- 二阶微分
- 梯度的散度：$\nabla\cdot(\nabla u) = \nabla^2 u$
- 梯度的旋度：$\nabla\times(\nabla u) = 0$
- 散度的梯度 $\nabla(\nabla\cdot\vec{u})$

  Ps: $\nabla^2\vec{u} = (\nabla\cdot\nabla)\vec{u} \neq \nabla(\nabla\cdot\vec{u})$
- 旋度的散度 $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{u}) = 0$
- 旋度的旋度 $\nabla\times(\nabla\times\vec{u}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{u}) - \nabla^2\vec{u}$
- 罗德里格公式：$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\left(\frac{d}{dx}\right)^l (x^2-1)^l$

$\partial_i \cdot \partial_j \frac{r_j}{r^3}$

$\partial_i \; -3\frac{r_j \cdot r_i}{r^5}$

$-3\frac{3}{r^5}r_i + 15\frac{r_i}{r^5}$

$= 6\frac{r_i}{r^5}$

$\oint (d\vec{s}\cdot\vec{B})\vec{A}$

$= \oint (\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot d\vec{s} + \oint \vec{B}\times(\vec{A}\times d\vec{s})$

$= \int \nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})$

• 库仑定律推广:

$$\vec F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{q\rho(\vec r')d\tau'}{R^3}\vec R$$

$$(\vec R = \vec r - \vec r')$$

$$\vec F_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho_1(\vec r)\rho_2(\vec r')d\tau d\tau'}{R^3}\vec R$$

• 连续体电场:

$$\vec E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec r')d\tau'}{R^3}\vec R$$

$$\nabla_r\cdot\vec E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\rho(\vec r')d\tau'\,\nabla\left(\frac{\vec R}{R^3}\right)$$
$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\int\rho(\vec r)d\tau'\,\delta(\vec r-\vec r')$$
$$= \frac{\rho(\vec r)}{\varepsilon_0}$$

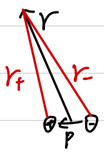
$$\left(\nabla\cdot\left(\frac{\vec R}{R^3}\right) = 4\pi\delta(\vec R)\right)$$

$$\vec E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\rho(\vec r')d\tau'\,\frac{\vec R}{R^3} \qquad \left(\nabla\cdot r = \frac{\vec r}{r}\right)$$
$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\rho(\vec r')d\tau'\,\nabla\left(\frac{1}{R}\right) \qquad \left(\nabla\left(\frac1R\right) = -\frac{\vec R}{R^3}\right)$$
$$= -\nabla\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int\rho(\vec r')d\tau'\cdot\frac1R\right]$$
∇作用于标量

$$\Rightarrow \varphi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int\rho(\vec r')d\tau'\cdot\frac1R]$$
只显微分性

对环路有: $\oint \vec E\cdot d\vec l = \oint -\nabla\cdot\varphi\cdot d\vec l$
$$= -\oint\frac{\partial\varphi}{\partial l}\cdot dl = 0$$
$\Rightarrow \varphi$ 为无旋场

• 电偶极子



$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+}-\frac{1}{r_-}\right)$$
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{r_- - r_+}{r^2}$$
$$= \frac{q\cdot l\cdot\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$
$$= \frac{\vec p\cdot\vec r}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\vec E = -\nabla\varphi$$
$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left[\frac{\vec p\cdot\vec r}{r^3}\right]$$
$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec p}{r^3} - 3\frac{(\vec p\cdot\vec r)\cdot\hat r}{r^4}\right]$$
$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[\vec p - 3(\vec p\cdot\hat r)\hat r\right]$$

$\nabla r = \frac{\vec r}{r}$ $\quad \nabla r^n = nr^{n-1}\hat r$ $\quad \nabla^2\left(\frac1r\right) = 4\pi\delta(\vec r)$

• 连续性方程:

$$\oint\vec j\cdot d\vec S = -\frac{d}{dt}\int_V\rho\, d\tau$$
$$\Rightarrow \int_V\nabla\cdot\vec j\, d\tau = -\frac{d}{dt}\int_V\rho\, d\tau$$
$$\Rightarrow \nabla\cdot\vec j + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

• 对于一般流守恒方程:

