

# 关于自由下落猫的双刚体模型

钟 奉 俄

(西安矿业学院)

**提要** Kane 和 Scher<sup>[1]</sup> 以两个完全相同的轴对称刚体为力学模型研究了自水平位置自由下落的猫的转体运动. 刘延柱<sup>[2]</sup>讨论了非轴对称情况. 本文证明双刚体模型在自由下落时具有保持转体轴方向不变的特性,因而这种模型只能模拟猫在平卧姿态下落时的转体运动,不能说明在其它姿态下落的情况. 本文对双刚体模型作了修改,可以模拟猫在任何姿态转为四脚踏地的情况.

Kane 和 Scher<sup>[1]</sup> 用两个完全相同的轴对称刚体作为模型,研究了在平卧姿态自由下落的猫的转体运动. 刘延柱<sup>[2]</sup>考虑了非轴对称模型,得到求积形式的解. 文献[1]、[2]在建立方程之前均假定猫的转体轴在惯性空间不变. 本文在推导转体运动方程时不需要这个假定,并进一步证明转体轴在惯性空间方向不变是这种双刚体模型本身的固有特性. 这表明以两个完全相同的刚体为模型只能模拟猫在平卧姿态自由下落时的转体运动. 本文对双刚体模型作了修改,使之能够模拟猫在任何姿态自由下落时的转体运动.

## 一、猫的转体运动

和文献[1,2]一样用两个以铰链 $O$ 相连的同样的刚体 $G_1, G_2$ 代表猫的前后半身,并假定脊柱 $Ox_s (s=1,2)$ 是 $G_s$ 的中心惯性主轴;脊柱可以在任何平面内弯曲,但不能相对扭转. 设 $C_s$ 为 $G_s$ 的质心,  $OC_1 = OC_2 = a$ ,  $Ox_s, y_s, z_s$ 为 $G_s$ 在 $O$ 点的主轴系,取 $Ox_1$ 沿 $OC_1$ 方向为正,  $Ox_2$ 沿 $C_2O$ 方向为正.  $Ox_s, z_s$ 为 $G_s$ 的纵剖面,  $Oz_s$ 表示由背到腹的方向.  $Ox_1, Ox_2$ 所在平面 $\Pi$ 是猫的脊柱弯曲平面. 取 $Ox_1, Ox_2$ 二轴正向夹角的平分线为 $Ox$ 轴,  $\Pi$ 平面为 $Oxz$ 平面,则猫的质心 $C$ 始终在 $z$ 轴上. 按右手系决定 $Oy$ (图1),  $G_s$ 在 $Oxyz$ 坐标系中的位置用欧拉角 $\phi_s, \theta_s, \varphi_s$ 表示,其中 $\varphi_s$ 是绕 $Ox_s$ 的自转角,  $Ox$

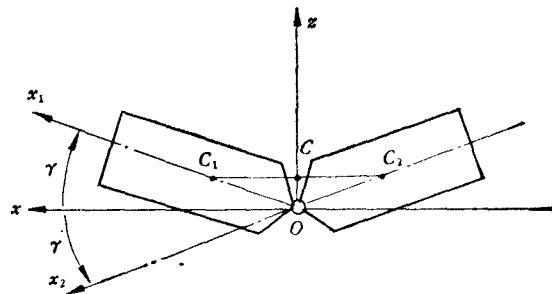


图 1

本文于1983年5月3日收到.

是  $G_s$  的进动轴,  $\theta_s$  是章动角. 因为自转轴始终在  $Ox_2z_2$  平面上, 所以  $G_s$  没有进动. 又因为没有相对扭转, 所以  $G_1, G_2$  的自转角速度必须相同, 即  $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2$ . 取  $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$ , 则  $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) \triangleq \lambda(t)$ . 又因为  $Ox$  平分  $\angle x_1Ox_2$ , 所以  $\theta_1(t) = -\gamma(t), \theta_2(t) = \gamma(t)$ . 因而由  $Ox_1y_1z_1$  到  $Oxyz$  的变换矩阵 (图 2 只画出  $Ox_2y_2z_2$ )

$$Q_s = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \mp \sin \gamma \sin \lambda & \mp \sin \gamma \cos \lambda \\ 0 & \cos \lambda & -\sin \lambda \\ \pm \sin \gamma & \cos \gamma \sin \lambda & \cos \gamma \cos \lambda \end{bmatrix} \quad (1)$$

(式中的“ $\pm$ ”号, 上边的对应于  $s = 1$ , 下边的对应于  $s = 2$ , 下同), 即

$$[i, j, k]^T = Q_s [i_s, j_s, k_s]^T$$

其中  $i, j, k; i_s, j_s, k_s$  分别表示  $Oxyz$  和  $Ox_s y_s z_s$  各轴之单位矢.

