

# 自由下落猫的转体运动

刘延柱

(上海交通大学)

**摘要** 本文讨论猫自由下落时四肢着地的动力学解释。Kane 和 Scher 对由两个轴对称刚体组成的力学模型作数值积分研究猫的转体运动。本文考虑猫躯干的非轴对称性并重新选择角度坐标。导出的非线性微分方程存在解析积分,从而得出转体运动的一般规律。计算结果与数值积分结果相一致。

## 一、引言

猫自由下落时四肢先着地现象早在 1894 年即开始讨论<sup>[1-3]</sup>,近年来为探索失重状态下人的转体规律而重新引起注意。为了解决猫的转体运动与零动量矩之间的矛盾而先后提出各种解释。以 Лойцянский 为代表的理论力学教材用猫尾旋转解释转体,但实验证明无尾猫同样能完成转体而否定了这一论点。实际上由于猫尾与躯体的惯量矩相差悬殊,在躯体完成翻转的不到半秒钟内猫尾必须反向挥动数十圈才能保持总动量矩为零,这显然难以置信。Guyou<sup>[2]</sup>的解释是猫的前后部分依次转体,由于四肢的配合使前半部转体时惯量矩小于后半部,后半部转体时惯量矩小于前半部。McDonald<sup>[5,6]</sup>详细阐述了这一论点,但缺乏严格的力学分析。Rademaker 和 Ter Braak<sup>[4]</sup>用弯曲脊柱解释转体,假定前后脊柱以腰部为顶点作圆锥运动。Kane 和 Scher<sup>[7]</sup>按同样观点对由两个轴对称刚体组成的力学模型建立运动方程作数值积分,计算结果与摄影记录符合得十分理想。

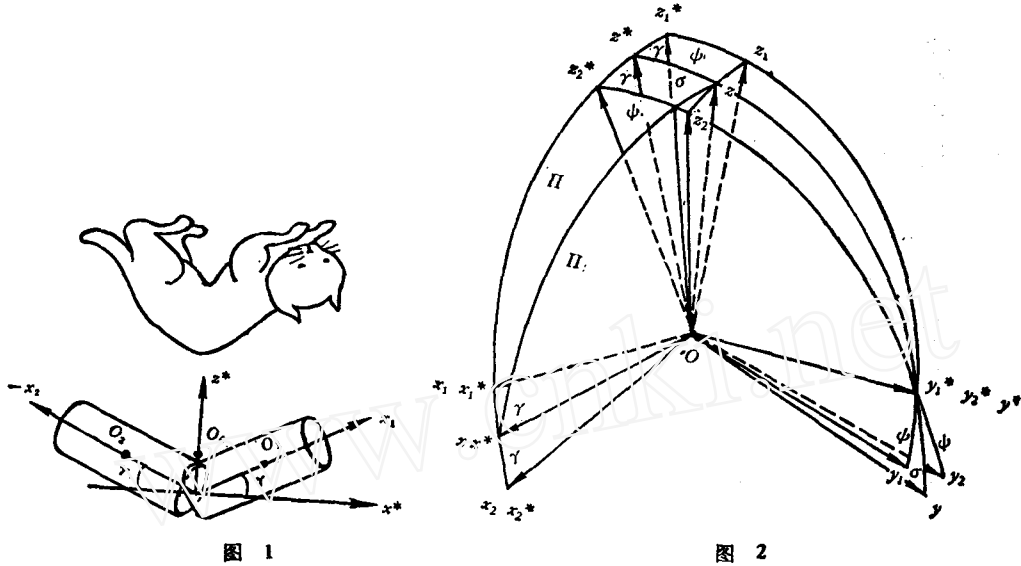
本文取类似的力学模型,但考虑猫体的非轴对称性并重新选择角度坐标。导出的非线性微分方程存在解析积分,从而有可能讨论转体运动的一般规律。代入猫的具体数据后本文计算结果与文献[7]的数值积分结果完全一致。