流密度散度 + 数密度变化率 = 0

• 安培定律

$$d\vec F_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\vec j_1 d\tau_1\times(\vec j_2 d\tau_2\times\vec R_{12})}{|\vec R_{12}|^3}$$

$$\vec R_{12} = \vec r_1 - \vec r_2$$

• 回路间安培力 牛三成立证明

$$\vec F_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{L_1}\oint_{L_2}\frac{d\vec l_1\times(d\vec l_2\times\vec R_{12})}{|\vec R_{12}|^3}$$
$$= \frac{\mu_0 I_1I_2}{4\pi}\oint_{L_1}\oint_{L_2}\frac{d\vec l_2(d\vec l_1\cdot\vec R_{12})}{|\vec R_{12}|^3} - \frac{\vec R_{12}}{R_{12}^3}(d\vec l_1\cdot d\vec l_2)$$
$$= -\frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}\oint_{L_2}d\vec l_2\oint_{L_1}d\vec l_1\cdot\nabla\left(\frac{1}{R_{12}}\right) - \frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}\oint_{L_1}\oint_{L_2}\frac{\vec R_{12}(d\vec l_1\cdot d\vec l_2)}{R_{12}^3}$$
$$= -\frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}\oint d\vec l_2\int\nabla\times\nabla\left(\frac{1}{R_{12}}\right)d\vec S - (\quad)$$
$$= -\frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}\oint_{L_1}\oint_{L_2}\frac{\vec R_{12}(d\vec l_1\cdot d\vec l_2)}{R_{12}^3}$$

- 磁场

令 $d\vec{F}_1 = \vec{j}_1 d\tau_1 \times \vec{B}(\vec{r})$

$$B(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}_2(\vec{r}')d\tau'\times\vec{R}}{R^3}$$ —— Biot-Sarvart 定律

- Lorentz力

单电荷 $\vec{j}(\vec{r}) = q\vec{v}\,\delta(\vec{r}-\vec{v}t)$

$$\vec{F} = \int_\tau q\,\delta(\vec{r}-\vec{v}t)\,d\tau\,\vec{v}\times\vec{B} = q\vec{v}\times\vec{B}$$

加 $\vec{E} \Rightarrow \vec{F} = q(\vec{v}\times\vec{B}+\vec{E})$

- 磁场散度旋度

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\tau'}\frac{\vec{j}(\vec{r}')d\tau'\times\vec{R}}{R^3}$$
$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\tau'}\vec{j}(\vec{r}')d\tau'\times\nabla_r\left(\frac{1}{R}\right)$$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\tau'}\nabla_r\left(\frac{1}{R}\right)\times\vec{j}(\vec{r}')d\tau'$$ $\nabla\times(\psi\vec{a}) = (\nabla\times\vec{a})\psi + \nabla\psi\times\vec{a}$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\tau'}\nabla\times\left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}\right)d\tau'$$
$$= \nabla_r\times\int_{\tau'}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}d\tau'$$
$$= \nabla_r\times\vec{A}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\tau'}\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}d\tau'$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = \nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) \equiv 0$$

$$\nabla\times\vec{B}(\vec{r}) = \nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \nabla(\underbrace{\nabla\cdot\vec{A}}_{①}) - \underbrace{\nabla^2\vec{A}}_{②}$$

① $$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\cdot\vec{j}(\vec{r}')d\tau'$$

$\nabla f(R) = -\nabla' f(R)$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)\cdot\vec{j}(\vec{r}')d\tau'$$
$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\nabla'\left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}\right) - \underbrace{\frac{1}{R}\nabla'\vec{j}(\vec{r}')}_{}\right]d\tau'$$

稳恒电流 $\nabla'\vec{j}(\vec{r}') = -\dot{\rho} = 0$

$$= -\frac{\mu}{4\pi}\oint\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}\cdot d\vec{S}\Big|_{r'\to\infty}$$
$$= 0$$

② $$\nabla^2\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\tau'}\vec{j}(\vec{r}')\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right)d\tau'$$
$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\tau'}\vec{j}(\vec{r}')\,\delta(\vec{R})\cdot 4\pi\,d\tau'$$
$$= -\mu_0\vec{j}(\vec{r})$$

综上 $\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j}(\vec{r})$

- 磁偶极子

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}d\tau' = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{d\vec{l}'}{R}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{(\vec{r}^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}' + \vec{r}'^2)^{\frac{1}{2}}} \approx \frac{1}{r\left(1-\frac{2\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}+\frac{\vec{r}'^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^3}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{l'}d\vec{l}'\left(\frac{1}{r}+\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^3}\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}\int(\vec{r}\cdot\vec{r}')d\vec{l}'$$

取一 $a\times b$ 矩形线圈

$$A_x(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}\left[\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left(xx' - y\frac{b}{2}\right)dx' + \int_{\frac{a}{2}}^{-\frac{a}{2}}\left(xx'+y\frac{b}{2}\right)dx'\right] = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}yab$$

同理 $A_y(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}xab$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}ab(-y\hat{x}+x\hat{y}) = \boxed{\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}}$$

