\frac{y}{x}$,得 $\ln\left|\frac{y-x}{y}\right|=\ln C_1|x|^3$, 即

$$\frac{y-x}{y}=Cx^3\quad(C=\pm C_1).$$

由初值条件 $y|_{x=2}=\frac{2}{9}$,得 $C=-1$,于是由 $\frac{y-x}{y}=-x^3$ 解得

$$y=\frac{x}{x^3+1}$$

24. (2001.Ⅳ)设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续,$f(1)=\frac{5}{2}$,且对所有 $x,t\in(0,+\infty)$,满足条件

$$\int_1^{xt}f(u)\,\mathrm{d}u=t\int_1^x f(u)\,\mathrm{d}u+x\int_1^t f(u)\,\mathrm{d}u,$$

求 $f(x)$.

解　在所给条件等式的两端对 x 求导,得

$$tf(xt)=tf(x)+\int_1^t f(u)\,\mathrm{d}u.$$

在上式中令 $x=1$,且由 $f(1)=\frac{5}{2}$,可得

$$tf(t)=\frac{5}{2}t+\int_1^t f(u)\,\mathrm{d}u.\tag{1}$$

由于 $t>0$ 时 $\frac{1}{t}\int_1^t f(u)\,\mathrm{d}u$ 关于 t 可导,故 $f(t)=\frac{5}{2}+\frac{1}{t}\int_1^t f(u)\,\mathrm{d}u$ 可导,于是在等式(1)两端对 t 求导,得

$$f(t)+tf'(t)=\frac{5}{2}+f(t),$$

即 $f'(t)=\frac{5}{2t}$, 积分得 $f(t)=\frac{5}{2}\ln t+C$.

由 $f(1)=\dfrac{5}{2}$，得 $C=\dfrac{5}{2}$. 故 $f(t)=\dfrac{5}{2}\ln t+\dfrac{5}{2}$，即

$$f(x)=\frac{5}{2}(\ln x+1).$$

25. （2000. Ⅱ）某湖泊的水量为 V，每年排入湖泊内含污染物 A 的污水量为 $\dfrac{V}{6}$，流入湖泊内不含 A 的水量为 $\dfrac{V}{6}$，流出湖泊的水量为 $\dfrac{V}{3}$. 已知 1999 年年底湖中 A 的含量为 $5m_0$，超过国家规定指标. 为了治理污染，从 2000 年初起，限定排入湖泊中含 A 污水的浓度不超过 $\dfrac{m_0}{V}$. 问至多需经过多少年，湖泊中污染物 A 的含量降至 m_0 以内？（注：设湖水中 A 的浓度是均匀的.）

解　设从 2000 年年初（令此时 $t=0$）开始，第 t 年湖泊中污染物 A 的总量为 m，浓度为 $\dfrac{m}{V}$，则在时间间隔 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 内，排入湖泊中 A 的量为 $\dfrac{m_0}{V}\cdot\dfrac{V}{6}\mathrm{d}t=\dfrac{m_0}{6}\mathrm{d}t$，流出湖泊的水中 A 的量为 $\dfrac{m}{V}\cdot\dfrac{V}{3}\mathrm{d}t=\dfrac{m}{3}\mathrm{d}t$，因而在此时间间隔内湖泊中污染物 A 的改变量

$$\mathrm{d}m=\left(\frac{m_0}{6}-\frac{m}{3}\right)\mathrm{d}t.$$

由分离变量法解得 $m=\dfrac{m_0}{2}-C\mathrm{e}^{-\frac{t}{3}}$，代入初值条件 $m|_{t=0}=5m_0$，得 $C=-\dfrac{9}{2}m_0$. 于是

$$m=\frac{m_0}{2}(1+9\mathrm{e}^{-\frac{t}{3}}).$$

令 $m=m_0$，得 $t=6\ln 3$，即至多需经过 $6\ln 3$ 年，湖泊中污染物 A 的含量降至 m_0 以内.

26. （2003. Ⅱ）设位于第一象限的曲线 $y=f(x)$ 过点 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，其上任一点 $P(x,y)$ 处的法线与 y 轴的交点为 Q，且线段 PQ 被 x 轴平分.

（1）求曲线 $y=f(x)$ 的方程；

（2）已知曲线 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上的弧长为 l，试用 l 表示曲线 $y=f(x)$ 的弧长 s.

解　（1）曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x,y)$ 处的法线方程为

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x),$$

其中 (X,Y) 为法线上任意一点，令 $X=0$，则

$$Y=y+\frac{x}{y'},$$

故 Q 点为 $\left(0,y+\dfrac{x}{y'}\right)$. 由题设知 $y+y+\dfrac{x}{y'}=0$，即 $2y\mathrm{d}y+x\mathrm{d}x=0$. 积分，得 $x^2+2y^2=C$（C 为任意常数）. 由 $y\Big|_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{1}{2}$ 知 $C=1$，故曲线 $y=f(x)$ 的方程为

$$x^2+2y^2=1.$$

（2）曲线 $y=\sin x$ 在$[0,\pi]$上的弧长为

$$l=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

曲线 $y=f(x)$ 的参数方程为

$$\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta,\end{cases}$$

故

$$s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2\theta+\frac{1}{2}\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

令 $\theta=\dfrac{\pi}{2}-t$，则

$$s=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{1+\cos^2 t}\,(-\mathrm{d}t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=\frac{l}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}l.$$

27. （2003. Ⅰ，Ⅱ）设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $y'\neq 0$，$x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数.

（1）试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}+(y+\sin x)\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程；

（2）求变换后的微分方程满足初值条件 $y(0)=0,y'(0)=\dfrac{3}{2}$ 的解.

