

自由下落猫的非完整运动规划 最优控制研究*

戈新生¹, 陈立群²

(1. 北京机械工业学院 机械工程系,北京 100085;

2. 上海大学,上海市应用数学和力学研究所,上海 200072)

(我刊编委陈立群来稿)

摘要: 研究猫在自由下落时姿态运动规划问题. 自由落体的猫在空中转体运动由于角速度不可积,姿态运动方程呈现为非完整形式. 当系统角动量为 0 时,导出由两个对称刚体组成的自由下落猫的非完整姿态运动方程. 利用该非完整方程系统的控制问题可转化为无漂移系统的非完整运动规划问题. 基于 Ritz 近似理论,给出自由落体猫姿态运动规划的 Gauss-Newton 算法. 最后对自由落体猫作了数值仿真实验,仿真结果验证了该算法的有效性.

关键词: 猫自由落体; 非完整约束; 运动规划; 最优控制

中图分类号: O302 **文献标识码:** A

引言

众所周知猫四肢朝上从空中自由落下时四肢能够先安全着地,这一现象的解释可追溯到 19 世纪末. Guyou 和 Marey 首先用角动量守恒原理解释了猫在空中的转体运动对其质心的角动量保持守恒,即等于 0^[1]. McDonald 从生理学的角度也阐述了这一论点^[2]. 他们认为猫先收缩前肢,伸开后肢并转动前半身,由于前半身对纵轴的转动惯量小于后半身,根据角动量守恒原理,同时前半身转过的角度比后半身向相反方向转过的角度要大. 然后,猫伸开前肢,收缩后肢并转动后半身,同理后半身也转过较大的角度. 这一解释虽然符合力学原理,但由实验观察猫的自由下落过程看不到这种明显的四肢开合运动. 用猫尾巴旋转提出另外一种解释,即不用四肢的伸缩动作,而是将尾巴向一个方向急速旋转,猫的身体也能沿相反的方向翻转过来^[3]. 但实验证明无尾猫同样能完成转体而否定了这一论点. Kane 和 Scher 利用猫的弯曲脊柱解释转体,假定猫的前后脊柱以腰部为顶点作圆锥运动,将猫简化为由两个轴对称刚体组成的多体模型,解释了猫的转体运动^[4]. Kane 对由两个轴对称刚体组成的猫的力学模型建立了运动方程并作数值积分,计算结果与实验摄影记录十分吻合. 刘延柱考虑猫的躯干的非轴对称性导出猫转体的动力学方程,讨论了猫下落转体运动的一般规律^[5].

近年来,随着载人航天技术的发展和探索失重状态下人的转体规律而对猫落体问题进行

* 收稿日期: 2005-10-18; 修订日期: 2007-01-30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10372014);北京市自然科学基金资助项目(1072008)

作者简介: 戈新生(1957—),男,合肥人,教授,博士(联系人. E-mail:gebim@vip.sina.com).

了广泛和深入的研究. 猫落体的姿态运动方程首次积分可化为非完整约束方程, 它是由角速度不可积引起的. 非完整控制系统是一类特殊的非线性系统, 其控制方程的特点表现为构成系统的广义坐标的维数多于控制输入维数. Brockett 最早系统地研究了无漂移非完整系统的最优控制问题, 用控制目标函数构造拉格朗日函数及拉格朗日方程, 分别得到最优输入为正弦函数和椭圆函数的结论^[6]. Murray 和 Sastry 利用 Brockett 的一些成果将正弦输入用于非完整链式系统的控制^[7]. Royhanoglu 对非完整系统的动力学模型, 利用 Stokes 定理和 Taylor 级数展开等工具提出一种类似的运动规划算法^[8]. Leonard 等基于平均理论研究了非完整控制系统的运动规划问题^[9]. 另外, 在非完整控制系统中构造优化路径或轨迹的各种数值方法也取得了一系列重要研究结果, 其中 Fernandes 对双刚体耦合系统提出了最优控制问题的 Ritz 近似方法^[10].

本文用双刚体模型表示猫的前半身与后半身以描述自由下落猫的转体运动, 利用多体动力学和角动量守恒定律建立了自由落体猫的姿态运动方程. 在系统角动量为 0 时, 自由落体猫的姿态运动方程呈现为非完整约束方程, 落体猫的姿态运动的控制问题转化为无漂移系统的非完整运动规划问题. 提出一种非完整运动规划的高斯-牛顿算法. 文末通过算例仿真, 验证了该方法在求解自由下落猫的非完整姿态运动规划的有效性.