- 电磁感应

$$\nabla\times\vec{E}_k = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

• 位移电流

令 $\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{G}$

有 $\nabla\cdot\vec{G}=0$ 且稳恒时 $\vec{G}\to\vec{j}$

$\Rightarrow \nabla\cdot\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$

$\nabla\cdot\vec{j}+\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_0\nabla\cdot\vec{E}=0$

$\nabla\cdot(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})=0$

$\Rightarrow \vec{G}=\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

• 极化电流

对于一个电偶极子: $\rho(\vec{r})=\rho_++\rho_-$

$=q\delta(\vec{r}-\vec{r}_+)-q\delta(\vec{r}-\vec{r}_-)$

$\vec{j}_p=\rho_+\vec{v}_++\rho_-\vec{v}_-$

$=\frac{\partial}{\partial t}(\rho_+\vec{r}_++\rho_-\vec{r}_-)$

Q: ρ_+ 中显含 $\vec{r}_+$, 求导何为0?

A: ρ_+ 为 $\vec{r}_+$ 的函数, $\vec{r}_+$ 为t的函数

由于 $\vec{P}=\frac{\vec{p}}{\Delta\Omega}=\frac{q(\vec{r}_+-\vec{r}_-)}{\Delta\Omega}$

$=\rho_+\vec{r}_++\rho_-\vec{r}_-$

$\therefore \vec{j}_p=\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$

• 麦克斯韦方程

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f\\ \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\end{cases}$$

• 4种边界条件速记

$$\begin{cases}\nabla\to\hat{n}\\ \rho,\vec{j}\to\sigma,\vec{\alpha}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\hat{n}\cdot(\vec{D}_1-\vec{D}_2)=\sigma_f\\ \hat{n}\times(\vec{E}_1-\vec{E}_2)=0\\ \hat{n}\cdot(\vec{B}_1-\vec{B}_2)=0\\ \hat{n}\times(\vec{H}_1-\vec{H}_2)=\vec{\alpha}_f\end{cases}$$

• 真空电磁场能量守恒

$d\vec{l}=\vec{v}dt$

$\Rightarrow d\vec{R}=\int\vec{E}\cdot\rho d\tau\cdot d\vec{l}$

$\Rightarrow \frac{dR}{dt}=\int\vec{E}\cdot\vec{j}\,d\tau=\frac{dW_m}{dt}$

根据麦克斯韦方程

$\vec{j}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{B}-\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

$\vec{E}\cdot\vec{j}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{B})-\frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{\partial E^2}{\partial t}$

$\nabla\cdot(\vec{B}\times\vec{E})=\vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{B})-\vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{E})$

$\Rightarrow \vec{E}\cdot\vec{j}=\frac{1}{\mu_0}[\nabla\cdot(\vec{B}\times\vec{E})+\vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{E})]-\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2)$

$=\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\vec{B}\times\vec{E})+\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t})-\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2)$

令 $\vec{S}_p=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}=\vec{E}\times\vec{H}$

$u=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2+\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$

$\Rightarrow=\nabla\cdot\vec{S}_p-\frac{\partial}{\partial t}u$

原式有 $\frac{dW_m}{dt}=\int[\nabla\cdot\vec{S}_p-\frac{\partial}{\partial t}u]d\tau$

$\frac{\partial}{\partial t}[W_m+\int u\,d\tau]=-\oint\vec{S}_p\cdot d\vec{S}$

• 电磁场动量守恒

$\frac{d\vec{G}_m}{dt}=\int(\rho\vec{E}+\rho\vec{v}\times\vec{B})d\tau$

$=\int(\rho\vec{E}+\vec{j}\times\vec{B})d\tau$

$=\int\vec{f}\,d\tau$

$\vec{f}=\varepsilon_0(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E}+\frac{1}{\mu_0}[\nabla\times\vec{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}]\times\vec{B}$

$=\varepsilon_0(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E}+\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B}-\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B}$

$-\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B}=-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B})+\varepsilon_0(\vec{E}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t})$

$=-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B})-\varepsilon_0\vec{E}\times(\nabla\times\vec{E})$

对于 $\vec{E}$ 相关项:

$(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E}-\vec{E}\times(\nabla\times\vec{E})$

$=(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E}-[\frac{1}{2}\nabla(\vec{E}\cdot\vec{E})-(\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E}]$

