复变函数笔记

臧亦驰

2021 年 10 月 31 日

目录

1 复变函数

1.1 复数

1.1.1 基本概念

形如$z = x + iy$的数称为**复数**，其中$i = \sqrt{-1}$，x, y分别称为复数的**实部**和**虚部**，记为

$$x = \mathcal{R}\rceil z, \quad y = \mathcal{I}\Updownarrow z$$

实部相等而虚部为相反数的一对复数称为**共轭复数**。记为

$$z^* = (x + iy)^* = x - iy$$

1.1.2 复数的表示

复数可以与复平面上的点相对应，其横纵坐标分别为复数的实部与虚部，由此，复数也可以用一个矢量表示。

将直角坐标变为极坐标，则半径和角度分别称为复数的**模**与**辐角**，记为ρ, φ。利用欧拉公式，一个复数也可以用e的指数表示，即

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\rho e^{i\varphi}$$

通过从北极点作射线投影的方法，可以将除北极点外的球面与平面上的点一一对应，若这个平面为复平面，则对应得到的球面称为**复球面**。

1.1.3 复数的运算

复数的加减法就是把实部和虚部分别相加，可以将其理解为平面矢量的加减法。复数的乘除和同样可以类比实数多项式的乘除法，值得注意的是一个复数和它的共轭的乘积就等于它的模的平方

$$zz^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$

复数的乘除、乘方运算用指数形式会更加方便。

1.1.4 复数序列的极限

对于一个复数序列$\{z_n\}$，如果对于任意$\epsilon > 0$，存在无穷多个z_n，满足

$$|z_n - z| < \epsilon$$

则称z为序列$\{z_n\}$的一个**聚点**。

如果对于任意$\epsilon > 0$，存在$N \in N^*$，使得任意$n > N$都有

$$|z_n - z| < \epsilon$$

则称z为序列$\{z_n\}$的极限，记为

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z$$

有的序列可以有多个聚点，当序列极限存在时，序列的极限是序列的唯一聚点。

在实数列中，最大和最小的聚点分别称为**上极限**和**下极限**，记为$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$和$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$。

与实数列的极限类似，复数列也有极限的**柯西判别法**。

1.2 复变函数

1.2.1 区域

以点z_0为圆心，任意小正实数ϵ为半径的开圆称为点z_0的ϵ**邻域**，即满足$|z - z_0| < \epsilon$的点的集合。点z_0的**去心邻域**与邻域的区别就是不包含z_0点。

若点集D内某点的ϵ邻域中所有点都属于该点集，则称此点为点集D的**内点**。若点集D满足每一点都是内点，且D中任意两点都可以用一条由D中的点构成的曲线连接起来，则称点集D为一个（**开**）**区域**。若一个点不属于D，但其ϵ邻域中含有D中的点，则称这个点为D的**边界点**，边界点的全体构成**边界**。开区域D加上边界L称为**闭区域**$\bar{D}$。有时还把不包括无穷远点的平面称为**全平面**，包括无穷远点的整个平面称为**闭平面**。

区域不相连接的边界数称为**联通阶数**n，$n = 1$的区域称为**单通区域**，$n > 1$的区域称为**复通区域**。

1.2.2 复变函数的定义

若区域D内的每一个z，均有一个或多个w与之对应，则称w为z的**函数**，记为

$$w = f(z)$$

如果令$w = u + iv$，那么有

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

可以看出复变函数其实是两个实变函数的有序组合。如果一个z只对应一个w，则称这种函数为**单值函数**。

1.2.3 极限

设$w = f(z)$是z的去心邻域中定义的单值函数，若对于任意实数$\epsilon > 0$，存在实数$\delta > 0$，使得$0 < |z - z_0| < \delta$时，有

$$|f(z) - w_0| < \epsilon$$

则称$z \to z_0$时$f(z)$的**极限**为w_0，记作

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

复变函数极限的性质就是实变函数极限性质的自然推广。

1.2.4 连续

连续的定义与极限相仿，设$w = f(z)$是z的邻域中定义的函数，若对于任意实数$\epsilon > 0$，存在实数$\delta > 0$，使得$|z - z_0| < \delta$时，有