1 自由落体猫的姿态运动建模

自由落体猫在空中作转体运动时, 可简化为由两个相同刚体 B_1 和 B_2 组成猫的前后体(见图 1), 并在猫的腰部 O 点处以铰相联结. 假设猫脊柱弯曲时允许脊柱沿着任何平面弯曲但不允许前后体之间产生扭转^[4]. 以 O 为原点建立 B_i ($i = 1, 2$) 的主轴坐标系 $O-X_i Y_i Z_i$ ($i = 1, 2$), OX_i 通过刚体 B_i 的质心 O_i 沿脊柱指向头部 ($i = 1$) 或者尾部的负方向 ($i = 2$), OZ_i 指向猫的腹部.

设 $O-X_1 Y_1 Z_1$ 绕 OX_1 转过 γ 角为 $O-X_1^* Y_1^* Z_1^*$, 再绕 OY_1^* 转过 ϑ 角为 $O-X_1^\# Y_1^\# Z_1^\#$, 绕 $OX_1^\#$ 转过 ϕ 角到 $O-X_2 Y_2 Z_2$. γ, ϑ, ϕ 为 $O-X_2 Y_2 Z_2$ 相对于 $O-X_1 Y_1 Z_1$ 的欧拉角^[11]. 建立 $O-X^* Y^* Z^*$ 坐标系, OX^* 和 OZ^* 分别沿着 $X_1^* OX_1^\#$ 和 $Z_1^* OZ_1^\#$ 的角平分线方向, OY^* 与 OY_1^* 和 $OY_1^\#$ 重合, $\vartheta = \vartheta/2$ 为前后脊柱相对 OX^* 的弯曲角. 包含 OX_1 和 OX_2 的 $X^* OZ^*$ 坐标面为猫的脊柱弯曲平面, γ 角标志 $X_1^* OZ_1^*$ 平面在体内的方位.

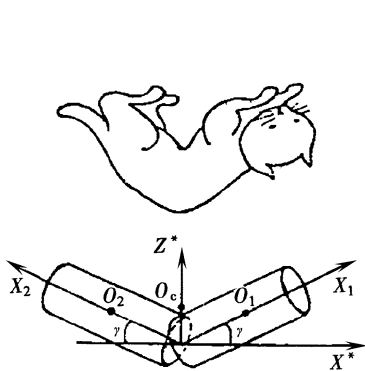


图 1 落体猫力学模型

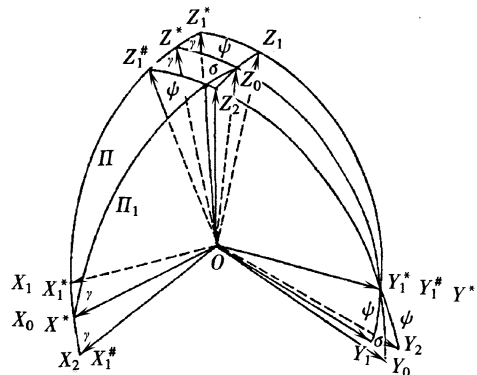


图 2 姿态变换

写出 B_2 相对于 B_1 的角速度 对 $O-X^* Y^* Z^*$ 的投影式

$$= (\dot{\psi} + \dot{\phi}) \cos i^* + 2 \dot{j}^* + (\dot{\psi} - \dot{\phi}) \sin k^*, \quad (1)$$

猫前后体之间无扭转条件要求沿着 OX^* 的相对角速度分量为 0, 则有 $\dot{\phi} = -\dot{\psi}$. 由于起始时前后体之间也无扭转, 积分可以得到 $\phi = -\psi$, 考虑该约束条件, (1) 式可简化为

$$= 2(\dot{j}^* + \dot{\psi} \sin k^*). \quad (2)$$

脊柱弯曲后猫的质心 O_c 位于 OZ^* 轴上, 将上述坐标系 $(O-X_0 Y_0 Z_0)$ 的原点从 O 平移到 O_c . 建立 O_c-XYZ 坐标系: $O_c X$ 与方向不变的 $O_c X_0$ 相平行, $O_c Z$ 垂直向上. 猫匀加速下落引起的 O_c-XYZ 中的惯性力与重力相平衡, 在考虑绕质心的转动时可以将 O_c-XYZ 看作惯性坐标系. 设 θ_0 为垂直平面 $XO_c Z$, ϕ 为 θ_1 相对于 θ_0 绕 $O_c X$ 的顺时针转角. 猫转体运动的目的是使腹部从向上转到向下, 即要求 θ_1 相对于转过 180° 或 ϕ 从 0 转到 π .

