广义相对论笔记

臧亦驰

2021 年 10 月 10 日

目录

1 数学

*不做特殊说明则连续可导，使用爱因斯坦求和约定

1.1 初步

1.1.1 坐标系

记D维空间中的一组坐标$(x^1, x^2, x^3, \cdots, x^D)$，在空间中有这样一个函数$\varphi = \varphi(x)$，其中$x$表示向量$(x^1, x^2, x^3, \cdots, x^D)$。对于空间中的一段小位移$\mathrm{d}x$，有$\varphi$的变化量

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^n}\mathrm{d}x^n$$

对于另一组坐标y，有两坐标间的变换关系$y^n = y^n(x)$，则有

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y^n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^m}\frac{\partial x^m}{\partial y^n}$$

1.1.2 标量

对于**标量**φ，有变换

$$\varphi(y) = \varphi(x)$$

1.1.3 逆变矢量

对于位移矢量$\mathrm{d}x^n$，有变换

$$\mathrm{d}y^n = \frac{\partial y^n}{\partial x^m}\mathrm{d}x^m$$

一般地，有如下变换形式的矢量V^n称为**逆变矢量**

$$V^n(y) = \frac{\partial y^n}{\partial x^m}V^m(x)$$

1.1.4 协变矢量

对于标量场的梯度矢量$\partial_{x^n}S$，有变换

$$\frac{\partial S}{\partial y^n} = \frac{\partial x^m}{\partial y^n}\frac{\partial S}{\partial x^m}$$

一般地，有如下变换形式的矢量V_n称为**协变矢量**

$$V_n(y) = \frac{\partial x^m}{\partial y^n}V_m(x)$$

1.1.5 张量

将多个具有协变指标或逆变指标的矢量相乘得到（协变/逆变）**张量**，如$A^m B^n C_s = T_s^{mn}$，如此定义的张量有如下变换

$$T_s^{mn}(y) = \frac{\partial y^m}{\partial x^r}\frac{\partial y^n}{\partial x^t}\frac{\partial x^p}{\partial y^s}T_p^{rt}(x)$$

在进行坐标变换时，张量本身不会发生变化，只有张量的分量改变。如果在一个坐标系中张量为0，那么这个张量在任何一个坐标系中都为0。

1.1.6 指标缩并

将一个张量的一对指标取相同的值并求和，得到一个新的张量，其阶数减2

$$T_{rsm}^{mnpq} = T_{rs}^{npq}$$

1.2 进一步

1.2.1 度规张量

在直角坐标系中，有相邻两点间距离

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + \cdots + (\mathrm{d}x^n)^2 \\ &= \delta_{mn}\mathrm{d}x^m\mathrm{d}x^n \end{aligned}$$

则对于任意坐标系有

$$\mathrm{d}s^2 = \delta_{mn}\frac{\partial x^m}{\partial y^r}\frac{\partial x^n}{\partial y^s}\mathrm{d}y^s\mathrm{d}y^r$$

记系数

$$\delta_{mn}\frac{\partial x^m}{\partial y^r}\frac{\partial x^n}{\partial y^s} = g_{rs}(y)$$

称为y坐标系的**度规张量**，这是一个二阶协变张量，则有

$$\mathrm{d}s^2 = g_{mn}(x)\mathrm{d}x^m\mathrm{d}x^n$$

一般设$g_{mn} = g_{nm}$
如果对于某空间中一种坐标系选取，使得其度规张量可以通过坐标变换（在局部）变换为δ_{mn}的形式，则这个空间（的局部）是平坦的。
例：二维平面的直角坐标与极坐标，有

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

取微分

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = \cos\theta\mathrm{d}r - r\sin\theta\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}y = \sin\theta\mathrm{d}r + r\cos\theta\mathrm{d}\theta \end{cases}$$

带入距离微分的公式

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2$$

则极坐标系的度规张量为

$$g_{mn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

非对角线项为0表示坐标轴的等值线相互垂直。

1.2.2 度规张量的逆

将g_{mn}看作矩阵g，有它的逆g^{-1}，使得$g^{-1}g = I$，转化成张量运算，逆矩阵的分量构成一个有两个逆变指标的张量，于是有

$$(g^{-1})^{mr} g_{rn} = \delta^m_n$$

$(g^{-1})^{mn}$简记作g^{mn}。

1.2.3 指标升降

对于一个逆变矢量（指标），可以通过与度规相乘构建一个对应的协变矢量（指标），如下

$$V^m g_{mn} = V_n$$

同理

$$V_m g^{mn} = V^n$$

可以认为逆变指标对应一个矢量在坐标轴上的分量，而协变指标对应一个矢量在坐标轴上的投影。

1.2.4 距离公式的另一种写法

通过下降$\mathrm{d}x^m$的指标得到一个协变矢量$\mathrm{d}x_n = \mathrm{d}x^m g_{mn}$，再对$\mathrm{d}x$上下标缩并，得到

$$\mathrm{d}x^m \mathrm{d}x_m = \mathrm{d}x^m \mathrm{d}x^n g_{mn} = \mathrm{d}s^2$$