$=\nabla\cdot(\vec{E}\vec{E})-\nabla(\frac{1}{2}E^2)$

$=\nabla\cdot(\vec{E}\vec{E}-\frac{1}{2}E^2\overleftrightarrow{I})$

与 $\vec B$ 相关项: $\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\vec B)\times\vec B$

$$= -\frac{1}{\mu_0}\vec B\times(\nabla\times\vec B)$$

∵ $(\nabla\cdot\vec B)\cdot\vec B = 0$

原式 $= \frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot\left(\vec B\vec B - \frac{1}{2}B^2\overleftrightarrow{I}\right)$

$$\vec f = -\nabla\cdot\overleftrightarrow{T} - \frac{\partial}{\partial t}\vec g$$

$$\overleftrightarrow{T} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)\overleftrightarrow{I} - \varepsilon_0\vec E\vec E - \frac{1}{\mu_0}\vec B\vec B$$

$$\vec g = \varepsilon_0\vec E\times\vec B = \frac{1}{c^2}\vec S_p$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec G_m}{dt} = -\int d\vec s\cdot\overleftrightarrow{T} - \frac{d}{dt}\int\vec g\,d\tau$$

Q: $d\vec s\cdot\overleftrightarrow{T}$ 与 $\overleftrightarrow{T}\,d\vec s$ 有无区别

A: $\overleftrightarrow{T}$ 是对称张量, 无影响

△ Q: 对于一般 $\int\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}\,d\tau = \oint d\vec s\cdot\overleftrightarrow{T}$ or $\oint\overleftrightarrow{T}\cdot d\vec s$

A: $\oint d\vec s\cdot\overleftrightarrow{T}$

对于电磁力 $\vec F_{em} = \frac{\partial\vec G_m}{\partial t} = -\oint d\vec s\cdot\overleftrightarrow{T} - \frac{d}{dt}\int\vec g\,d\tau$

称 $\overleftrightarrow{T}$ 为麦克斯韦应力张量

• 带电粒子在磁场中的动量

机械动量 + 场动量

假设: ①低速 → 粒子产生磁场忽略 ②稳定磁场

电磁场动量: $\vec G_{em} = \int_V \varepsilon_0\vec E\times\vec B\,d\tau'$

$$= \int_V \varepsilon_0\vec E\times(\nabla\times\vec A)\,d\tau'$$

依公式 $\nabla(\vec a\cdot\vec b) = (\vec a\cdot\nabla)\vec b + (\vec b\cdot\nabla)\vec a + \vec a\times(\nabla\times\vec b) + \vec b\times(\nabla\times\vec a)$

$$\vec E\times(\nabla\times\vec A) = \nabla(\vec E\cdot\vec A) - (\vec E\cdot\nabla)\vec A - (\vec A\cdot\nabla)\vec E$$

$(\nabla\times\vec E = 0)$

由 $\nabla\cdot(\vec a\vec b) = (\nabla\cdot\vec a)\vec b + (\vec a\cdot\nabla)\vec b$

原式 $= \nabla(\vec E\cdot\vec A) - \nabla\cdot(\vec E\vec A + \vec A\vec E) + (\nabla\cdot\vec E)\vec A + (\nabla\cdot\vec A)\vec E$

$$= \nabla\cdot\left[(\vec E\cdot\vec A)\overleftrightarrow{I} - \vec E\vec A - \vec A\vec E\right] + \frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\vec r - \vec v t)\vec A$$

$(\nabla\cdot\vec A = 0)$

$$\vec G_{em} = \int_V \varepsilon_0\vec E\times(\nabla\times\vec A)\,d\tau' = q\vec A(\vec v t)$$

$$\vec p = m\vec v + q\vec A(\vec v t)$$

• 介质中的能量守恒

(线性) $\vec S_p = \vec E\times\vec H$

$u = \frac{1}{2}\vec D\cdot\vec E + \frac{1}{2}\vec H\cdot\vec B$

Q: $\vec S_p - \vec S_0 = \vec E\times\vec H - \vec E\times\frac{\vec B}{\mu_0} = -\vec E\times\vec M$

只有磁化贡献大?

A: △ $\vec E$ 中已含 $\vec P$ 贡献部分?

Q: $u - u_0 = \frac{1}{2}\vec P\cdot\vec E - \frac{1}{2}\vec M\cdot\vec B$, 是否合理?

电磁不对等原因? $\frac{1}{2}$?