计算 B_i 相对于 $O-X^* Y^* Z^*$ 的角速度 $\dot{\theta}_i^*$ 有

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1^* = -\dot{\psi} \cos i^* - \dot{j}^* - \dot{\psi} \sin k^*, \\ \dot{\theta}_2^* = \dot{\theta}_1^* + \dot{\phi} = -\dot{\psi} \cos i^* + \dot{j}^* + \dot{\psi} \sin k^*. \end{cases} \quad (3)$$

设 A, B, C, m, a 分别为 $B_i (i = 1, 2)$ 的中心惯量矩、质量和质心到 O 点的距离, 计算 B_i 相对质心 O_c 的动量矩 H_i 对 $O-X_i Y_i Z_i (i = 1, 2)$ 的投影 H_{ix}, H_{iy} 和 $H_{iz} (i = 1, 2)$ [5]

$$\begin{cases} H_{1x} \\ H_{1y} \\ H_{1z} \end{cases} = \begin{cases} H_{2x} \\ -H_{2y} \\ -H_{2z} \end{cases} = \begin{bmatrix} A_c & -F_c & -E_c \\ -F_c & B_c & -D_c \\ -E_c & -D_c & C_c \end{bmatrix} \begin{cases} p \\ q \\ r \end{cases}, \quad (4)$$

其中

$$\begin{cases} A_c = A + ma^2 \cos^2 \sin^2, & B_c = B + ma^2 \cos^2 (\cos^2 + \sin^2 \cos^2), \\ C_c = C + ma^2 \cos^2 (\cos^2 + \sin^2 \sin^2), & D_c = ma^2 \cos^2 \sin^2 \cos \sin, \\ E_c = ma^2 \cos^3 \sin \cos, & F_c = ma^2 \cos^3 \sin \sin \end{cases} \quad (5)$$

以及

$$\begin{cases} p = [(\dot{\psi} \cos + \dot{\psi} \sin \cos \sin) / (1 - \sin^2 \cos^2) - \dot{\phi}] \cos - \dot{\psi}, \\ q = [(\dot{\psi} \cos + \dot{\psi} \sin \cos \sin) / (1 - \sin^2 \cos^2) - \dot{\phi}] \sin \sin - \dot{\psi} \cos, \\ r = [\dot{\phi} - (\dot{\psi} \cos + \dot{\psi} \sin \cos \sin) / (1 - \sin^2 \cos^2)] \sin \cos - \dot{\psi} \sin. \end{cases} \quad (6)$$

将 H_1 和 H_2 相加得到猫相对于 O_c 的总动量矩 H . 变换到 $O-X^* Y^* Z^*$ 后 H 沿着 OX^* 轴方向为

$$H = -\sum \left\{ [A \cos^2 + (B \sin^2 + C \cos^2) \sin^2] / \dot{\phi} - \right. \\ \left. (\dot{\psi} \cos + \dot{\psi} \sin \cos \sin) / (1 - \sin^2 \cos^2) \right\} + \\ A \dot{\psi} \cos + (B - C) \dot{\psi} \sin \cos \sin \Big\} i^*. \quad (7)$$

猫下落过程中由于相对质心的力矩为 0, 角动量 H 守恒而证实 $O_c X^*$ 或 $O_c X$ 轴在惯性坐标系中方位不变假设的正确性. 考虑自由下落猫无起始角速度, 即 $H = 0$, 由 (7) 式可以推导出以下运动方程

$$\dot{\phi} = \frac{\left\{ \dot{\psi} \cos \sin / [1 + (1 - \sin^2) \cos^2] + \dot{\psi} \cos \sin / [1 - \sin^2 + \sin^2] \right\} \sin}{(1 - \sin^2 \cos^2) [1 + (\sin^2 - \cos^2) \sin^2]}, \quad (8)$$

其中 $\alpha = (B - A)/A$, $\beta = (B - C)/A$ 是与猫的质量几何有关的参数. (8) 式为猫自由下落的非完整姿态运动方程.