解 （1）由反函数导数公式知 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{y'}$，即

$$y'\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=1.$$

上式两端关于 x 求导，得 $y''\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}(y')^2=0$，所以

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=-\frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}y''}{(y')^2}=-\frac{y''}{(y')^3}.$$

代入原微分方程，得

$$y''-y=\sin x. \qquad (*)$$

（2）方程（$*$）所对应的齐次方程 $y''-y=0$ 的通解为

$$Y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}.$$

设方程（$*$）的特解为

$$y^*=A\cos x+B\sin x,$$

代入方程（$*$），求得 $A=0,B=-\dfrac{1}{2}$，故 $y^*=-\dfrac{1}{2}\sin x$，从而 $y''-y=\sin x$ 的通解

是

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x.$$

由 $y(0)=0, y'(0)=\frac{3}{2}$，得 $C_1=1, C_2=-1$，故所求初值问题的解为

$$y(x) = e^x - e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x.$$

28. (2004. Ⅰ)某种飞机在机场降落时，为了减少滑行距离，在触地的瞬间，飞机尾部张开减速伞以增加阻力，使飞机减速并停下．现有一质量为 9 000 kg 的飞机，着陆时的水平速度为 700 km/h. 经测试，减速伞打开后，飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比（比例系数为 $k=6.0\times10^6$）．问从着陆点算起，飞机滑行的最长距离是多少？

解法一　根据牛顿第二定律，得 $m\frac{dv}{dt} = -kv$，即

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}dt.$$

两端积分得 $\ln v = -\frac{k}{m}t + \ln C$，即 $v = Ce^{-\frac{k}{m}t}$. 当 $t=0$ 时，$v=v_0$，有 $C=v_0$，故

$$\frac{ds}{dt} = v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}.$$

于是飞机滑行的最长距离为

$$s = \int_0^{+\infty} v_0 e^{-\frac{k}{m}t}dt = -\frac{mv_0}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{mv_0}{k} = 1.05(\text{km}).$$

解法二　根据牛顿第二定律，得

$$m\frac{dv}{dt} = -kv,$$

又 $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}\cdot v$，故有

$$ds = -\frac{m}{k}dv,$$

积分得 $s = -\frac{m}{k}v + C$. 由于 $t=0$ 时，$s=0, v=v_0$，故 $C=\frac{m}{k}v_0$. 于是得

$$s = -\frac{m}{k}(v - v_0).$$

令 $v\to0$（当 $t\to\infty$ 时），得

$$s \to \frac{mv_0}{k} = 1.05(\text{km}).$$

29. (2010. Ⅰ)求微分方程 $y''-3y'+2y=2xe^x$ 的通解.

解　原方程对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-3r+2=0$，根为 $r_1=1, r_2=2$，故

对应的齐次方程的通解是

$$Y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}.$$

由于自由项为 $2x\mathrm{e}^x$，$\lambda=1$ 为特征方程的单根，故令非齐次方程的特解 $y^*=x(ax+b)\mathrm{e}^x=(ax^2+bx)\mathrm{e}^x$，代入原方程后解得 $a=-1,b=-2$，故 $y^*=-(x^2+2x)\mathrm{e}^x$. 从而所求通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}-(x^2+2x)\mathrm{e}^x,$$

其中 C_1,C_2 是任意常数.

30. (2013. Ⅰ)设数列 $\{a_n\}$ 满足条件：$a_0=3,a_1=1,a_{n-2}-n(n-1)a_n=0(n\geqslant 2)$，$S(x)$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数.

(1) 证明：$S''(x)-S(x)=0$；

(2) 求 $S(x)$ 的表达式.

解　(1) 当 $n\geqslant 2$ 时，由

$$a_n=\frac{a_{n-2}}{n(n-1)}=\frac{a_{n-4}}{n(n-1)(n-2)(n-3)}=\cdots=\begin{cases}\dfrac{a_0}{n!}, & n=2m,\\ \dfrac{a_1}{n!}, & n=2m+1,\end{cases}$$

其中，$m=1,2,\cdots$，易见 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域是 $(-\infty,+\infty)$，即

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

于是有

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},\quad S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2},$$

且由条件 $a_{n-2}=n(n-1)a_n$，得

$$S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S(x),$$

所以，$S''(x)-S(x)=0$.

(2) 二阶常系数齐次线性微分方程 $S''(x)-S(x)=0$ 的特征方程为 $r^2-1=0$，根为 $r_{1,2}=\pm 1$，故通解为 $S(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}$.

由于

$$\begin{cases}S(0)=C_1+C_2=a_0=3,\\ S'(0)=C_1-C_2=a_1=1,\end{cases}$$

故 $C_1=2,C_2=1$，即 $S(x)=2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x},x\in(-\infty,+\infty)$.

三、同济大学高等数学

试卷选编

（一）高等数学（上）期中考试试卷（Ⅰ）

试题

一、填空选择题

1. 设函数 $f(x)=e^x-1+o(x)$，且 $f(0)=0$，则下列结论正确的是（　　）.

(A) $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续　　(B) $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导

(C) $f'(0)=0$　　(D) $f'(0)=1$

2. 已知函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)=2$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 处的微分 dy 是（　　）.

(A) 与 Δx 等价的无穷小量　　(B) 比 Δx 高阶的无穷小量

(C) 比 Δx 低阶的无穷小量　　(D) 与 Δx 同阶而非等价的无穷小量

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3\sin(x-1)}{x-1}, & x<1,\\ e^{2ax}-e^{ax}+1, & x\geqslant 1\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则常数 $a=$ ________.

4. 若 $f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{\ln(1+2x)}=$ ________.

5. 曲线 $\begin{cases}x=e^t\sin 2t,\\ y=e^t\cos t\end{cases}$ 在 $t=0$ 所对应点处的切线方程为________.

二、计算题

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(e^{2x}-1)}{\ln(1-3x^2)}$.

2. 已知函数 $f(x)=e^{\tan x}\sin(\cos x)$，求 $f'(0)$.

3. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

4. 设可微函数 $f(x)>0$，$y=\ln f(x^2)$，求 dy.

5. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$ 确定，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

三、求函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}$ 在区间 $(0,\pi)$ 内的间断点，并判断间断点类型.

四、已知函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$，求

(1) 函数单调区间,函数极值;

(2) 函数图形的凹凸区间,函数图形的拐点.

五、求函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ 在 $x=0$ 处带拉格朗日余项的 n 阶泰勒展开式.

六、讨论曲线 $y=4\ln x+k$ 与曲线 $y=4x+\ln^4 x$ 的交点个数(k 为常数).

七、设函数 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上三阶可导,且 $f(1)=f(2)=0$,令 $F(x)=(x-1)^2 f(x)$. 证明:$F'''(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内至少有一个零点.

参考答案

一、填空选择题

1. $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0=f(0)$, $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$. 故选(D).

2. $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x=2\Delta x$, $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\mathrm{d}y}{\Delta x}=2$. 故选(D).

3. $f(1^-)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{3\sin(x-1)}{x-1}=3$, $f(1^+)=\lim\limits_{x\to1^+}(\mathrm{e}^{2ax}-\mathrm{e}^{ax}+1)=\mathrm{e}^{2a}-\mathrm{e}^{a}+1$. 根据条件 $f(1^-)=f(1^+)=f(1)$,解得 $a=\ln2$.

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{\ln(1+2x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{f(x)-f(0)}{x}+\dfrac{f(-x)-f(0)}{-x}\right]=1$.

5. $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=\left.\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\right|_{t=0}=\left.\dfrac{\mathrm{e}^t\cos t-\mathrm{e}^t\sin t}{\mathrm{e}^t\sin2t+2\mathrm{e}^t\cos2t}\right|_{t=0}=\dfrac{1}{2}$,当 $t=0$ 时,$x=0$, $y=1$. 所求切线为 $y=\dfrac{1}{2}x+1$.

二、计算题

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(\mathrm{e}^{2x}-1)}{\ln(1-3x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2x}-1)^2}{-3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}(2x)^2}{-3x^2}=-\dfrac{2}{3}$.

2. $f'(x)=\mathrm{e}^{\tan x}\sec^2x\sin(\cos x)-\mathrm{e}^{\tan x}\cos(\cos x)\sin x$, $f'(0)=\sin1$.

3. $\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\left[\left(1+\dfrac{\tan x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\tan x-x}}\right]^{\frac{\tan x-x}{x(1-\cos x)}}$,

由于

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x(1-\cos x)}=2\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}=2\lim_{x\to0}\frac{\sec^2x-1}{3x^2}=2\lim_{x\to0}\frac{\tan^2x}{3x^2}=\frac{2}{3},$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=e^{\frac{2}{3}}.$$

4. $\mathrm{d}y=\dfrac{1}{f(x^2)}\mathrm{d}[f(x^2)]=\dfrac{f'(x^2)}{f(x^2)}\mathrm{d}(x^2)=\dfrac{2xf'(x^2)}{f(x^2)}\mathrm{d}x.$

5. 方程 $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$ 两端对 x 求导，得

$$\frac{2x+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{x^2+y}=3x^2y+x^3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\cos x,$$

注意到 $y\big|_{x=0}=1$，于是 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=1.$

三、间断点为 $x=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}$，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}f(x)=1$。因此 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 和 $x=\dfrac{3\pi}{4}$ 分别为 $f(x)$ 的无穷间断点和可去间断点.

四、(1) 令 $f'(x)=\dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}=0$ 得 $x=0,3$，在 $(-\infty,0)$，$(0,1)$ 和 $(3,+\infty)$ 内，$f'(x)>0$，在 $(1,3)$ 内，$f'(x)<0$. 故函数单调增加区间为 $(-\infty,1)$ 和 $[3,+\infty)$，单调减少区间为 $(1,3]$，极小值为 $f(3)=\dfrac{27}{4}$，无极大值.

(2) 令 $f''(x)=\dfrac{6x}{(x-1)^4}=0$ 得 $x=0$，在 $(-\infty,0)$ 内，$f''(x)<0$，在 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 内，$f''(x)>0$. 故函数图形的凸区间为 $(-\infty,0]$，凹区间为 $[0,1)$ 和 $(1,+\infty)$，函数图形的拐点为 $(0,0)$.

五、$f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$，$f^{(n)}(0)=(-1)^n n!$. 所求的 n 阶泰勒展开式为

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k+\frac{(-1)^{n+1}}{(1+\xi)^{n+2}}x^{n+1}\quad（其中 \xi 介于 0 与 x 之间）.$$

六、令 $f(x)=4x+\ln^4x-4\ln x-k\ (x>0)$，则 $f'(x)=\dfrac{4}{x}(x+\ln^3x-1)$. 记 $g(x)=x+\ln^3x-1$，则当 $x>0$ 时，$g'(x)=1+\dfrac{3\ln^2x}{x}>0$，即 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加. 注意到 $g(1)=0$，因此当 $0<x<1$ 时，$g(x)<0$，当 $x>1$ 时，$g(x)>0$.

于是，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$. 即当 $0<x<1$ 时，$f(x)$ 单调减少，当 $x>1$ 时，$f(x)$ 单调增加.

又 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$，$f(1)=4-k$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，因此当 $f(1)<0$，即 $k>4$ 时，$f(x)$ 有 2 个零点，此时两条曲线的交点为 2 个；当 $f(1)=0$，即 $k=4$ 时，$f(x)$ 仅有 1 个零点 $x=1$，此时两条曲线的交点只有 1 个；当 $f(1)>0$，即 $k<4$ 时，$f(x)>0$，此时两条曲线没有交点.

七、$F(1)=F(2)=0$,由罗尔定理可知,存在 $\xi_1\in(1,2)$,使得 $F'(\xi_1)=0$.

$F'(x)=2(x-1)f(x)+(x-1)^2f'(x)$,于是 $F'(1)=F'(\xi_1)=0$,由罗尔定理可知,存在 $\xi_2\in(1,\xi_1)\subset(1,2)$,使得 $F''(\xi_2)=0$.