将  $Oz_1, Oz_2$  所在之平面记作  $\Pi_1$  (它可以表示猫腹部所朝之方向), 则由(1)式得

$$i \cdot (k_1 \times k_2) = 0 \quad (2)$$

这表明  $Ox, Oz_1, Oz_2$  共面. 平面  $\Pi_1$  和  $\Pi$  相交于  $Ox$  轴. 设其间夹角为  $\sigma$ , 则

$$\sin \sigma = \left| k \times \frac{k_1 + k_2}{|k_1 + k_2|} \right| = \frac{\sin \lambda}{\sqrt{1 - \sin^2 \gamma \cos^2 \lambda}} \quad (3)$$

因此只要确定了  $Oxyz$  坐标系之位置, 猫的腹部所朝之方向便随  $\lambda$  和  $\gamma$  之值而定.

将  $Oxyz$  坐标系平移, 使原点与质心  $C$  重合, 得坐标系  $Cxyz$ , 称为体轴系. 设体轴系转动的角速度为  $\Omega$ , 则猫对质心  $C$  的动量矩

$$H_C = \sum_{s=1}^2 I'_C \cdot (\Omega + \omega_s) = I_C \cdot \Omega + \sum_{s=1}^2 I'_C \cdot \omega_s \quad (4)$$

$I'_C$  是  $G_s$  对整体质心  $C$  的惯量张量;  $\omega_s$  是  $G_s$  相对于体轴系的角速度矢量;  $I_C = I'_C + I_C$  是猫的整体对质心  $C$  的惯量张量, 由于  $G_s$  的相对运动,  $I_C$  将随时间而变. 如果设想将系统在  $t$  时刻的位形“冻结”, 则  $I_C \cdot \Omega$  表示“冻结”了的系统对质心  $C$  的动量矩, 我们称其为系统的刚化动量矩;  $\sum_{s=1}^2 I'_C \cdot \omega_s$  则为系统相对于体轴系的动量矩, 称其为相对动量矩, 记作  $H'$ .

如果除重力外, 其它外力均不考虑, 则系统对质心的动量矩  $H_C$  在运动中不变, 即

$$H_C = I_C \cdot \Omega + H' = h \quad (\text{常矢量}) \quad (5)$$

$\Omega(t)$  规定了猫的姿态的变化规律. 这规律由 (5) 式决定. 我们称(5)式为自由下落猫的转体运动动力学方程.

设  $G_s$  的质量为  $m$ , 中心主惯性矩为  $A, B, C, OC_s = a$ , 则

$$CC_s = \pm a \cos \gamma i \quad (6)$$

$I'_C$  在体轴系中的分量矩阵为

$$I'_C = Q_s \text{diag}[A, B, C] Q_s^T + ma^2 \cos^2 \gamma \text{diag}[0, 1, 1] \quad (7)$$

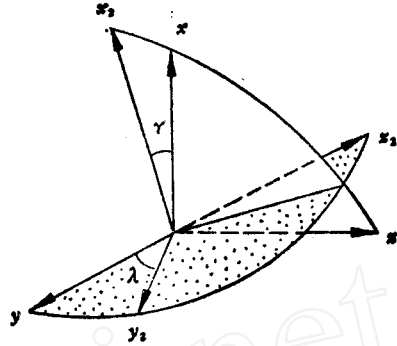


图 2

其中  $Q_i^T$  是  $Q_i$  的转置. 将(1)式代入(7)式,得

$$\left. \begin{aligned} I_{11}' &= A \cos^2 \gamma + B \sin^2 \gamma \sin^2 \lambda + C \sin^2 \gamma \cos^2 \lambda, \\ I_{22}' &= B \cos^2 \lambda + C \sin^2 \lambda + m a^2 \cos^2 \gamma, \\ I_{33}' &= A \sin^2 \gamma + B \cos^2 \gamma \sin^2 \lambda + C \cos^2 \gamma \cos^2 \lambda + m a^2 \cos^2 \gamma, \\ I_{23}' &= I_{32}' = (B - C) \cos \gamma \sin \lambda \cos \lambda, \\ I_{12}' &= I_{21}' = \mp (B - C) \sin \gamma \sin \lambda \cos \lambda, \\ I_{13}' &= I_{31}' = \pm (A - B \sin^2 \lambda - C \cos^2 \lambda) \sin \gamma \cos \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