2 非完整运动规划的最优控制

设落体猫的位形 $x = (\theta, \phi)^T$ 为状态变量, 将猫的脊柱轴 OX_1 沿以 OX 为中心轴的圆锥面转动的角速度 $\dot{\theta}$ 和脊柱弯曲角速度 $\dot{\phi}$ 取作输入变量, 记作 $u_1 = \dot{\theta}$, $u_2 = \dot{\phi}$, 则猫下落的状态方程为

$$\dot{x} = G(x)u, \quad (9)$$

其中

$$G(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\cos^2 \theta [1 + (1 - \sin^2 \theta) \cos^2 \phi]}{D[1 + (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \sin^2 \phi]} & \frac{\cos \theta \sin \theta \sin \phi (1 - \sin^2 \theta + \sin^2 \phi)}{D[1 + (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \sin^2 \phi]} \end{bmatrix},$$

上式中 $D = (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi)$.

注意方程(9)中控制输入数 $i = 2$ 比系统可达位形空间的维数 $j = 3$ 小, 猫自由下落的姿态运动可以用3个状态变量和两个控制输入的非线性控制系统描述. 这是典型的非完整运动规划问题, 即给定自由下落猫的初始位形 $x_0 = (\theta_0, \phi_0)^T \in \mathbf{R}^3$ 和末端位形 $x_f = (\theta_f, \phi_f)^T \in \mathbf{R}^3$, 寻找一组控制输入参数 $u(t) \in \mathbf{R}^2, t \in [0, T]$ 操纵系统从初始位形 x_0 到达末端位形 x_f .

设系统为可控的^[10], 存在优化解 $u^* \in L_2[0, T]$, 其中 $L_2([0, T])$ 是由定义在区间 $[0, T]$ 的可测向量函数 $u(t)$ 构成的 Hilbert 空间. 根据最小能量原理, 选择连接双刚体的腰关节耗散能作为最优控制指标, 目标函数为

$$J(u) = \int_0^T u^T u dt. \quad (10)$$

在实际计算中, 运用泛函中的 Ritz 逼近方法取其有限维求解问题的近似解, 如取前 N 项, 则 u 可表示为 Fourier 基向量 $\{e_j\}_{j=1}^N$ 的线性组合^[12]

$$u = \sum_{i=1}^N \alpha_i e_i = \alpha, \quad (11)$$

其中 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)^T$ 为函数 u 在 Fourier 基 $\{e_j\}_{j=1}^N$ 上的投影, $E = [e_1(t), e_2(t), \dots, e_N(t)]$ 为 Fourier 基向量构成的 $2 \times N$ 矩阵. 将 α 视作新的控制变量, 引入罚函数方法, 式(10)目标函数 $J(u)$ 可表示为

$$J(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 + \lambda \|x(T) - x_f\|^2, \quad (12)$$

其中 $\lambda > 0$ 为罚因子, $x(T)$ 为方程(9)由控制输入 u 给定在 $t = T$ 时的解. 显然, $x(T)$ 为 α 的函数, 令 $f(\alpha) = x(T)$. 可以证明^[7], 当 $N \rightarrow \infty$ 时, 上述有限维问题的近似优化解收敛于无穷维优化解. 若式(12)中给定 λ , 则式(12)可写为

$$J(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 + \lambda \|f(\alpha) - x_f\|^2. \quad (13)$$

因此寻找控制输入 $u(t)$ 使式(10)取极小值问题转化为寻找 α 使目标函数(13)为极小值问题. 运用 Taylor 级数对式(13)关于 α_n 点展开, 并忽略二阶以上高阶项, 得到

$$J(\alpha_{n+1}) = J(\alpha_n) + \frac{\partial J}{\partial \alpha_n} (\alpha_{n+1} - \alpha_n) + (1/2) (\alpha_{n+1} - \alpha_n)^T \frac{\partial^2 J}{\partial \alpha_n^2} (\alpha_{n+1} - \alpha_n) + O(\|\alpha_{n+1} - \alpha_n\|^3), \quad (14)$$

令 $\frac{\partial J(\alpha_{n+1})}{\partial \alpha} = 0$, 由式(14)得到牛顿法迭代公式

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - (\frac{\partial^2 J}{\partial \alpha_n^2})^{-1} (\frac{\partial J}{\partial \alpha_n}), \quad (15)$$