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$$

则称函数$w = f(z)$在z_0处**连续**。若函数在D内每一点都连续，则称函数在D内连续。实变函数的性质可以直接推广到复变函数中。

1.3 复变函数的导数

1.3.1 导数与微分

设$w=f(z)$是区域D中定义的单值函数，若在D内某点z，极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

存在，则称函数$f(z)$在z点**可导**，并将此极限称为$f(z)$在z点的**导数**，记作

$$f'(z)=\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

实变函数导数的和差积商和复合的导数公式均可以推广到复变函数中。

若函数$w=f(z)$在某点z的改变量$\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)$可以写成

$$\Delta w=\alpha\Delta z+o(\rho)$$

其中$\rho=|\Delta z|$，$o(\rho)$是ρ的高阶无穷小量，则称$w=f(z)$在z点**可微**，并且有函数的**微分**

$$\mathrm{d}w=\alpha\Delta z$$

对于特殊函数$w=z$作微分可以得到恒等式$\Delta z=\mathrm{d}z$，又利用导数的定义式可得$f'(z)=\alpha$，于是

$$\mathrm{d}w=f'(z)\mathrm{d}z$$

1.3.2 可导条件

函数$f(z)=u(x.y)+iv(x,y)$在(x,y)点可导的充要条件是：$u(x,y)$与$v(x,y)$在(x,y)处

（1）可微；

（2）满足**柯西-黎曼条件**（简称C-R条件）

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

利用柯西-黎曼条件，函数的导数可以表示为四种形式

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

1.3.3 几何意义

根据导数的定义可知，导数的模$|f'(z)|$表示通过点z_0的无穷小线段Δz对应的Δw的长度放大系数；导数的辐角$\arg f'(z)$表示从z平面映射到w平面后切线的转动角。这既可以由Δz的任意性看出，也可以由$f'(z)=u_x+iv_x$中看出，$f(z)$的导数等于函数对x的偏导，也即对应于辐角为0的情况。

通过将自变量由(x,y)变为(ρ,φ)，函数变为$w=re^{i\theta}$，可以算出（夹带私货）类似柯西-黎曼限制条件

$$\frac{\partial r}{\partial \rho}=\frac{r}{\rho}\frac{\partial \theta}{\partial \varphi},\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial r}{\partial \varphi}=-r\frac{\partial \theta}{\partial \rho}$$

同时可以将导数的表达式写为（只取四种形式中的一种）

$$f'(z)=(\frac{\partial r}{\partial \rho}+ir\frac{\partial \theta}{\partial \rho})e^{i(\theta-\varphi)}$$

从中可以更加清晰地看到导数的几何意义。

1.3.4 可导条件等价变换

个人见解：通过将函数$f(z)$对x和iy形式上求偏导，可以证明C-R条件的充要条件是函数$f(z)$中关于x, y的部分可以以整体$z = x + iy$的形式出现，且函数的导数就是形式上对z求导得到的导函数。

1.4 解析函数

1.4.1 定义

如果函数$f(z)$在区域D内处处可导，则称$f(z)$为D内的**解析函数**。若函数在z_0点的邻域处处可导，则称其在z_0点**解析**。

若函数在某点没有意义或不解析，则称这个点为函数的**奇点**。

1.4.2 解析的充要条件

函数$f(z)$在区域D内解析的充要条件是$f(z)$连续且u, v遵守C-R条件。

1.4.3 解析函数的性质

解析函数的实部和虚部由C-R条件联系，称为解析函数的**共轭性**。由这个性质可以由解析函数的实部求得虚部或由虚部求得实部，结果含有一个可加常数。从几何上，共轭性表明函数的等u线和等v线是正交的。

遵循二维拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u = 0$$

的函数称为调和函数，解析函数的实部和虚部都是调和函数，这个性质称为解析函数的**调和性**。满足C-R条件的两个调和函数称为共轭调和函数，解析函数的实部和虚部是一对共轭调和函数。

z平面的两条曲线相交于z_0，他们经过解析函数映射到w平面后，在$f(z_0)$点切线的夹角保持不变，这称为解析函数的**保角性**。这实际上源自导数辐角的几何意义。

2 复变积分

2.1 定义和性质

2.1.1 定义

设L为复平面上的曲线，函数$f(z)$在L上有定义，则与实函数积分类似地定义极限

$$\lim_{\max|\Delta z|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$$

定义为函数$f(z)$沿曲线L的**积分**。记为

$$\int_L f(z)\mathrm{d}z = \lim_{\max|\Delta z|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$$