1.3 张量微积分

1.3.1 标量的导数

如前文所说，对于标量场φ，注意到$\varphi(x) = \varphi(y)$，有它的导数

$$\frac{\partial \varphi(y)}{\partial y^m} = \frac{\partial x^n}{\partial y^m} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^n}$$

是一个矢量。

1.3.2 张量（矢量）的导数

对矢量的分量直接求导得到的结果

$$\frac{\partial V_n(y)}{\partial y^m} \neq \frac{\partial x^s}{\partial y^m} \frac{\partial V_n(x)}{\partial x^s}$$

并不是一个张量，因为同一矢量在不同坐标系下的分量不一定相等。通过对笛卡尔坐标系中矢量的导数做张量变换可以得到矢量求导的一般方法

$$\nabla_n V_m = \frac{\partial V_m}{\partial y^n} + \Gamma^r_{nm} V_r$$

这样的导数称为**协变导数**。类比可得，张量的协变导数可写成

$$\nabla_p T_{mn} = \frac{\partial T_{mn}}{\partial x^p} + \Gamma^r_{pn} T_{mr} + \Gamma^s_{pm} T_{sn}$$

逆变导数的写法与之类似

$$\nabla_n V^m = \frac{\partial V^m}{\partial x^n} + \Gamma^m_{ns} V^s$$

其中Γ项的引入来源于坐标轴可能的弯曲。由于笛卡尔坐标系的性质，如果一个张量的分量在笛卡尔坐标系中为定值，那么这个张量就是一定值，由此可以得到

$$\nabla_r g_{mn} = 0$$

展开后可以解得

$$\Gamma^p_{mn} = \frac{1}{2} g^{pq} (\frac{\partial g_{qn}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{mq}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^q})$$

称作**克里斯托弗符号**，它不是一个张量。

1.3.3 沿曲线求导

记弧长为s作为自变量，有标量沿曲线方向的导数

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^m} \frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}s}$$

其中$\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}s}$是曲线的单位切向量。类比可得矢量沿曲线方向的导数为

$$\nabla_m V^n \frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}s}$$

1.3.4 测地线

特别地，如果我们求曲线的切向量沿曲线的导数可以得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^n}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^n_{mr} \frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x^r}{\mathrm{d}s}$$

则方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^n}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^n_{mr} \frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x^r}{\mathrm{d}s} = 0$$

描述的曲线就是**测地线**，在平直空间中就是直线。

1.4 曲率

1.4.1 矢量的平行移动

沿着某条曲线移动矢量，使得矢量尽可能平行于自身，这称为矢量的**平行移动**。其满足方程

$$\nabla_n V^m \frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}s} = 0$$

变形得

$$\mathrm{d}V^m = -\Gamma^m_{np} V^n \mathrm{d}x^p$$

若将矢量沿闭合曲线平行移动一周后该矢量无法与原矢量重合，则这一闭合曲线所在的空间非平坦。

1.4.2 锥面与球面

通过观察圆锥展开图可以发现，沿着圆锥面上的闭合曲线平行移动一个矢量，如果该闭合曲线不包含顶点，则移动一周后矢量与原矢量重合，如果该闭合曲线包含原点，则矢量和原矢量有一夹角，其夹角等于圆锥的亏损角。

如果在一球面上沿闭合圆平行移动矢量，则可等价于在一与球面相切的圆锥上移动，其角度变化也等于该圆锥的亏损角。可以证明，在球面上平行移动矢量造成的角度变化正比于闭合曲线包裹面积，而球面半径恒为一定值，由此可以联想到，用“角度变化面密度”来描述曲面的弯曲程度，我们将这个量定义为**二维曲率**。

1.4.3 黎曼张量

考察在x^μ, x^ν两个轴确定的平面上的一个微小闭合四边形曲线，其中四条边分别平行于两个坐标轴，根据曲率的定义有

$$\delta V^\sigma = \mathcal{R}^\sigma_{\tau\mu\nu} V^\tau \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$$