其中

$$\partial J / \partial x_n = 2 [\lambda_n + A^T (f(x_n) - x_f)],$$

$$\partial^2 J / \partial x_n^2 = 2 \left[I + A^T A + \sum_{i=1}^N (f_i(x_n) - x_{fi}) H_i \right],$$

式中 $A = \partial f / \partial x$ 为 f 的 Jacobi 矩阵, H_i 为 f 的分量 f_i 的 Hesse 矩阵, I 为单位阵. 由于 $(I + A^T A)$ 为正定的, 式(15)可用改进的牛顿法^[13], 即高斯-牛顿迭代公式表示

$$x_{n+1} = x_n - [\mu I + A^T A]^{-1} [\mu \lambda_n + A^T (f(x_n) - x_f)],$$

式中 $\mu = 1/\alpha$, α 为步长因子, $0 < \alpha < 1$.

显然 A 为矩阵函数 y 在 $t = T$ 时的值, $y(t)$ 定义为

$$y(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial t}, \quad (17)$$

且 $y(0) = \lim_{t \rightarrow 0} y(t) = 0$. 对 $y(t)$ 微分可得

$$\dot{y} = \frac{\partial(\partial x / \partial t)}{\partial t} = \left[\sum_{i=1}^N \frac{\partial G_i}{\partial x} \right] y + G(x), \quad (18)$$

因此对微分方程组从 0 到 T 数值积分, 并设 $f(x_n) = x(T)$, $A = y(T)$ 代入式(16)迭代求解, 再利用式(9) 即得系统的输入 $u(t)$, 从而得到系统状态变量的优化轨迹.

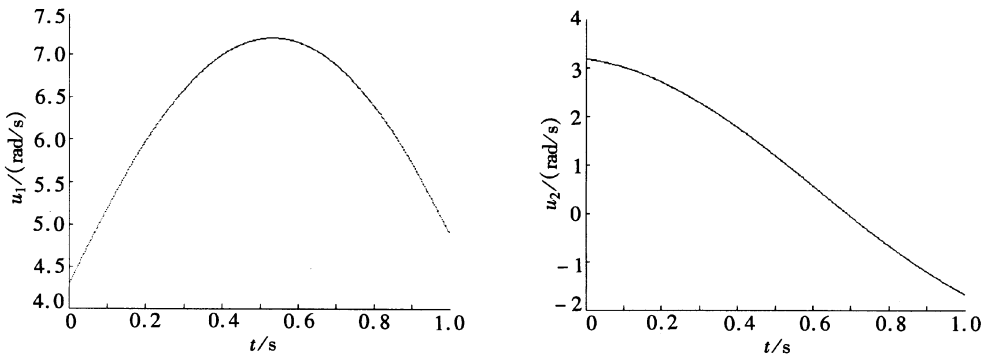


图3 猫下落时腰关节最优控制输入规律

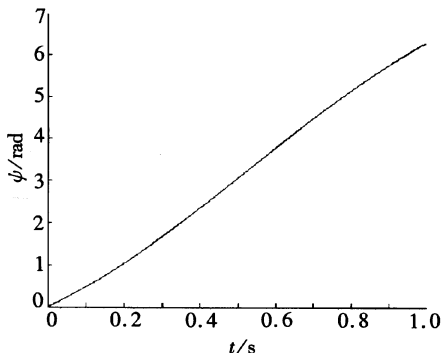


图4 猫下落 角姿态运动轨迹

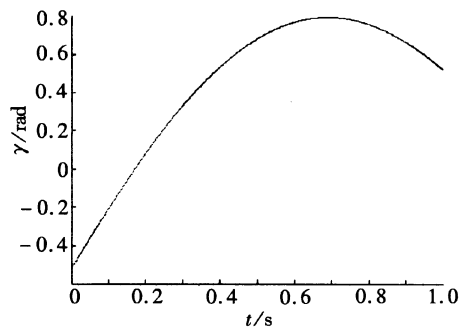


图5 猫下落 角姿态运动轨迹

3 仿真计算

设猫在自由下落时, 猫的脊柱弯曲, 但没有前后体之间的相互扭转; 其次猫的脊柱前弯, 依次向各个方向弯曲脊柱并保持弯曲角不变. 当猫的前体作一周圆周运动时, 猫的整体正好