## 二、坐标系和运动方程

以两个外形和质量分布完全相同的刚体  $B_1$ 、 $B_2$  代表猫的前后体,在腰部的  $O$  点处以铰相联结,此联结允许脊柱沿任何平面弯曲但不允许前后体之间产生扭转(图 1)。以  $O$  为原点建立  $B_i$  的主轴坐标系  $(x_i, y_i, z_i)$  ( $i = 1, 2$ ),  $Ox_i$  通过  $B_i$  的质心  $O_i$  沿脊柱指向头部 ( $i = 1$ ) 或尾部的负方向 ( $i = 2$ ),  $Oz_i$  指向腹部。设  $(x_1, y_1, z_1)$  绕  $Ox_1$  转过  $\psi$  角为  $(x_1^*, y_1^*, z_1^*)$ , 绕  $Oy_1^*$  转过  $\theta$  角为  $(x_2^*, y_2^*, z_2^*)$ , 绕  $Ox_2^*$  转过  $\varphi$  角为  $(x_2, y_2, z_2)$ ,  $\psi$ 、 $\theta$ 、 $\varphi$  为  $(x_2, y_2, z_2)$  相对  $(x_1, y_1, z_1)$  的欧拉角。再建立  $(x^*, y^*, z^*)$  坐标系:  $Ox^*$  和  $Oz^*$  分别沿  $\angle x_1^* Ox_2^*$  和  $\angle z_1^* Oz_2^*$  的平分角线方向,  $Oy^*$  与  $Oy_1^*$ 、 $Oy_2^*$  重合,  $r = \theta/2$  为前后脊柱相对  $Ox^*$  的弯

本文于 1981 年 8 月 20 日收到。

曲角。包含  $Ox_1$  和  $Ox_2$  的  $(x^*Oz^*)$  坐标面为猫的脊柱弯曲平面  $\Pi$ ,  $\phi$  角标志  $\Pi$  平面在体内的方位。



写出  $B_2$  相对  $B_1$  的角速度  $\omega'$  对  $(x^*y^*z^*)$  的投影式:

$$\omega' = (\dot{\phi} + \dot{\varphi}) \cos \gamma i^* + 2\dot{\gamma} j^* + (\dot{\phi} - \dot{\varphi}) \sin \gamma k^* \quad (1)$$

猫前后体之间无扭转条件要求沿  $Ox^*$  的相对角速度分量为零, 推出  $\dot{\varphi} = -\dot{\phi}$ . 由于起始时亦无扭转, 积分得到

$$\varphi = -\phi \quad (2)$$

考虑此约束条件的坐标系关系如图 2 和表 1、2 所示. (1) 式简化为

$$\omega' = 2(\dot{\gamma} j^* + \dot{\phi} \sin \gamma k^*) \quad (3)$$

表 1

	$x_1$	$y_1$	$z_1$
$x^*$	$\cos \gamma$	$\sin \gamma \sin \phi$	$-\sin \gamma \cos \phi$
$y^*$	0	$\cos \phi$	$\sin \phi$
$z^*$	$\sin \gamma$	$-\cos \gamma \sin \phi$	$\cos \gamma \cos \phi$

从表 1、2 推出

$$k_1 + k_2 = 2(\sin \phi j^* + \cos \gamma \cos \phi k^*) \quad (4)$$

表明  $\angle z_1 O z_2$  的平分角线方向与  $Ox^*$  垂直, 也指向猫的腹部. 建立  $(xyz)$  坐标系: 以上述  $k_1 + k_2$  为  $Oz$  轴,  $Ox$  与  $Ox^*$  重合 (图 2),  $(xOz)$  坐标面相当于猫的纵剖面  $\Pi_1$ . 设  $\sigma$  为  $\Pi_1$  相对  $\Pi$  的转角, 利用  $\sin \sigma = |k \times k^*|$  推出

$$\sin \sigma = \sin \phi / R, \quad R = \sqrt{1 - \sin^2 \gamma \cos^2 \phi} \quad (5)$$

脊柱弯曲后猫的质心  $O_c$  位于  $Oz^*$  轴上, 将上述各坐标系的原点从  $O$  平移至  $O_c$ . 实

表 2

	$x_2$	$y_2$	$z_2$
$x^*$	$\cos \gamma$	$-\sin \gamma \sin \phi$	$\sin \gamma \cos \phi$
$y^*$	0	$\cos \phi$	$\sin \phi$
$z^*$	$-\sin \gamma$	$-\cos \gamma \sin \phi$	$\cos \gamma \cos \phi$