带入矢量平行移动的公式，解得

$$\mathcal{R}^\sigma_{\tau\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Gamma^\sigma_{\nu\tau} - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\tau} + \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\tau} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\tau}$$

这个张量称为**黎曼（曲率）张量**，四个指标中$\mu\nu$表示闭合曲面所确定的平面，$\sigma\tau$表示矢量转过角度所在的平面，为了更好展示对称性，我们把唯一一个上标下移，得到$\mathcal{R}_{\lambda\tau\mu\nu} = g_{\lambda\sigma}\mathcal{R}^\sigma_{\tau\mu\nu}$，注意到黎曼张量满足以下对称性

$$\mathcal{R}_{\lambda\tau\mu\nu} = -\mathcal{R}_{\tau\lambda\mu\nu} = -\mathcal{R}_{\lambda\tau\nu\mu} = \mathcal{R}_{\mu\nu\lambda\tau}$$

同时我们也可以注意到黎曼张量实际上是两个不同方向协变微分的对易子，这从推导过程亦可看出。

1.4.4 里奇张量

由黎曼张量缩并得到

$$\mathcal{R}_{\tau\nu} = \mathcal{R}^\alpha_{\tau\alpha\nu}$$

称为**里奇张量**。值得注意的是，在三维空间中里奇张量和黎曼张量完全等价，因为在三维空间中一个平面可以只由一个轴决定。

1.4.5 标量曲率

由里奇张量进一步缩并得到

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\alpha\alpha}$$

称为**标量曲率**。标量曲率为零是空间平坦的必要不充分条件。

2 物理

*如不特殊说明取光速$c = 1$

2.1 狭义相对论

2.1.1 时空度规

在时空中两个事件之间的固有时用微分形式表示为

$$\mathrm{d}\tau^2 = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2$$

这在洛伦兹变换下保持不变。现将四维时空坐标记为$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$，此处约定讨论时空时以希腊字母做上下标，则对于任意时空坐标系（参考系）有

$$\mathrm{d}\tau^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$$

在闵可夫斯基时空（平直时空）中，度规张量记为

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2.1.2 因果律

如果两个事件之间$\mathrm{d}\tau^2 > 0$，则这两个事件是**类时**的，他们之间存在因果关系，因而在任何参考系中这两个事件的先后顺序都是确定的。如果两个事件之间$\mathrm{d}\tau^2 < 0$，则这两个事件是**类空**的，他们之间不存在因果关系，并且互不影响。任何一个有质量的物体运动的世界线必定是类空的。

2.1.3 光速

特别地，如果两个事件之间$\mathrm{d}\tau^2 = 0$，则这两个事件是**类光**的，**光速**被定义为：沿这个速度前进时，世界线是类光的，那么这样的速度就是光速。在惯性参考系中光速等于c。

2.1.4 四维流矢量

以电荷为例，在单位体积内的电荷数称为**电荷数密度**

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V} = \rho_Q$$

单位时间通过单位面积的电荷数称为**电流密度**

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}A_m \mathrm{d}t} = J^m$$

注意到这两者都是电荷微元比时空体积微元，将它们合并定义**四维电流矢量**

$$J^\mu = (\rho_Q, J^1, J^2, J^3)$$

2.1.5 连续性方程

描述电荷守恒不仅是全局电荷守恒，更重要的是局域电荷守恒，即电荷变化量等于流出边界的电荷量，有**连续性方程**

$$\frac{\partial J^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = 0$$

2.1.6 动量能量张量

系统的能量和动量构成四维动量$p^{\mu} = (E, p^1, p^2, p^3)$，由于这四个分量分别具有守恒定律，类比电荷我们对每个分量都需要定义密度和流，它们构成一个二阶张量$T^{\mu\nu}$，它的分量是p^{μ}在x^{ν}方向上的流密度，这个张量叫做**动量能量张量**。

由此，狭义相对论下的动量和能量的守恒方程就可以写成如下形式

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0$$

2.2 广义相对论

2.2.1 测地线与运动方程

根据等效原理，只受万有引力的自由粒子运动轨迹应当是一条测地线

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^{\mu}}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}\frac{\mathrm{d}x^{\sigma}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}\tau} = 0$$

在非相对论的近似下，$\mathrm{d}\tau^2 \approx \mathrm{d}t^2 = (\mathrm{d}x^0)^2$，此时测地线方程即粒子运动方程化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\Gamma^1_{00} = -\frac{1}{2}g^{1\mu}\left(\frac{\partial g_{\mu 0}}{\partial t} + \frac{\partial g_{0\mu}}{\partial t} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\mu}}\right)$$