2.1.2 计算方法

可以将复变积分化为两个实变线积分计算，即

$$\begin{aligned}\int_L f(z)\mathrm{d}z &= \int_L (u+iv)(\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y)\\ &= \int_L (u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y)+i\int_L (v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y)\end{aligned}$$

2.1.3 性质

大致上复变积分的性质是实变积分的直接推广，除此之外我们还有

$$|\int_L f(z)\mathrm{d}z| \leqslant \int_L |f(z)||\mathrm{d}z|$$

这显然由两边之和大于第三边可以得到。作为推论有

$$|\int_L f(z)\mathrm{d}z| \leqslant Ml, \quad M=\max_L f(z)$$

2.2 柯西定理

2.2.1 单通区域的柯西定理

若函数$f(z)$在单通区域D内解析，则$f(z)$在D内沿任意闭曲线的积分为零

$$\oint_l f(z)\mathrm{d}z = 0$$

这称为单通区域内的**柯西定理**。

2.2.2 原函数

由柯西定理可以推知，若$f(z)$在单通区域D内解析，则积分$\int_l f(z)\mathrm{d}z$与路径无关。可以证明，积分上限的函数（显然是一个单值函数）

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

是被积函数$f(z)$的原函数。显然这个原函数可以增加一个任意复常数

$$G(z)=F(z)+C$$

通常把这样的原函数（的集合）称为$f(z)$的**不定积分**，并且有与实变函数中牛顿莱布尼茨公式相同形式的定积分公式

$$\int_{z_0}^{z} f(\xi)\mathrm{d}\xi = G(z)-G(z_0)$$

2.2.3 复通区间内的柯西定理

若$f(z)$在闭复通区间$\bar{D}$解析，则$f(z)$沿所有内外边界线$L=L_0+\sum\limits_k L_k$正方向积分之和为零

$$\oint_L f(z)\mathrm{d}z = \oint_{L_0} f(z)\mathrm{d}z + \sum_k \oint_{L_k} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

其中“正方向”是指，当沿边界环行时，$\bar{D}$保持在左边。换言之，外边界线取逆时针，内边界线取顺时针。由此可以推知，在解析区域中，积分回路连续变形时，积分值不变。

2.3 柯西公式

2.3.1 圆弧引理

小圆弧引理：若$\varphi(z)$在$z=a$的去心邻域内连续，在小圆弧$C_r(z-a=re^{i\theta},\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2)$上

$$\lim_{r\to 0}(z-a)\varphi(z)=k$$

一致成立，则

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r}\varphi(z)\mathrm{d}z=ik(\theta_2-\theta_1)$$

大圆弧引理：若$\varphi(z)$在无穷远点的去心邻域内连续，在大圆弧$C_R(z=Re^{i\theta},\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2)$上

$$\lim_{R\to\infty}z\varphi(z)=K$$

一致成立，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\varphi(z)\mathrm{d}z=iK(\theta_2-\theta_1)$$

2.3.2 柯西公式

单通区域中：设$f(z)$在单通区域$\bar{D}$解析，a为$\bar{D}$的内点，则

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z$$

其中L为$\bar{D}$的边界线，这就是单通区域的**柯西公式**。柯西公式表明，解析函数在边界上的取值完全决定函数在区域内各点的取值。

复通区域中：设$f(z)$在闭复通区域$\bar{D}$中解析，a为$\bar{D}$内点，则

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z$$

其中积分在内外边界均沿正方向。

无界区域：设$f(z)$在积分回路l及l外一点解析，a为l外一点，且

$$\lim_{z\to\infty}f(z)=0$$

则

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_l\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z$$

2.3.3 高阶导数公式

若$f(z)$在$\bar{D}$内解析，z为$\bar{D}$的内点，则$f(z)$在D内可求导任意多次，且

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_L\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\mathrm{d}\xi$$

这表明复变函数和实变函数之间存在重大差别：复变函数只要一阶导数存在，则其任意阶导数存在且连续。

2.3.4 最大模定理

设$f(z)$在$\bar{D}$上解析，则$|f(z)|$在$\bar{D}$的边界上取得最大值。