验中观察到,以水平姿态自由下落的猫翻转过程中,  $O_c x$  保持接近不变的水平方向. 建立  $(XYZ)$  坐标系:  $O_c X$  与假设为方向不变的  $O_c x$  重合,  $O_c Z$  沿地垂线向上. 猫匀加速下落引起的  $(XYZ)$  坐标系中的惯性力与重力相平衡, 在讨论绕质心转动时可将  $(XYZ)$  视作惯性坐标系. 设  $\Pi_0$  为垂直平面  $(XO_c Z)$ ,  $\phi$  为  $\Pi_1$  相对  $\Pi_0$  绕  $O_c X$  的顺时针转角(图 3). 猫转体运动的目的是使腹部从向上转至向下, 即要求  $\Pi_1$  相对  $\Pi_0$  转过  $180^\circ$  或  $\phi$  从零变化到  $\pi$ .

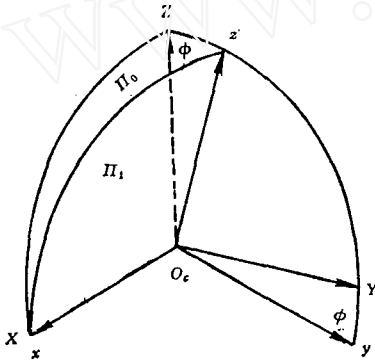


图 3

计算  $B_i$  相对  $(x^*y^*z^*)$  的角速度  $\omega_i^*$ :

$$\omega_1^* = -\dot{\phi} \cos \gamma i^* - \dot{\gamma} j^* - \dot{\phi} \sin \gamma k^* \quad (6)$$

$$\omega_2^* = \omega_1^* + \omega' = -\dot{\phi} \cos \gamma i^* + \dot{\gamma} j^* + \dot{\phi} \sin \gamma k^* \quad (7)$$

将  $\omega_i^*$  与  $(\dot{\sigma} - \dot{\phi}) i^*$  相加得到  $B_i$  的绝对角速度  $\omega_i$ . 变换到各自的主轴坐标系后得到

$$\omega_1 = p i_1 + q j_1 + r k_1, \quad \omega_2 = p i_2 - q j_2 - r k_2 \quad (8)$$

其中  $p = (\dot{\sigma} - \dot{\phi}) \cos \gamma - \dot{\phi}$ ,

$$q = (\dot{\sigma} - \dot{\phi}) \sin \gamma \sin \phi - \dot{\gamma} \cos \phi,$$

$$r = (\dot{\phi} - \dot{\sigma}) \sin \gamma \cos \phi - \dot{\gamma} \sin \phi \quad (9)$$

设  $A, B, C, m, a$  分别为  $B_i (i = 1, 2)$  的中心主惯量矩、质量和质心至  $O$  点距离, 计算  $B_i$  相对总质心  $O_c$  的动量矩  $H_i$  对  $(x_i y_i z_i)$  的投影  $H_{ix}, H_{iy}, H_{iz} (i = 1, 2)$ :

$$\begin{Bmatrix} H_{1x} \\ H_{1y} \\ H_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_{2x} \\ -H_{2y} \\ -H_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & -F_c & -E_c \\ -F_c & B_c & -D_c \\ -E_c & -D_c & C_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} \quad (10)$$

其中

$$A_c = A + ma^2 \cos^2 \gamma \sin^2 \gamma, \quad B_c = B + ma^2 \cos^2 \gamma (\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma \cos^2 \phi)$$

$$C_c = C + ma^2 \cos^2 \gamma (\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma \sin^2 \phi), \quad D_c = ma^2 \cos^2 \gamma \sin^2 \gamma \cos \phi \sin \phi \quad (11)$$

$$E_c = ma^2 \cos^3 \gamma \sin \gamma \cos \phi,$$

$$F_c = ma^2 \cos^3 \gamma \sin \gamma \sin \phi$$

将  $H_1$  与  $H_2$  相加得到猫相对  $O_c$  的总动量矩  $H$ . 变换到  $(x^*y^*z^*)$  后  $H$  沿  $Ox^*$  轴方向

$$\begin{aligned} H = & -2\{[A \cos^2 \gamma + (B \sin^2 \phi + C \cos^2 \phi) \sin^2 \gamma](\dot{\phi} - \dot{\sigma}) \\ & + A \dot{\phi} \cos \gamma + (B - C) \dot{\gamma} \sin \gamma \cos \phi \sin \phi\} i^* \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $\dot{\sigma}$  可自(5)式导出

$$\dot{\sigma} = (\dot{\phi} \cos \gamma + \dot{\gamma} \sin \gamma \cos \phi \sin \phi) / R^2 \quad (13)$$