$F''(x)=2f(x)+4(x-1)f'(x)+(x-1)^2f''(x)$,于是 $F''(1)=F''(\xi_2)=0$,由罗尔定理可知,存在 $\xi\in(1,\xi_2)\subset(1,2)$,使得 $F'''(\xi)=0$.

（二）高等数学（上）期中考试试卷（Ⅱ）

试题

一、填空选择题

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n+3}-\sqrt{n^2+n+2})=$ ________.

2. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1-2x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}=$ ________.

3. 已知 $y=x\ln(x^2+1)$，则它在 $x=1$ 处的微分 $\mathrm{d}y\big|_{x=1}=$ ________.

4. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,4]$ 上可导，$f(-1)=2$，$f(4)=-1$，则在区间 $(-1,4)$ 内至少有一点 ξ，使得 $f'(\xi)=$ ________.

5. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在是数列 $\{x_n\}$ 单调有界的（　　）.

（A）充分条件　（B）必要条件　（C）充要条件　（D）无关条件

6. 对于区间 I 上的二阶可导函数 $f(x)$，$f''(x)<0$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调减少的（　　）.

（A）充分条件　（B）必要条件　（C）充要条件　（D）无关条件

7. 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导的充分条件是（　　）.

（A）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x^2)-f(0)}{x^2-0}$ 存在　（B）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x^3)-f(0)}{x^3}$ 存在

（C）$f'_-(0)$ 与 $f'_+(0)$ 存在　（D）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\sin x)}{x}$ 存在

8. 已知 $f(x)=x(x^2-1)(x^2-2)(x^2-4)$，导函数 $f'(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上零点的个数至少为（　　）.

（A）1 个　（B）2 个　（C）3 个　（D）4 个

二、计算下列各题

1. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(1-\cos\dfrac{1}{2\sqrt{n}}\right)$.

2. 求由参数方程 $\begin{cases}x=te^t,\\ y=e^{2t}+1\end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}-\sqrt{1-3x^2}}{\sin^2x}$.

4. 函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有二阶导数，且 $f(0)=0$，$f''(x)>0$. 证明：$\dfrac{f(x)}{x}$ 在

$(0,+\infty)$上单调增加.

三、求曲线 $2x^2+e^{x-y}=y^2+2$ 在点$(1,1)$处的切线方程,并求由该方程所确定函数 $y=y(x)$在 $x=1$ 处的二阶导数 $y''|_{x=1}$.

四、讨论 $y=x\sqrt{x-1}$的单调性与函数图形的凹凸性,并求出曲线的拐点.

五、求函数$f(x)=\tan(e^{2x}-1)$带佩亚诺余项的二阶麦克劳林公式,并计算极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(e^{2x}-1)-2x}{x^2}$.

六、设$f(x)$在区间$[1,+\infty)$上单调,证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在的充要条件是$f(x)$在区间$[1,+\infty)$上有界.

参考答案

一、填空选择题

1. $$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n+3}-\sqrt{n^2+n+2})=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{\sqrt{n^2+4n+3}+\sqrt{n^2+n+2}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}}=\frac{3}{2}.$$

2. $$\lim_{x\to0}\left(\frac{1-2x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left[\left(1+\frac{-3x}{1+x}\right)^{\frac{1+x}{-3x}}\right]^{\frac{-3}{1+x}}=e^{-3}.$$

3. $$y'\Big|_{x=1}=\left(\ln(x^2+1)+\frac{2x^2}{x^2+1}\right)\Bigg|_{x=1}=1+\ln 2,\ dy|_{x=1}=(1+\ln 2)dx.$$

4. $$f'(\xi)=\frac{f(4)-f(-1)}{4-(-1)}=-\frac{3}{5}.$$

5. 由于单调有界数列必有极限,故选(B).

6. 由于$f''(x)<0$只能得到$f'(x)$单调减少(例如 $y=-x^2$满足条件但没有单调性),故选(D).

7. 由于

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x^2)-f(0)}{x^2-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0},$$
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x^3)-f(0)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0},$$

$f'_-(0)$与$f'_+(0)$存在而不相等时,$f(x)$在 $x=0$ 不可导,$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\sin x)}{x}$存在且$f(0)$不存在或不等于0时,$f(x)$在 $x=0$ 不可导. 故选(B).

8. 由于$f(x)$在区间$[-1,2]$上有5个零点$x=-1,0,1,\sqrt{2},2$，由罗尔定理可知在$(-1,0),(0,1),(1,\sqrt{2})$和$(\sqrt{2},2)$内各至少有一个零点. 故选(D).

二、计算下列各题

1. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\cos\dfrac{1}{2\sqrt{n}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{n}}\right)^2=\dfrac{1}{8}$.

2. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2\mathrm{e}^{2t}}{\mathrm{e}^t+t\mathrm{e}^t}=\dfrac{2\mathrm{e}^t}{1+t},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{2\mathrm{e}^t}{t+1}\right)\Big/\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2t}{(t+1)^3}$.

3. $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^3}-\sqrt{1-3x^2}}{\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{(1+x^3)^{\frac{1}{3}}-(1-3x^2)^{\frac{1}{2}}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2(1+x^3)^{-\frac{2}{3}}+3x(1-3x^2)^{-\frac{1}{2}}}{2x}=\frac{3}{2}.$$

4. 记$F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，则

$$F'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{xf'(x)-[f(x)-f(0)]}{x^2}$$

$$=\frac{xf'(x)-xf'(\xi)}{x^2}=\frac{(x-\xi)f''(\eta)}{x}>0,$$

其中$\xi,\eta\in(0,x)$，故$\dfrac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$上单调增加.