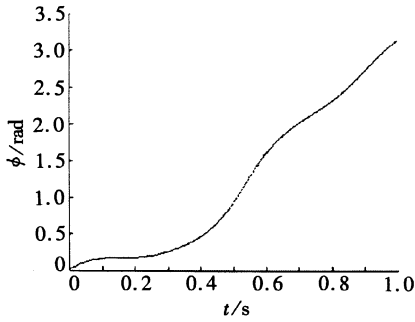


图 6 猫下落 ϕ 角姿态运动轨迹

腰关节的控制输入规律,图 4 至图 6 为猫在下落时姿态运动的优化轨线,曲线两端点为猫下落的初始和落地位形.从图 4 至图 6 可以看出,猫在空中的翻转运动比较平稳,姿态运动轨迹具有光滑连续性.图 5 中猫的脊柱弯曲角由负的 30° 变化为正的 30° .这些仿真数据结果与实验摄影记录是吻合的^[4].

4 结束语

通过对自由落体猫的建模分析和数值仿真结果表明:1)自由落体猫的非线性控制问题可以转化为无漂移系统的非完整运动规划问题.2)利用高斯-牛顿算法能有效的求解落体猫系统非完整姿态运动规划问题,实现了猫在自由落体时的姿态运动规划及控制输入规律的优化,并且在仿真运算中高斯-牛顿算法表现出了较快的收敛速度和较高的精度.3)本文工作虽然是针对自由落体猫系统的非完整运动规划问题,但提出基于高斯-牛顿算法的非完整运动规划数值方法也为其它优化控制研究提供了一种求解思路.

[参 考 文 献]

- [1] 贾书惠.从猫下落谈起[M].北京:高等教育出版社,1990.
- [2] McDonald D A. How does a falling cat turn over[J]. Amer J Physiol,1955,129:34-35.
- [3] Kane T R, Scher M P. A dynamical explanation of the falling cat phenomenon[J]. Int J Solids Structures,1969,5(5):663-670.
- [4] 刘延柱.自由下落猫的转体运动[J].力学学报,1982,14(4):388-393.
- [5] Brockett R W, Dai L. Nonholonomic kinematics and the role of elliptic functions in constructive controllability[A]. In: Li Z, Canny J F, Eds. Nonholonomic Motion Planning[C]. Boston: Kluwer, 1993, 1-22.
- [6] Murray R M, Sastry S S. Nonholonomic Motion Planning: steering using sinusoids[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1993, 38(5): 700-716.
- [7] Reyhanoglu M, Schaft A, McClamroch N, et al. Dynamics and control of a class of underactuated mechanical systems[J]. IEEE Transactions on Automatics Control, 1999, 44(9): 1663-1671.
- [8] Leonard N E, Krishnaprasad P S. Motion control of drift-free, left-invariant systems on lie groups [J]. IEEE Transactions on Automatics Control, 1995, 40(9): 1539-1554
- [9] Fernandes C, Gurvits L, Li Z. Near-optimal nonholonomic motion planning for a system of coupled rigid bodies[J]. IEEE Transaction Automation Control, 1995, 39(3): 450-464.
- [10] 刘延柱,洪嘉振,杨海兴.多刚体系统动力学[M].北京:高等教育出版社,1989.

- [12] Courant R, Hilbert D. Methods of Mathematical Physics[M]. Vol . New York: Wiley, 1955.
- [13] Joshi M C, Moudgalya K M. Optimization-Theory and Practice[M]. Harrow, U K: Alpha Science International Ltd. 2004.

Optimal Control of Nonholonomic Motion Planning for a Free-Falling Cat

GE Xin-Sheng¹, CHEN Li-qun²

(1. Mechanical Engineering Department, Beijing Institute of Machinery,
Beijing 100085, P. R. China;

2. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University,
Shanghai, 200072, P. R. China)

Abstract: The nonholonomic motion planning of a free-falling cat is investigated. Nonholonomicity arises in a free-falling cat subject to nonintegrable angle velocity constraints or nonintegrable conservation laws. When the total angular momentum is zero, the motion equation of a free-falling cat is established based on the model of two symmetric rigid bodies and conservation of angular momentum. The control of system can be converted to the problem of nonholonomic motion planning for a free-falling cat. Based on Ritz approximation theory, the Gauss-Newton method for motion planning by a falling cat is proposed. The effectiveness of the numerical algorithm is demonstrated through simulation on model of a free-falling cat.

Key words: free-falling cat; nonholonomic constraint; motion planning; optimal control