猫下落过程中由于相对质心的力矩为零, 动量矩  $H$  守恒而证实  $O_c x^*$  或  $O_c x$  轴在惯

性空间中方位不变假设的正确性。如自由下落猫无起始角速度, 则  $H = 0$ , 从 (12) (13) 推出以下运动方程

$$\dot{\phi} = \frac{\{\dot{\psi} \cos \gamma \sin \gamma [\lambda + (1 - \varepsilon) \cos^2 \psi] + \dot{\gamma} \cos \psi \sin \psi (1 - \varepsilon + \lambda \sin^2 \gamma)\} \sin \gamma}{(1 - \sin^2 \gamma \cos^2 \psi) [1 + (\lambda - \varepsilon \cos^2 \psi) \sin^2 \gamma]} \quad (14)$$

其中  $\lambda = (B - A)/A$ ,  $\varepsilon = (B - C)/A$  是与猫的质量几何有关的参数, 实验测定猫的  $\lambda$  值约等于 3,  $|\varepsilon|$  远小于 1. 非线性方程 (14) 中包含 3 个未知函数  $\phi$ 、 $\psi$ 、 $\gamma$ , 只要给出受生物意识控制的弯腰规律  $\psi(t)$  和  $\gamma(t)$ , 就能积分得到猫在空间中的翻转规律  $\phi(t)$ .

### 三、轴对称模型

文献 [7] 的轴对称模型是  $\varepsilon = 0$  的特殊情形, (14) 式简化为

$$\dot{\phi} = \left( \frac{\sin \gamma}{1 - \sin^2 \gamma \cos^2 \psi} \right) \left[ \frac{\dot{\psi} \cos \gamma \sin \gamma (\lambda + \cos^2 \psi)}{1 + \lambda \sin^2 \gamma} + \dot{\gamma} \cos \psi \sin \psi \right] \quad (15)$$

对以下几种情况分别进行讨论:

1. 猫无弯腰动作,  $\gamma = 0$ , 则  $\dot{\phi}$  恒等于零, 不可能产生转体.

2. 猫沿体内方位确定的  $\Pi$  平面弯腰,  $\psi = \psi_0$ , (15) 式简化为

$$\dot{\phi} = \dot{\gamma} \sin \gamma \cos \psi_0 \sin \psi_0 / (1 - \sin^2 \gamma \cos^2 \psi_0) \quad (16)$$

$\psi_0$  等于  $0$ 、 $\pi/2$ 、 $\pi$ 、 $3\pi/2$  等特殊值时, 不论  $\gamma$  如何变化  $\dot{\phi}$  恒等于零. 一般情况下积分 (16) 式得到

$$\phi = \text{tg}^{-1}(\text{ctg} \psi_0 \cos \gamma_0) - \text{tg}^{-1}(\text{ctg} \psi_0 \cos \gamma) \quad (17)$$

$|\phi|$  从零开始连续变化的最大值不超过  $\pi/2$ , 猫不可能翻转.

3. 猫保持确定的弯曲角  $\gamma = \gamma_0$ , 但改变  $\Pi$  平面在体内的方位, 脊柱轴  $Ox_1$  和  $Ox_2$  沿以  $OX$  为中心轴的圆锥面运动 [4]. (15) 式简化为

$$\dot{\phi} = \dot{\psi} \cos \gamma_0 \sin^2 \gamma_0 (\lambda + \cos^2 \psi) / (1 + \lambda \sin^2 \gamma_0) (1 - \sin^2 \gamma_0 \cos^2 \psi) \quad (18)$$

设  $\psi$  的起始值为零, 从 (18) 式积分得到

$$\phi = \text{tg}^{-1}(\text{tg} \psi / \cos \gamma_0) - [\cos \gamma_0 / (1 + \lambda \sin^2 \gamma_0)] \psi \quad (19)$$

图 4 为  $\lambda = 3$  时以  $\gamma_0$  为参变量的  $(\phi - \psi)$  曲线族,  $\phi$  随  $\psi$  单调增大表明猫必须努力使  $\Pi$