三、在等式$2x^2+\mathrm{e}^{x-y}=y^2+2$两端分别对$x$求导得

$$4x+\mathrm{e}^{x-y}(1-y')=2yy',\quad y'\big|_{x=1}=\frac{4x+\mathrm{e}^{x-y}}{2y+\mathrm{e}^{x-y}}\bigg|_{(1,1)}=\frac{5}{3}.$$

所求切线方程为

$$y-1=\frac{5}{3}(x-1),$$

即$5x-3y-2=0$. 等式两端再次对x求导得$4+\mathrm{e}^{x-y}(1-y')^2-y''\mathrm{e}^{x-y}=2(y'^2+yy'')$，由$x=y=1$以及$y'\big|_{x=1}=\dfrac{5}{3}$，得到$y''\big|_{x=1}=-\dfrac{10}{27}$.

四、显然函数定义域为$x\geqslant1$. 由$y'=\dfrac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}>0$知函数在$(1,+\infty)$上单调增加.

令$y''=\dfrac{3x-4}{4(x-1)^{3/2}}=0$得$x=\dfrac{4}{3}$. 当$1<x<\dfrac{4}{3}$时，$y''<0$，曲线是凸的；当$x>\dfrac{4}{3}$时，$y''>0$，曲线是凹的. 曲线的拐点为$\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\right)$.

五、$f(0)=0,f'(0)=2\mathrm{e}^{2x}\sec^2(\mathrm{e}^{2x}-1)\big|_{x=0}=2$,

$f''(0)=[4\mathrm{e}^{2x}\sec^2(\mathrm{e}^{2x}-1)+8\mathrm{e}^{4x}\sec^2(\mathrm{e}^{2x}-1)\tan(\mathrm{e}^{2x}-1)]\big|_{x=0}=4$,

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)=2x+2x^2+o(x^2).$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan(e^{2x}-1)-2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x^2+o(x^2)}{x^2}=2.$$

六、不妨设$f(x)$单调增加.

必要性：

当$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在时，记$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，则$f(1)\leqslant f(x)\leqslant A$，即$f(x)$在区间$[1,+\infty)$上有界.

充分性：

当$f(x)$在区间$[1,+\infty)$上有界时，则$f(n)$是单调增加且有界的数列，故$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$存在，记$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$.

由单调增加得$f([x])\leqslant f(x)\leqslant f([x]+1)$，而$\lim\limits_{x\to+\infty}f([x])=\lim\limits_{x\to+\infty}f([x]+1)=\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$，由夹逼准则可知$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

（三）高等数学（上）期末考试试卷（Ⅰ）

试题

一、填空题

1. $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\ln x}=$________.

2. 曲线 $xy=2$ 在点(1,2)的曲率为________.

3. 函数 $f(x)=x^3-3x+1$ 在[0,2]上的最大值为________.

4. $\int \frac{\ln\tan x}{\cos^2 x\tan x}\mathrm{d}x =$ ________.

5. $\int_{-4\pi}^{4\pi}(x+1)\,|\sin x|\,\mathrm{d}x =$ ________.

6. 微分方程 $y''+2y'+2y=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ 的特解形式可表示为 $y^*=$________(只需写出形式,不必确定其中系数).

二、选择题

1. 当 $x\to+\infty$ 时,函数 $f(x)=\mathrm{e}^x\sin x$ 是(　　).

(A) 无穷小　　(B) 无穷大

(C) 有界量,但不是无穷小　　(D) 无界的,但不是无穷大

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$(其中 $b-a=1$)上具有二阶导数,且 $f''(x)<0$,下列不等式正确的是(　　).

(A) $f'(b)<f'(a)<f(b)-f(a)$　　(B) $f'(b)<f(b)-f(a)<f'(a)$

(C) $f(b)-f(a)<f'(b)<f'(a)$　　(D) $f'(b)<f(a)-f(b)<f'(a)$

3. 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上(　　).

(A) 可导必有界　　(B) 有界必可积

(C) 可积必连续　　(D) 连续必可导

4. 具有特解 $y=x\mathrm{e}^x$ 及 $y=\mathrm{e}^{-x}$ 的三阶常系数齐次线性微分方程是(　　).

(A) $y'''+y''-y'-y=0$　　(B) $y'''+y''+y'+y=0$

(C) $y'''-y''-y'+y=0$　　(D) $y'''-y''-y'-y=0$

三、解答题

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$.

2. 设函数 $f(x)=(x^2+2)^{x^2-1}$,求 $f'(1)$.

3. 计算反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x+1}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x$.

4. 求由圆$(x-5)^2+y^2=16$所围图形绕y轴旋转而成的旋转体体积.

四、设函数$f(x)$在$x=2$处连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2-x)-3}{2\sin x}=5$. 试证$f(x)$在$x=2$处可导，并求曲线$y=f(x)$在横坐标为$x=2$的点处的切线方程.

五、设函数$f(x)=\int_0^x \dfrac{\sin t}{\pi-t}\mathrm{d}t$，求定积分$\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$.

六、设函数$f(x)$在$(0,+\infty)$内可导，且满足$\int_0^1 f(tx)\,\mathrm{d}t=2f(x)+1$及$f(1)=1$，求$f(x)$.

七、证明：当$x>0$时，$(x^2-1)\ln x \geqslant (x-1)^2$.

参考答案

一、填空题

1. $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\ln x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{x\ln x}=\mathrm{e}^0=1$.

2. $y'\big|_{x=1}=-\dfrac{1}{x^2}\bigg|_{x=1}=-1, y''\big|_{x=1}=\dfrac{2}{x^3}\bigg|_{x=1}=2$，所求曲率

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}\bigg|_{x=1}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. 令$f'(x)=3x^2-3=0$得$x=1, f(0)=1, f(1)=-1, f(2)=3$，所求最大值为$f(2)=3$.

4. $\int\dfrac{\ln\tan x}{\cos^2 x\tan x}\mathrm{d}x=\int\dfrac{\ln\tan x}{\tan x}\mathrm{d}(\tan x)=\dfrac{1}{2}(\ln\tan x)^2+C$.