• 介质中电磁场动量

若将介质与电磁场看作整体

$$\overleftrightarrow{T}' = \frac{1}{2}(\vec E\cdot\vec D + \vec B\cdot\vec H)\overleftrightarrow{I} - \vec D\vec E - \vec B\vec H$$

$\vec g' = \vec D\times\vec B$ → 包含电磁动量与束缚机械动量

图 2.10

2. 2.3.15针对的是电磁场对电荷/电流的作用力，然而对束缚电荷的作用力会使得介质产生畸变，从而产生一种内部的应力，这却是其不能描述的。好在，这些内部应力是内力，平均下来为0。因此用2.3.25式计算总力的时候没用问题。这其实是一个目前学界尚未完全解决的前沿问题。

3. 对电磁动量的不同定义也有争论，核心问题是介质内部的力平衡要考虑形变带来的张力。

- 电容张量

$Q_i = \sum_j C_{ij} \varphi_j$

$\vec{Q} = \overleftrightarrow{C}\ \vec{\varphi}$

- 汤姆孙定理

导体位置不动，导体上电荷可重排

⇒ 电荷分布使导体等势，能量最小

利用 $\delta\rho(\vec{r}) \Rightarrow \delta W = 0$ 与 $\delta \int \rho_i \, d\tau = \delta Q_i = 0$

证明时运用分部积分

- 恩肖定理

导体可动；移动足够慢使导体等势；

导体距离足够远致电荷分布不重排

⇒ W_{int} 不可能有最小值，只可能存在鞍点类型点

- 对于面电荷

假设空间电荷分布为任意，都与麦克斯韦张量计算结果相同

- 唯一性定理

① 静电体系内存在 $\rho(\vec{r})$ 与 $\varepsilon(\vec{r})$ 分布

② $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ 成立

⇒ 体系电场由边界条件唯一确定

- 本征函数展开法

求解： $\nabla^2 \varphi = 0$

选取适当 $\boxed{\text{坐标系}}$，求通解

假设得到解 $\{\varphi_1, \varphi_2 \cdots\}$

它们通常正交完备 $(\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \delta_{n,m})$

$\varphi = \sum C_n \varphi_n$ 其中展开系数由边界条件

$C_n = \langle \varphi_n | \varphi_0 \rangle = \int \varphi_n(\xi) \varphi_0(\xi) \, d\xi$

- 轴对称球坐标系问题（不含 ϕ）

φ 本征解可写为 $r^l P_l(\cos\theta)$，$r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta)$

$\Rightarrow \varphi = \sum \left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right] P_l(\cos\theta)$

$P_l(x)$ 为 Legendre 多项式

前几项为 $\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ \cdots \end{cases}$

有正交关系 $\int P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) \, d(\cos\theta) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$

- 对与 z 无关的柱对称问题

其本征解为 $\rho^{\pm n} e^{\pm i n \varphi}$，$\ln\rho$，$1$

通解：$\varphi = A_0 + B_0 \ln\rho + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \rho^n + B_n \rho^{-n}) \cos(n\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \rho^n + D_n \rho^{-n}) \sin(n\phi)$

有正交关系 $\int \cos(n\phi) \sin(n\phi) \, d\phi = 0$

$\int \cos(n\phi) \cos(n'\phi) = \int \cos(n\phi) \sin(n'\phi) \, d\phi = 0$

· 多极展开

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}')d\tau}{R}$$

其中 R 有 $R=\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta}$

$=r\sqrt{1+\varepsilon}$

$\varepsilon\equiv\frac{r'}{r}\left(\frac{r'}{r}-2\cos\theta\right)$

$\frac{1}{R}$ 对 ε 展开有:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{r}\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{3}{8}\varepsilon^2\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\theta)$$

此时 V 有

$$V(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{(n+1)}}\int(r')^n P_n(\cos\theta)\rho(\vec{r}')d\tau'$$

(球坐标形式)

$$\varphi=\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2\cdots$$

$\varphi_0=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}$, $Q=\int\rho(\vec{r}')d\tau'$

$\varphi_1=-\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\nabla\frac{1}{r}$ $\vec{p}=\int\rho(\vec{r}')\vec{r}'d\tau'$

$\varphi_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2}\int\rho(\vec{r}')\vec{r}'\vec{r}'d\tau':\nabla\nabla\frac{1}{r}$

$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{6}\overleftrightarrow{D}:\nabla\nabla\frac{1}{r}$

· 偶极矩在外场中受力/力矩

$\vec{F}=(\vec{p}\cdot\nabla)\vec{E}$

$\vec{M}=\vec{p}\times\vec{E}$

· 静磁场唯一性定理

由 B-S 定理可得出 $\nabla^2\vec{A}=-\mu\vec{j}$

在 给定 边界条件 $\begin{cases}\hat{e}_n\times\vec{A}\\ \hat{e}_n\times\vec{H}\end{cases}$ 时, 且 B-H

关系单调且一一对应 (特例: 铁磁)

体系内磁场由电流和磁介质分布与边界条件唯一确定