同时假设引力和引力场的变化（即引力源的运动）都很弱，则有$g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$，于是

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x}$$

同时在经典力学中，设引力势为ϕ，则有

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

于是可以知道g_{00}和万有引力势之间存在联系$g_{00} = \frac{1}{2}\phi + C$，根据对无穷远处的情形分析，我们发现常数$C = 1$。

2.2.2 引力场的源

根据经典力学，万有引力中有高斯定理

$$\nabla \cdot \vec{A} = -4\pi\rho G$$

其中$\vec{A}$为万有引力引起的加速度场，则有

$$\nabla^2 \phi = 4\pi\rho G$$

质量密度实际上等同于能量密度，而引力势和g_{00}有关，于是我们可以得到一个近似的方程

$$\nabla^2 g_{00} = 8\pi G T^{00}$$

2.2.3 爱因斯坦方程

通过对以上方程观察，不难猜想如果能找到一个张量$G^{\mu\nu}$使其在非相对论近似下有$G^{00} \approx \nabla^2 g_{00}$，那么以下张量方程就可能成立

$$G^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu}$$

这样的一个张量应当仅包括度规张量和二阶导数。从能量守恒的角度出发我们可以得到一个满足这样条件的张量

$$G^{\mu\nu} = \mathcal{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{R}$$

这个张量被称为**爱因斯坦张量**。于是我们有**爱因斯坦方程**

$$\mathcal{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{R} = 8\pi G T^{\mu\nu}$$

对其两边同时乘$g_{\mu\nu}$缩并后带回原方程可以得到爱因斯坦方程的另一种形式

$$\mathcal{R}^{\mu\nu} = 8\pi G (T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T)$$

2.2.4 关于G的推理过程*

由广义相对论的能动量守恒方程可得

$$\nabla_\nu G^{\mu\nu} = 8\pi G \nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$$

因为$G^{\mu\nu}$中应包含度规张量和二阶导数，猜测$G^{\mu\nu} = \mathcal{R}^{\mu\nu}$，有

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \mathcal{R}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\nu \mathcal{R} \\ &= \frac{1}{2} \nabla_\nu (g^{\mu\nu} \mathcal{R}) \end{aligned}$$

第二个等式来自度规张量的协变导数为零这一事实。由此可以发现满足能动量守恒的一个$G^{\mu\nu}$

$$G^{\mu\nu} = \mathcal{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{R}$$

2.2.5 真空解定性讨论

特别地，在爱因斯坦方程中，如果取$T^{\mu\nu} = 0$，即空间中没有物质，则

$$\mathcal{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{R} = 0$$

用$g_{\mu\nu}$进行缩并并注意到$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \delta^\mu_\mu = 4$，可以得到标量曲率为0，带回缩并前的方程，发现里奇张量同样为0。然而在四维时空中，里奇张量不能完整表明时空的弯曲程度，也即没有物质的时空仍可能是不平坦的，诸如引力波的扰动仍可能存在。这样的扰动同样也会携带能量，而这种能量是不被动量能量张量刻画的。

2.2.6 宇宙常数

由于度规张量的协变导数和爱因斯坦张量一样为0，因此以下方程也满足能动量守恒

$$G^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu}$$

其中常数Λ被称为**宇宙常数**，其出现会为引力定律引入一项修正，修正项的吸引/排斥取决于其符号。

2.2.7 拉格朗日量

一个自由粒子的作用量被定义为

$$S = -m\int_A^B \mathrm{d}\tau$$

对其展开可得

$$\begin{aligned}
S &= -m\int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu} \\
&= -m\int_A^B \sqrt{g_{mn}\mathrm{d}x^m\mathrm{d}x^n + 2g_{m0}\mathrm{d}x^m\mathrm{d}t + g_{00}\mathrm{d}t\mathrm{d}t} \\
&= -m\int_A^B \sqrt{g_{mn}\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}t} + 2g_{m0}\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}t} + g_{00}}\mathrm{d}t \\
&= -m\int_A^B L\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

由此可得，自由粒子的拉格朗日量为

$$L = \sqrt{g_{mn}\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}t} + 2g_{m0}\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}t} + g_{00}}$$