5. $\int_{-4\pi}^{4\pi}(x+1)|\sin x|\mathrm{d}x=\int_{-4\pi}^{4\pi}x|\sin x|\mathrm{d}x+\int_{-4\pi}^{4\pi}|\sin x|\mathrm{d}x=2\int_0^{4\pi}|\sin x|\mathrm{d}x=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=16$.

6. 由于$-1+\mathrm{i}$为特征方程的根，因此可设$y^*=x\mathrm{e}^{-x}(a\cos x+b\sin x)$.

二、选择题

1. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}f(n\pi)=0, \lim\limits_{n\to\infty}f\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=+\infty$. 故选(D).

2. 由拉格朗日中值定理可知，存在$\xi\in(a,b)$，满足$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)=f'(\xi)$. 又根据条件可知$f'(x)$单调减少，因此$f'(b)<f'(\xi)<f'(a)$. 故选(B).

3. 由于可导必连续，在闭区间上连续的函数一定有界. 故选(A).

4. 根据条件，$r=-1$为特征方程的单根，$r=1$为特征方程的二重根，因此特征方程为$(r+1)(r-1)^2=r^3-r^2-r+1=0$. 故选(C).

三、解答题

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

2. $f(x)=e^{(x^2-1)\ln(x^2+2)}$，$f'(x)=e^{(x^2-1)\ln(x^2+2)}\left[2x\ln(x^2+2)+\dfrac{2x(x^2-1)}{x^2+2}\right]$，故$f'(1)=2\ln 3$.

3. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x+1}{x(x^2+1)}dx=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{x-1}{x^2+1}\right)dx=\left[\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\arctan x\right]_1^{+\infty}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$.

4. 将曲线方程写成 $x=5\pm\sqrt{16-y^2}$，因此所求体积为

$$V=\pi\int_{-4}^{4}(5+\sqrt{16-y^2})^2dy-\pi\int_{-4}^{4}(5-\sqrt{16-y^2})^2dy=20\pi\int_{-4}^{4}\sqrt{16-y^2}dy$$

$$=40\pi\int_0^4\sqrt{16-y^2}dy,$$

作换元 $y=4\sin u$ 得，$V=640\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2u\,du=160\pi^2$.

四、由条件得$\lim\limits_{x\to 0}[f(2-x)-3]=0$，即$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=3$，再由连续性得$f(2)=3$. 而

$$f'(2)=\lim_{x\to 0}\frac{f(2-x)-f(2)}{-x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(2-x)-3}{2\sin x}\cdot\frac{2\sin x}{-x}=-10,$$

即 $f(x)$ 在 $x=2$ 处可导. 所求切线方程为 $y-3=-10(x-2)$，即 $y=-10x+23$.

五、$\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)dx=[xf(x)]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}xf'(x)dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\pi-t}dt-\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\pi-x}dx=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=2$.

六、作换元 $t=\dfrac{u}{x}$，则 $\displaystyle\int_0^1 f(tx)dt=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du$，故原等式为

$$\int_0^x f(u)du=2xf(x)+x,$$

上式两端对 x 求导，得 $f(x)=2f(x)+2xf'(x)+1$，故 $y=f(x)$ 满足微分方程

$$\begin{cases}y'=-\dfrac{y+1}{2x},\\ y|_{x=1}=1,\end{cases}$$

分离变量后两端积分，得

$$\int\frac{dy}{y+1}=-\int\frac{dx}{2x},$$

即 $\ln(y+1)=-\frac{1}{2}\ln x+C$,根据条件 $y\big|_{x=1}=1$ 解得 $C=\ln 2$.因此 $y=f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-1$.

七、记 $f(x)=\ln x-\frac{x-1}{x+1}(x>0)$,则 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+1}{(x+1)^2}>0$,因此 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加.

注意到 $f(1)=0$,因此当 $0<x<1$ 时,$f(x)<0$,即 $\ln x<\frac{x-1}{x+1}$ 或 $(x^2-1)\ln x>(x-1)^2$;当 $x>1$ 时,$f(x)>0$,即 $\ln x>\frac{x-1}{x+1}$ 或 $(x^2-1)\ln x>(x-1)^2$.

综合可得,当 $x>0$ 时,$(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$.

（四）高等数学（上）期末考试试卷（Ⅱ）

试题

一、填空选择题

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{x}=$ ________.

2. 若极限$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}=3$，则$f'(x_0)=$ ________.

3. $\int_{-2}^{2}(x^2+x^3\sqrt{4-x^2})\,\mathrm{d}x=$ ________.

4. $\int\sin x\mathrm{e}^{2\cos x}\mathrm{d}x=$ ________.

5. 微分方程$4y''-4y'+y=0$的通解为$y=$ ________.

6. 记$I_1=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4x\mathrm{d}x$，$I_2=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2x\mathrm{d}x$，$I_3=\int_{-\pi}^{\pi}x^2\mathrm{d}x$，$I_4=\int_{-\pi}^{\pi}x\sin^2x\mathrm{d}x$，则这4项积分的大小关系为（　　）.

（A）$I_2>I_1>I_3>I_4$　　（B）$I_3>I_2>I_1>I_4$

（C）$I_4>I_1>I_3>I_2$　　（D）$I_1>I_2>I_4>I_3$

7. 下列反常积分中收敛的是（　　）.

（A）$\int_{1}^{+\infty}\dfrac{1}{x^2+2}\mathrm{d}x$　　（B）$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\dfrac{1}{x\sqrt{\ln x+2}}\mathrm{d}x$

（C）$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\mathrm{d}x$　　（D）$\int_{0}^{1}\dfrac{1}{x-1}\mathrm{d}x$

8. 若函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x^2)-\ln2}{x^3-1}, & x\neq1,\\ a, & x=1\end{cases}$在$x=1$连续，则常数$a=$（　　）.