因为  $G_s$  相对体轴系无进动,所以  $G_s$  相对体轴系的角速度

$$\boldsymbol{\omega}_s = \dot{\lambda} \cos \gamma \mathbf{i} + \dot{\gamma} \mathbf{j} \pm \dot{\lambda} \sin \gamma \mathbf{k} \quad (9)$$

因而  $G_1, G_2$  对整体质心  $C$  的相对动量矩

$$\mathbf{H}' = \sum_{s=1}^2 \mathbf{I}_C \cdot \boldsymbol{\omega}_s = 2[\dot{\lambda} A \cos \gamma + \dot{\gamma} (B - C) \sin \gamma \sin \lambda \cos \lambda] \mathbf{i} \quad (10)$$

将(8)式对  $s$  求和,便得猫对质心  $C$  的惯量张量在体轴系上的分量:

$$\left. \begin{aligned} I_{11} &= 2(A \cos^2 \gamma + B \sin^2 \gamma \sin^2 \lambda + C \sin^2 \gamma \cos^2 \lambda) \\ I_{22} &= 2(B \cos^2 \lambda + C \sin^2 \lambda + m a^2 \cos^2 \gamma) \\ I_{33} &= 2(A \sin^2 \gamma + B \cos^2 \gamma \sin^2 \lambda + C \cos^2 \gamma \cos^2 \lambda + m a^2 \cos^2 \gamma) \\ I_{23} &= I_{32} = 2(B - C) \cos \gamma \sin \lambda \cos \lambda \\ I_{12} &= I_{21} = I_{13} = I_{31} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

将(10)、(11)式代入方程(5),并令  $h = 0$ , 便得自由下落猫的转体动力学方程:

$$\left. \begin{aligned} I_{11} Q_x &= -H_x' \\ I_{22} Q_y + I_{23} Q_z &= 0 \\ I_{32} Q_y + I_{33} Q_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

因为(12)式中的第二和第三个方程的系数行列式在一般情况下不等于零,因而必有  $Q_y = Q_z = 0$ . 这表明在猫下落期间,体轴系只有绕  $Cx$  轴的转动,因而  $Cx$  轴在惯性空间保持方向不变. 由(12)式中的第一式得:

$$Q_x = -\frac{H_x'}{I_{11}} = -\frac{A \dot{\lambda} \cos \gamma + \dot{\gamma} (B - C) \sin \gamma \sin \lambda \cos \lambda}{A \cos^2 \gamma + (B \sin^2 \lambda + C \cos^2 \lambda) \sin^2 \gamma} \quad (13)$$

这是体轴系(即  $\Pi$  平面)转动的角速度. 因为  $\Pi$  平面只有绕  $Cx$  轴的转动,因而  $\Pi_1$  平面也只能绕固定方向  $Ox$  转动. 将(3)式对时间求导,得

$$\dot{\sigma} = (\dot{\lambda} \cos \gamma + \dot{\gamma} \sin \gamma \sin \lambda \cos \lambda) / (1 - \sin^2 \gamma \cos^2 \lambda) \quad (14)$$

将(13)和(14)二式相加,得  $\Pi_1$  平面绕  $Ox$  轴转动的角速

$$\dot{\phi} = \dot{\sigma} + Q_x = \dot{\sigma} - \frac{A \dot{\lambda} \cos \gamma + \dot{\gamma} (B - C) \sin \gamma \sin \lambda \cos \lambda}{A \cos^2 \gamma + (B \sin^2 \lambda + C \cos^2 \lambda) \sin^2 \gamma} \quad (15)$$

这就是文献[2]中的(14)式. 它的右端是  $\gamma, \lambda, \dot{\gamma}, \dot{\lambda}$  的连续函数,因此当在时域上给定  $\gamma(t), \lambda(t)$  时,上式对任意给定的初值  $\phi_0$ ,有唯一解存在. 这表明(15)式所描述的转体运动是一个受控过程,  $\phi$  是这个过程的相坐标,  $\gamma, \lambda$  是决定过程进程的控制参数(也可以不按时域给定). 给定弯腰方式  $\gamma(t), \lambda(t)$ ,即可算出  $\Pi_1$  平面的转角. 也可以根据对转体的要求,决定控制规律  $\gamma(t), \lambda(t)$ . 但本文所给出的方法不需要事先假定  $Cx$  轴保持水平方

向不变.