2.3 一些特定问题

2.3.1 匀加速参考系

狭义相对论中，匀加速参考系的世界线是一族双曲线

$$x^2 - t^2 = \rho^2$$

这样的一条世界线在洛伦兹变换下保持不变，这保证了沿着世界线运动的观察者观察到的自身加速度恒定不变。我们可以把它写成

$$\begin{cases} x = \rho\cosh\omega \\ t = \rho\sinh\omega \end{cases}$$

其中，ρ是类空参量，ω是类时参量。

在该参考系下，沿不同双曲线运动的观察者之间的距离保持不变，但他们的加速度不同，越靠近原点的观察者加速度越大。这样的坐标系具有一个事件视界，即双曲线族的渐近线$x = t$。当物体的世界线越过渐近线后，它发出的光就永远无法被该参考系下的观察者接收到，对观察者而言，该物体会无限逼近事件视界而无法到达。值得注意的是，此时的时空依然是平直的。

2.3.2 伦德勒度规

现在写出匀加速参考系的时空度规

$$g_{\mu\nu} = diag\{\rho^2, -1, -1, -1\}$$

这个度规被称为**伦德勒度规**。值得注意的是，我们知道，度规的时间时间分量可以类比为经典力学中的引力势，而在伦德勒度规中度规的时间时间分量随距离变化而变化，因此这会导致一个向原点的“力”的产生。

2.3.3 史瓦西度规

对于质点，其外侧的时空度规如下（空间使用球坐标，即$x^\mu = (t, r, \varphi, \theta)$）

$$g_{\mu\nu} = diag\{1 - \frac{2MG}{r}, -\frac{1}{1 - \frac{2MG}{r}}, -r^2, -r^2 \sin^2\varphi\}$$

这被称为**史瓦西度规**。当距离很远或质量很小时，史瓦西度规即转变为平坦空间的度规

$$g_{\mu\nu} = diag\{1, -1, -r^2, -r^2 \sin^2\varphi\}$$

根据**伯克霍夫定理**，对于任何有边界的球对称质量分布，在边界外的时空度规和黑洞度规一样。

2.3.4 史瓦西度规和伦德勒度规的关联

在伦德勒空间中，设$\rho^2 = \chi$，在新的坐标中有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\tau^2 &= \chi^2 \mathrm{d}\omega^2 - \mathrm{d}\chi^2 \\ &= \chi \mathrm{d}\omega^2 - \frac{\mathrm{d}\chi^2}{4\chi} \end{aligned}$$

可以发现其形式与史瓦西解的形式相似。

在史瓦西度规中，当$r = 2MG$时，出现了时空奇点，此时时间对固有时的系数为0，而空间对固有时的系数为无穷大，如果$r < 2MG$，则类时坐标和类空坐标的符号发生互换。而在伦德勒度规中对应的分界点是$\chi = 0$，也就是伦德勒视界。根据定义，$\chi < 0$出现在双曲线渐近线的另一侧，在这里同样类时坐标和类空坐标的符号发生互换。然而需要记住的是，在伦德勒度规中，时空本身依然是平坦的，只是特殊的坐标系选取造成了奇异的现象。

2.3.5 在黑洞视界附近

在$r \approx 2MG$时，我们可以对史瓦西解做一些小量近似

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\tau^2 &= (1 - \frac{2MG}{r})\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{2MG}{r}} - r^2 \mathrm{d}\Omega^2 \\ &\approx \frac{r - 2MG}{2MG}\mathrm{d}t^2 - \frac{2MG}{r - 2MG}\mathrm{d}r^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 \end{aligned}$$

现在我们要求在视界周围一点到视界处的固有距离，需要求以下积分

$$\begin{aligned} \rho = \int \mathrm{d}s &= \int_{2MG}^{r} \sqrt{\frac{2MG}{r - 2MG}} \mathrm{d}r \\ &= 2\sqrt{2MG}\sqrt{r - 2MG} \end{aligned}$$

现在以坐标ρ代替r重新写出度规

$$\mathrm{d}\tau^2 = \frac{\rho^2}{16M^2G^2}\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\rho^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2$$

将其与伦德勒度规对比

$$\mathrm{d}\tau^2 = \rho^2 \mathrm{d}\omega^2 - \mathrm{d}\rho^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2$$

我们会发现，只要令$\omega = t/(4MG)$，那么这两个坐标就完全等价了。也就是说，在靠近黑洞视界的地方，时空几何与匀加速参考系的几何完全一样。换言之，黑洞视界附近的空间同样是平坦空间。

2.3.6 视界内部

在视界内部，$\mathrm{d}r^2$和$\mathrm{d}t^2$的符号改变，此时$r = const$成为一个类空曲面，即成为一个时间坐标，其上的世界线亦变为类空的，因而物体不可能维持在一个恒定不变的r，只能加速坠落。时空在$r = 0$处是一个奇点，而这个点同样是一个类时坐标，于是进入视界内部后物体就将无可避免地撞上奇点。