（A）$\dfrac{2}{3}$　　（B）$-\dfrac{2}{3}$

（C）$-\dfrac{1}{3}$　　（D）$\dfrac{1}{3}$

二、计算题

1. 计算由曲线$y=\sqrt{x+2}$与直线$x-3y+4=0$所围平面图形的面积.

2. 若函数$u(x)$与$v(x)$具有n阶导数，试写出计算函数$u(x)v(x)$的n阶导数的莱布尼茨公式，并求$x\mathrm{e}^{2x}$的10阶导数.

3. 求函数 $f(x)=(x^2+x-5)e^x$ 的单调区间以及函数的极值.

4. 计算反常积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx$.

5. 求微分方程 $\begin{cases} y''+2y'-3y=1, \\ y|_{x=0}=\dfrac{2}{3}, y'|_{x=0}=-7 \end{cases}$ 的解.

三、一薄片铅直放入水中,其形状与位置由曲线 $x=y^2-1$ 与直线 $x-2y-2=0$ 所围成的图形确定,其中 x 轴平行于水面且位于水面下 1 m 深处,y 轴铅直向上,试求该薄片的一侧所受的水压力(假设水的密度为 μ).

四、求积分 $\int_0^1 \sqrt{x}\ln(x+1)dx$.

五、(1) 试求常数 a,b,使得函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ ax+b, & 1<x\leqslant 2 \end{cases}$ 在区间 $[0,2]$ 上可导;(2) 由该曲线段绕 y 轴旋转形成一个容器,如果每单位时间向该容器均匀地注入体积为 v_0 的水,试求该容器自开始注入水至溢出前水深为 h 时水面的上升速度.

六、要建一个容积为 14、侧面为圆柱面、顶部接着一个半球形的仓库(不含底部). 已知顶部单位面积的造价是其侧面圆柱面部分造价的 3 倍,试求该仓库的底圆半径,使得该仓库的造价最省.

七、函数 $f(x)$ 在 $[x_0,+\infty)$ 上具有二阶导数,并且 $f''(x)<0$. 对于任意 $x>x_0$,由拉格朗日中值定理,存在 $\xi\in(x_0,x)$,使得 $f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$. 证明:$\xi$ 定义了 $(x_0,+\infty)$ 内的一个单调增加函数.

参考答案

一、填空选择题

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{3}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{3}}\right]^{\frac{3x}{x-2}}=e^3$.

2. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{-2h}\cdot(-2)=-2f'(x_0)=3$,得 $f'(x_0)=-\dfrac{3}{2}$.

3. $\int_{-2}^2(x^2+x^3\sqrt{4-x^2})dx=\int_{-2}^2 x^2dx=\left[\dfrac{1}{3}x^3\right]_{-2}^2=\dfrac{16}{3}$.

4. $\int\sin x e^{2\cos x}dx=-\int e^{2\cos x}d(\cos x)=-\dfrac{1}{2}e^{2\cos x}+C$.

5. 特征方程为 $4r^2-4r+1=0$,得重根 $r_{1,2}=\dfrac{1}{2}$,因此通解为 $y=e^{\frac{1}{2}x}(C_1x+C_2)$.

6. 因为 $|x|\geqslant|\sin x|$,$1\geqslant|\sin x|$,所以 $\int_{-\pi}^{\pi}x^2\mathrm{d}x>\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2x\mathrm{d}x>\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4x\mathrm{d}x>$

$0=\int_{-\pi}^{\pi}x\sin^2x\mathrm{d}x$. 故选(B).

7. $$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2+2}\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}\right]_1^{+\infty}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{\ln x+2}}\mathrm{d}x=\left[2\sqrt{\ln x+2}\right]_e^{+\infty}=+\infty,$$

$$\int_0^t\sin x\mathrm{d}x=\left[-\cos x\right]_0^t=1-\cos t,\text{当 } t\to+\infty \text{ 时极限不存在},$$

$$\int_0^1\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x=\left[\ln(1-x)\right]_0^1=-\infty.$$

故选(A).

8. $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{2x}{1+x^2}}{3x^2}=\dfrac{1}{3}=f(1)=a$. 故选(D).

二、计算题

1. 联立方程 $y=\sqrt{x+2}$ 和 $x-3y+4=0$ 解得交点为 $(-1,1)$ 和 $(2,2)$,因此所求面积为

$$A=\int_1^2\left[3y-4-(y^2-2)\right]\mathrm{d}y=\left[-\frac{1}{3}y^3+\frac{3}{2}y^2-2y\right]_1^2=\frac{1}{6}.$$

2. 记 $u=u(x)$,$v=v(x)$,则

$$(uv)^{(n)}=uv^{(n)}+nu'v^{(n-1)}+\frac{n(n-1)}{2}u''v^{(n-2)}+\cdots+C_n^ku^{(k)}v^{(n-k)}+\cdots+u^{(n)}v,$$

$$(xe^{2x})^{(10)}=x(e^{2x})^{(10)}+10\cdot1\cdot(e^{2x})^{(9)}=x\cdot2^{10}e^{2x}+10\cdot2^9e^{2x}=2^{10}e^{2x}(x+5).$$

3. 令 $f'(x)=(x^2+3x-4)e^x=0$ 解得 $x_1=-4$ 和 $x_2=1$.

x	$(-\infty,-4)$	-4	$(-4,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
函数 $f(x)$	单调增加	$x=-4$ 为极大值点	单调减少	$x=1$ 为极小值点	单调增加

因此,$(-\infty,-4]$ 和 $[1,+\infty)$ 为单调增加区间,$[-4,1]$ 为单调减少区间. 函数的极大值为 $f(-4)=7e^{-4}$,极小值为 $f(1)=-3e$.