## 二、双刚体模型的局限制性

现在证明,要  $Cx$  轴在惯性空间方向不变必须  $\mathbf{h}$  为零或与  $Cx$  轴平行,而且只有在这种情况下, $Cx$  轴才保持方向不变.

为了证明这一论断,将方程(5)用欧拉角表示. 设体轴系  $Cxyz$  在平移坐标系  $C\xi\eta\zeta$  中的欧拉角为  $\psi, \theta, \varphi$ ,  $C\xi$  是进动轴,  $Cz$  是自旋轴,则  $C\xi\eta\zeta$  到  $Cxyz$  的变换矩阵

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta \cos\varphi & \sin\varphi \cos\psi + \sin\psi \sin\theta \cos\varphi & \sin\psi \sin\varphi - \cos\psi \sin\theta \cos\varphi \\ -\cos\theta \sin\varphi & \cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \sin\theta \sin\varphi & \sin\psi \cos\varphi + \cos\psi \sin\theta \sin\varphi \\ \sin\theta & -\sin\psi \cos\theta & \cos\psi \cos\theta \end{bmatrix} \quad (16)$$

$\Omega$  在体轴上的投影与  $\psi, \theta, \varphi$  及其导数间的关系为:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{1}{\cos\theta} (\cos\varphi \Omega_x - \sin\varphi \Omega_y) \\ \dot{\theta} &= \sin\varphi \Omega_y + \cos\varphi \Omega_z \\ \dot{\varphi} &= -\tan\theta (\cos\varphi \Omega_x - \sin\varphi \Omega_y) + \Omega_z \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

由方程(5)得  $\Omega = I^{-1}(\mathbf{h} - \mathbf{H}')$ , 代入(17)式得体轴系欧拉角所满足的微分方程:

$$\dot{\mathbf{x}} = \Psi I^{-1}(R\mathbf{h} - \mathbf{H}'), \quad (18)$$

其中  $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})^T$ ,  $\mathbf{h} = (h_\xi, h_\eta, h_\zeta)^T$ ,  $\mathbf{H}' = (H'_x, H'_y, H'_z)^T$ ,  $I^{-1}$  是  $I$  的逆在体轴系中的分量式,  $\Psi$  是(17)式右端  $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$  的系数矩阵. 使平移坐标系  $C\xi\eta\zeta$  与体轴系在初始时刻的取向一致, 那么要猫只绕  $Cx$  轴转动, 即要求(18)式中有  $\theta = 0, \varphi = 0$  的解, 就必须

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi} &= (h_\xi - H'_x)/I_{11}, \\ 0 &= I_{33}(h_\eta \cos\psi + h_\zeta \sin\psi) + I_{23}(h_\eta \sin\psi - h_\zeta \cos\psi), \\ 0 &= -I_{23}(h_\eta \cos\psi + h_\zeta \sin\psi) + I_{22}(-h_\eta \sin\psi + h_\zeta \cos\psi) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

(因为  $I_{11} \neq 0, I_{22}I_{33} - I_{23}^2 \neq 0$ ), 或

$$\begin{aligned} (I_{33}h_\eta - I_{23}h_\zeta) \cos\psi + (I_{33}h_\zeta + I_{23}h_\eta) \sin\psi &= 0, \\ (I_{22}h_\zeta - I_{23}h_\eta) \cos\psi - (I_{22}h_\eta + I_{23}h_\zeta) \sin\psi &= 0. \end{aligned}$$

因为  $\sin\psi, \cos\psi$  不同时为零, 故上式系数行列式必须为零, 简化后得:

$$(I_{22}I_{33} - I_{23}^2)(h_\eta^2 + h_\zeta^2) = 0. \quad (20)$$

如前所述,  $I_{22}I_{33} - I_{23}^2 \neq 0$ , 故必有  $h_\eta = 0, h_\zeta = 0$ , 即  $\mathbf{h}$  必须平行于  $Cx$  轴.