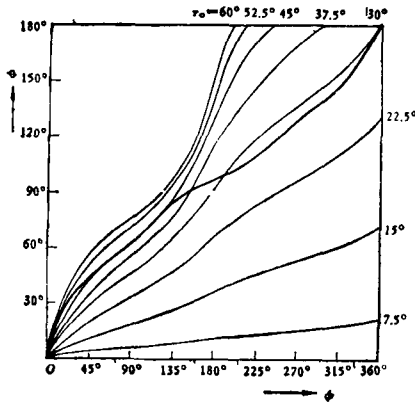


图 4

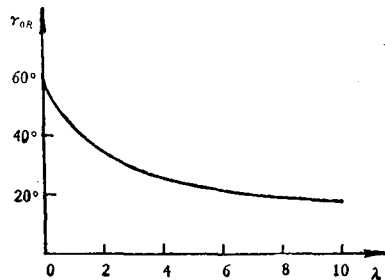


图 5

在体内单方向旋转,才能产生与  $\Pi$  转动方向相反的转体运动以保持总动量矩为零.此结论已被摄影记录所证实.

当  $\phi$  从零变化到  $2\pi$  即猫完成一周弯腰动作时,如  $\phi$  恰好从零变化到  $\pi$ ,  $\Pi$  与  $\Pi_1$  同时与  $\Pi_0$  重合,则称作猫的正确转体.正确转体的弯曲角  $\gamma_{OR}$  可自(19)式推出:

$$\gamma_{OR} = \cos^{-1}\{[\sqrt{\lambda(\lambda+1)+1}-1]/\lambda\} \quad (20)$$

( $\gamma_{OR}-\lambda$ ) 曲线是  $\lambda$  的减函数(图5),因此猫愈瘦长  $\lambda$  愈大愈容易转体.  $\lambda=3$  时  $\gamma_{OR}=30^\circ$ ,与[7]的数值积分结果完全一致.

4.更接近实际情况的转体过程是猫的弯曲角随  $\Pi$  平面在体内的不同方位而改变<sup>[7]</sup>,  $\gamma = \gamma(\phi)$ ,实验观察到猫后弯角远小于前弯角,  $\gamma(0) > \gamma(\pi)$ .令方程(15)中  $\gamma = \gamma(\phi)$ ,积分得到

$$\phi = \int_0^\phi f(\psi) d\psi, \quad f(\psi) = \left( \frac{\sin \gamma}{1 - \sin^2 \gamma \cos^2 \psi} \right) \left[ \frac{\cos \gamma \sin \gamma (\lambda + \cos^2 \psi)}{1 + \lambda \sin^2 \gamma} + \left( \frac{d\gamma}{d\psi} \right) \cos \psi \sin \psi \right] \quad (21)$$

假定  $\gamma$  分段在  $[0, \pi]$ 、 $[\pi, 2\pi]$  内是  $\psi$  的线性函数:

$$\gamma(\psi) = \begin{cases} \gamma(0) - k\psi & (0 < \psi < \pi) \\ \gamma(\pi) + k(\psi - \pi) & (\pi < \psi < 2\pi) \end{cases} \quad (22)$$

其中  $k = [\gamma(0) - \gamma(\pi)]/\pi$ .将(22)代入(21)式,令  $\gamma(0) = 58^\circ$ ,  $\gamma(\pi) = 12.5^\circ$ ,所确定的  $(\phi-\psi)$  曲线在图4中以粗线表示.其变化规律恰能满足正确转体要求,亦与[7]的计算结果一致.

#### 四、非轴对称性影响

将方程(14)右项对小于1的非轴对称参数  $\varepsilon$  展成幂级数,只保留二次项:

$$\phi = \psi [f_0(\gamma, \psi) + \varepsilon f_1(\gamma, \psi) + \varepsilon^2 f_2(\gamma, \psi) + \dots] + \gamma [g_0(\gamma, \psi) + \varepsilon g_1(\gamma, \psi) + \varepsilon^2 g_2(\gamma, \psi) + \dots] \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned} f_0(\gamma, \psi) &= \sin^2 \gamma \cos \gamma (\lambda + \cos^2 \psi) (1 + \lambda \sin^2 \gamma)^{-1} (1 - \sin^2 \gamma \cos^2 \psi)^{-1} \\ f_1(\gamma, \psi) &= -\sin^2 \gamma \cos \gamma \cos^2 \psi (1 + \lambda \sin^2 \gamma)^{-2} \\ f_2(\gamma, \psi) &= -\sin^4 \gamma \cos \gamma \cos^4 \psi (1 + \lambda \sin^2 \gamma)^{-3} \\ g_0(\gamma, \psi) &= \sin \gamma \cos \psi \sin \psi (1 - \sin^2 \gamma \cos^2 \psi)^{-1} \\ g_1(\gamma, \psi) &= -\sin \gamma \cos \psi \sin \psi (1 + \lambda \sin^2 \gamma)^{-1} \\ g_2(\gamma, \psi) &= -\sin^3 \gamma \cos^3 \psi \sin \psi (1 + \lambda \sin^2 \gamma)^{-2} \end{aligned} \quad (24)$$

只讨论弯曲角不变情形,令(23)式中  $\gamma = \gamma_0$ ,积分得到

$$\phi = F_0(\gamma_0, \psi) + \varepsilon F_1(\gamma_0, \psi) + \varepsilon^2 F_2(\gamma_0, \psi) + \dots \quad (25)$$

其中

$$\begin{aligned} F_0(\gamma_0, \psi) &= \text{tg}^{-1}(\text{tg} \psi / \cos \gamma_0) - [\cos \gamma_0 / (1 + \lambda \sin^2 \gamma_0)] \psi \\ F_1(\gamma_0, \psi) &= -[\cos \gamma_0 \sin^2 \gamma_0 / 4(1 + \lambda \sin^2 \gamma_0)^2] (2\psi + \sin 2\psi) \\ F_2(\gamma_0, \psi) &= -[\cos \gamma_0 \sin^4 \gamma_0 / 4(1 + \lambda \sin^2 \gamma_0)^3] [(3/2)\psi + \sin 2\psi + (1/8) \sin 4\psi] \end{aligned} \quad (26)$$

令  $\lambda = 3$ ,  $\gamma_0 = 30^\circ$ , 以  $\varepsilon$  为参变量的  $(\phi - \psi)$  曲线族见图 6. 可看出减小  $\varepsilon$  有利于翻转但并不显著. 四肢贴近头部或尾部的猫因  $\lambda$  增大而  $\varepsilon$  减小, 显然比四肢外伸的猫更容易完成转体运动.

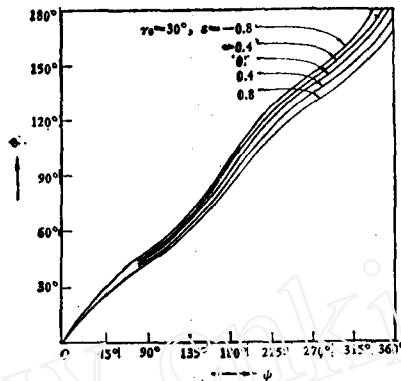


图 6

## 参 考 文 献

- [ 1 ] Marey, M., *Compt. Rend. Acad. Sci., Paris*, **119** (1894), 714—717.
- [ 2 ] Guyou, M., *Compt. Rend. Acad. Sci., Paris*, **119** (1894), 717—718.
- [ 3 ] Magnus, R., *Archs Néerl. Physiol.*, **7** (1922), 218—222.
- [ 4 ] Rademaker, G.G.J., Ter Braak, J.W.G., *Acta Oto-Laryngol.*, **23** (1935), 313—343.
- [ 5 ] McDonald, D. A., *Amer. J. Physiol.*, **129** (1955), 34—35.
- [ 6 ] McDonald, D. A., *New Scientist*, **7** (1960), 1647—1649.
- [ 7 ] Kane, T. R., Scher, M. P., *Int. Solids Struct.*, **5**, 7(1969), 663—670.

## ON THE TURNING MOTION OF A FREE-FALLING CAT

Liu Yanzhu

(Shanghai Chiao-Tung University)

## Abstract

The dynamical explanation of the phenomenon that a free-falling cat usually lands on its feet is discussed in this paper, using the model of two unsymmetric rigid bodies. The turning motion of the cat is determined by the analytical solution of the nonlinear differential equation, when the bending motion of the cat is given. The general characteristics of the turning motion are obtained, and the results of the analytic calculation agree with those of numerical integration.