4. $$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}-\ln(1+x^2)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \left[-\frac{1}{x}\ln(1+x^2) \right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{2}{1+x^2}dx$$

$$= \ln 2 + [2\arctan x]_1^{+\infty} = \ln 2 + \frac{\pi}{2}.$$

5．特征方程为 $r^2+2r-3=0$，根为 $r_1=-3$ 和 $r_2=1$，因此所对应的齐次线性微分方程的通解为

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x.$$

设非齐次线性微分方程的特解为 $y^*=a$，代入方程解得 $a=-\frac{1}{3}$，因此原方程的通解为

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x - \frac{1}{3}.$$

由初值条件 $y|_{x=0}=\frac{2}{3}$，$y'|_{x=0}=-7$ 解得 $C_1=2$，$C_2=-1$，因此所求解为

$$y = 2e^{-3x} - e^x - \frac{1}{3}.$$

三、联立方程 $x=y^2-1$ 和 $x-2y-2=0$，解得交点 $(0,-1)$ 和 $(8,3)$，因此所求水压力为

$$F = \int_{-1}^{1} \mu g(1-y)[2y+2-(y^2-1)]dy = \mu g\int_{-1}^{1}(y^3-3y^2-y+3)dy$$

$$= 2\mu g\int_0^1(-3y^2+3)dy = 4\mu g(\mathrm{N}).$$

四、令 $u=\sqrt{x}$，即 $x=u^2$，则

$$\int_0^1 \sqrt{x}\ln(x+1)dx = \int_0^1 2u^2\ln(u^2+1)du = \frac{2}{3}\int_0^1 \ln(u^2+1)du^3$$

$$= \left[\frac{2}{3}u^3\ln(u^2+1)\right]_0^1 - \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{u^4}{u^2+1}du$$

$$= \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{4}{3}\int_0^1\left(u^2-1+\frac{1}{u^2+1}\right)du$$

$$= \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{4}{3}\left[\frac{1}{3}u^3 - u + \arctan u\right]_0^1 = \frac{2}{3}\ln 2 + \frac{8}{9} - \frac{\pi}{3}.$$

五、(1) $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=a+b$，由可导必连续，故 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)$，得 $a+b=1$；

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=2$，$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{ax+b-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{ax-a}{x-1}=a$，由于可导，故 $f'_-(1)=f'_+(1)$，得 $a=2$，$b=-1$.

(2) 由(1)得 $h=f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 2x-1, & 1<x\leqslant 2, \end{cases}$ 根据元素法可知 $dV=\pi x^2 dh$，故

$$v_0=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\pi x^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\begin{cases}\pi h\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}, & 0<x\leqslant 1,\\ \pi\left(\dfrac{h+1}{2}\right)^2\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}, & 1<x<2\end{cases}=\begin{cases}\pi h\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}, & 0<h\leqslant 1,\\ \pi\left(\dfrac{h+1}{2}\right)^2\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}, & 1<h<3,\end{cases}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\begin{cases}\dfrac{v_0}{\pi h}, & 0<h\leqslant 1,\\ \dfrac{4v_0}{\pi(h+1)^2}, & 1<h<3.\end{cases}$$

六、设圆柱面的高为 h，底半径为 r，则容积为 $\pi r^2h+\frac{2}{3}\pi r^3=14$，解得 $h=\frac{14}{\pi r^2}-\frac{2}{3}r$.

如果侧面单位面积的造价为 k，则顶部单位面积的造价为 $3k$，总造价为

$$p=k\cdot 2\pi rh+3k\cdot 2\pi r^2=2k\pi r\left(\frac{14}{\pi r^2}-\frac{2}{3}r\right)+6k\pi r^2=2k\left(\frac{14}{r}+\frac{7}{3}\pi r^2\right),$$

令

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}=2k\left(-\frac{14}{r^2}+\frac{14}{3}\pi r\right)=\frac{28k\pi}{3r^2}\left(r^3-\frac{3}{\pi}\right)=0$$

得惟一驻点 $r=\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$，显然该点为极小值点，也是最小值点. 即底圆半径为 $\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$ 时，该仓库的造价最省.

七、由条件 $f''(x)<0$ 得 $f'(x)$ 单调减少，因此满足拉格朗日中值定理 $f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$ 的 ξ 是惟一的，因此 ξ 定义了 $(x_0,+\infty)$ 上的一个函数 $\xi=\xi(x)$.

由于 $f'(x)$ 单调减少，因此 $y=f'(x)$ 存在反函数 $x=\varphi(y)$，从而

$$\xi=\varphi\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right).$$

又根据反函数的可导性结论可知，当 $f''(x)\neq 0$ 时，$x=\varphi(y)$ 可导，且 $\varphi'(y)=\frac{1}{f''(x)}<0$. 于是

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}=\varphi'\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]',$$

$$\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]'=\frac{f'(x)(x-x_0)-[f(x)-f(x_0)]}{(x-x_0)^2}$$

$$=\frac{f'(x)(x-x_0)-f'(\xi)(x-x_0)}{(x-x_0)^2}=\frac{f''(\eta)(x-\xi)}{x-x_0}<0\quad(\text{其中 }\eta\in(\xi,x)),$$

故 $\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}>0$，即 ξ 在 $(x_0,+\infty)$ 内单调增加.

College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

- 高等数学 第七版 上册 同济大学数学系
- 高等数学 第七版 下册 同济大学数学系
- 高等数学附册 学习辅导与习题选解 同济·第七版 同济大学数学系
- 高等数学习题全解指南 上册 同济·第七版 同济大学数学系
- 高等数学习题全解指南 下册 同济·第七版 同济大学数学系
- 工程数学——线性代数 第六版 同济大学数学系
- 线性代数附册 学习辅导与习题全解 同济·第六版 同济大学数学系
- 工程数学——概率统计简明教程 第二版 同济大学数学系
- 概率统计简明教程附册 学习辅导与习题全解 第二版 同济大学数学系
- 工程数学——新编统计学 同济大学数学系

ISBN 978-7-04-039691-1
9 787040 396911 >
定价 36.70 元