反之, 若  $\mathbf{h}$  与起始时刻的  $Cx$  轴平行, 即  $h_\xi = h_1, h_\eta = 0, h_\zeta = 0$ , 则由(18)式得:

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \Psi I^{-1} \begin{bmatrix} h_1 \cos\theta \cos\varphi - H'_x \\ -h_1 \cos\theta \sin\varphi \\ h_1 \sin\theta \end{bmatrix} \quad (21)$$

在上式中, 当  $\theta = 0, \varphi = 0$  时,  $\Psi = E$ , 而  $(I^{-1})_{21} = 0, (I^{-1})_{31} = 0$ , 故  $\theta, \varphi$  有零解. 又因为方程(21)右端满足解的存在与唯一性条件, 所以只要  $\theta(t_0) = 0, \varphi(t_0) = 0$ , 即取  $C\xi\eta\zeta$  与  $Cxyz$  的初始取向一致, 便有  $\theta(t) = 0, \varphi(t) = 0$ . 也就是说, 只要  $\mathbf{h}$  沿  $Cx$  轴, 那么猫在下落过程中,  $Cx$  轴的方向必保持不变. 证毕.

由此可见,这种不变性是[1,2]所采用的模型本身的一个固有特性.对于这样的模型,当猫自由下落时,无论怎样弯腰,即无论取怎样的 $\lambda(t)$ , $\gamma(t)$ , $Cx$ 轴方向总是不会变的.如果猫自竖直姿态自由落下,即 $Cx$ 轴在铅直方向,或只有绕竖直轴的 $h$ ,则猫下落时不论怎样弯腰、旋转,纵轴都不可能转到水平位置,因而不可能四脚同时落地.这与猫的实际情况不符.可见用两个相同的刚体模拟猫的转体运动有一定的局限性.它只适用于自平卧姿态下落的情况.

### 三、修正的双刚体模型

为了使双刚体模型能够模拟猫自非平卧姿态自由下落的情况,我们对双刚体模型作

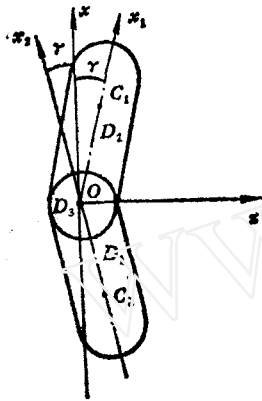


图 3

如下修改.设有二个完全相同的刚体 $D_1$ 和 $D_2$ ,其间通过一质量为 $m'$ 的柱形销 $D_3$ 相联结(图3).弯腰时, $D_1$ 绕 $D_2$ 的轴线转动, $D_3$ 与 $D_2$ 结成一体绕 $D_3$ 轴线转动,即将猫体用两个不相同的刚体 $G_s$ 表示,其中 $G_1 = D_1$ , $G_2 = D_2 + D_3$ ;直体时, $D_3$ 与 $D_1$ 结成一体绕 $D_3$ 轴线转动,这时有 $G_1 = D_1 + D_3$ , $G_2 = D_2$ .也就是说,沿体长将猫分成三段,弯腰时,头一段和后两段分别代表猫的前半身和后半身;直体时头两段和尾部一段分别代表猫的前半身.这样的要求对于猫是可以实现的,因弯腰、伸直在体内并没有一个固定的旋转中心,而可以由猫的意识支配在一定范围内变化.因此,也可以说这是一个三刚体模型,但其中 $D_3$ 在可能范围内取大取小,也可以缩小为一点而成为双刚体模型,像平卧时自由下落所取的那样.以下证明,由于弯腰和直体

时对 $Oy$ 轴有不同的相对动量矩,如此反复弯腰多次后,代表猫的取向的体轴系就可以绕 $Oy$ 轴转过任何角度.

仍采用前面的坐标和记法.此时质心 $C$ 仍在 $z$ 轴上.设 $D_1$ 和 $D_2$ 的质量为 $m$ ,令

$$\mu = \frac{m'}{M} = \frac{m'}{2m + m'}, \text{ 则}$$

$$CC_3 = -(1 - \mu)a \sin \gamma k \quad (22)$$

这里 $a$ 是 $D_s$ 的质心 $C_s$ 到柱销 $D_3$ 中心的距离,因而

$$CC_s = \pm a \cos \gamma i + \mu a \sin \gamma k \quad (s = 1, 2) \quad (23)$$

若猫只弯腰不旋转,即 $\lambda \equiv 0$ ,则 $G_1, G_2$ 的相对角速度 $\omega_s = \mp \dot{\gamma} j$ ;猫的相对动量矩

$$H' = [B' + m'(1 - \mu)^2 a^2 \sin^2 \gamma] \dot{\gamma} j \quad (24)$$

式中 $B'$ 是 $D_3$ 对 $Oy$ 轴的转动惯量.此时体轴系 $Cxyz$ 为中心惯性主轴系.由转体方程(5)得

$$\left. \begin{aligned} I_{11} \Omega_x &= 0, & I_{33} \Omega_z &= 0 \\ I_{22} \Omega_y &= -H'_y = -[B' + m'(1 - \mu)^2 a^2 \sin^2 \gamma] \dot{\gamma} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

式中

$$I_{22} = 2B + B' + 2ma^2 \cos^2 \gamma + 2m\mu^2 a^2 \sin^2 \gamma + m'(1 - \mu)^2 a^2 \sin^2 \gamma$$

由此可见体轴系只有绕 $y$ 轴的转动.设转角为 $\theta$ ,则 $\Omega_y = \frac{d\theta}{dt}$ ,由(25)式的第三式得弯

腰  $\gamma_m$  所产生的转角  $\Delta\theta$ :

$$\Delta\theta = - \int_0^{\gamma_m} \frac{B' + m'(1-\mu)^2 a^2 \sin^2 \gamma}{2B + B' + 2ma^2 \cos^2 \gamma + [2m\mu^2 + m'(1-\mu)^2] a^2 \sin^2 \gamma} d\gamma \quad (26)$$

或

$$\Delta\theta = - \frac{1}{2} \int_0^{\gamma_m} \frac{B' + ma^2 \mu(1-\mu) - ma^2 \mu(1-\mu) \cos 2\gamma}{2B + B' + ma^2(1+\mu) + ma^2(1-\mu) \cos 2\gamma} d(2\gamma) \quad (26')$$

由于  $\gamma_m < \frac{\pi}{2}$ ,  $B' + m'(1-\mu)^2 a^2 \sin^2 \gamma < I_{22}$ , 所以  $\Delta\theta < \frac{\pi}{2}$ , 即弯腰一次不能使体轴系转  $90^\circ$ . 但若使身体伸直, 并使  $D_3$  随  $D_1$  相对  $D_2$  转动, 即  $G_1 = D_1 + D_3$ ,  $G_2 = D_2$ , 则有

$$H' = [B' + m'(1-\mu)^2 a^2 \sin^2 \gamma] \dot{\gamma} \quad (27)$$

此时  $\gamma$  由  $\gamma_m$  减小到 0,  $\Delta\theta$  增大到  $2\Delta\theta$ , 如此反复, 便可使  $\theta$  达到任何值.

例如, 取  $\frac{m'}{m} = \frac{3}{4}$ , 猫的细长比  $(B-A)/A = 3^{1/2}$ , 并将  $D_1, D_2$  看作圆柱体, 且其轴线与  $D_3$  的轴线垂直, 则计算表明, 当取  $\gamma_m = 75^\circ$  时,  $\Delta\theta = 15^\circ$ , 因此只需反复弯腰三次就可以由竖直姿态转为四脚落地. 若  $\gamma_m$  减小, 则反复次数需增多.

### 参 考 文 献

- [1] Kanc, T. R., Scher, M. P., *Int. J. Solids Struct.*, **5**, 7 (1963), 663—670.  
 [2] 刘延柱, 力学学报, 4(1982), 387—393.

## A TWO-RIGID-BODY MODEL OF THE FREE-FALLING CAT

Zhong Fenge

(Xian Institute of Mining)

### Abstract

It is proved in this paper that the inertial orientation of the turning axes of the model of the two rigid bodies remains unaltered while free-falling. Thus such a model can be used only to simulate the free-falling cat landing on its feet from a horizontal position. Here we modify the model in order to explain the free-falling cat landing on its feet from other postures, especially from the perpendicular position.