线性代数笔记

臧亦驰

2021 年 10 月 21 日

目录

1 行列式

1.1 定义

1.1.1 递归定义

对于一个行列式D，去掉第m行和第n列后剩下的元素按顺序组成的低一阶行列式M_{mn}称作a_{mn}的**余子式**，称$A_{mn}=(-1)^{m+n}M_{mn}$为a_{mn}的**代数余子式**

定义一阶行列式的值为

$$|a_{11}|=a_{11}$$

n阶行列式的值为

$$D=\sum_{i=1}^{n}a_{1i}A_{1i}$$

1.1.2 一般定义

对于将序列$1,2,\cdots,n$次序交换k次得到的排列$k_1,k_2,\cdot,k_n$，称k为它的**逆序数**。定义一个n阶行列式的值为

$$D=\sum\{(-1)^k\prod_{i=1}^{n}a_{ik_i}\}$$

1.2 性质

1.2.1 对角线

行列式中，行列下标相同的元素组成的对角线称为**主对角线**，另一条对角线称为**副对角线**。

主对角线以下（上）所有元素为零的行列式称为**上（下）三角行列式**，三角行列式的值为主对角线上元素的乘积。特别地，除了主对角线上元素外其他元素都为零的行列式称为**主对角行列式**。

1.2.2 行和列

对于一个行列式D，将它的行和列互换得到的行列式称为D的**转置行列式**，记为D^T。行列式和它的转置相等。

对于一个行列式，交换它的两行（列），行列式变号；

如果行列式的两行（列）的元素对应成比例，则行列式为零；

用数k乘行列式的某一行（列），得到的行列式是原来的k倍；

把行列式的某一行（列）乘一个系数后加到另一行（列）上，行列式的值不变；

1.2.3 反对称行列式

若一个行列式的元素满足$a_{ij}=-a_{ji}$，则称其为**反对称行列式**。奇数阶反对称行列式的值为零。

1.2.4 行列式展开

根据行列式的性质，一个行列式也可以写成其任意一行（列）的元素与其代数余子式乘积的和，即

$$D=\sum_{i=1}^{n}a_{ji}A_{ji}=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}A_{ik}$$

同时有

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=0,\quad i\neq j$$

1.2.5 克拉默法则

对于n元线性方程组

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ji}x_i=b_j,\quad j=1,2,\cdots,n$$

称其系数a_{mn}构成的行列式为**系数行列式**，记为D。将D中的第j列中所有元素对应替换为$b_1,b_2,\cdots,b_n$，得到的行列式记为D_j。

如果线性方程组的系数行列式不为零，则有唯一解

$$x_j=\frac{D_j}{D}$$

2 矩阵基础

2.1 基础

2.1.1 定义

m行n列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为$m\times n$**矩阵**。

2.1.2 特殊矩阵

所有元素均为零的矩阵称为**零矩阵**，记为$\mathbf{O}$；

对角线元素为1其他元素为0的n阶方矩阵称为**单位矩阵**，记为$\mathbf{I}$。对角线元素为某一常数其他元素为零的矩阵称为**数量矩阵**。

2.2 运算

2.2.1 加法

同型矩阵之间，对应元素直接相加，方矩阵与数字之间相加，相当于方矩阵与对应数量矩阵相加。加法满足交换律、结合律。

2.2.2 数乘

矩阵乘一个数等于其所有元素均称同一个数。数乘满足交换律、结合律、分配律。

2.2.3 矩阵乘法

一个$m \times s$的矩阵$\mathbf{A}$和一个$s \times n$的矩阵$\mathbf{B}$相乘得到一个$m \times n$的矩阵$\mathbf{C}$。其运算规则为

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj}$$

即乘积矩阵的第i行j列的元素等于$\mathbf{A}$的第i行与$\mathbf{B}$的第j列点乘的结果。只有左边矩阵的列数等于右边矩阵的行数时两个矩阵才能相乘，矩阵乘法不满足交换律和消去律，但满足结合律。

2.2.4 转置

将矩阵的行和列互换得到的矩阵称为原矩阵的**转置**，记矩阵$\mathbf{A}$的转置为$\mathbf{A}^T$。矩阵的转置满足$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$。

若对于n阶方矩阵$\mathbf{A}$，有$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$，则称矩阵$\mathbf{A}$为**对称矩阵**；若$\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$，则称矩阵$\mathbf{A}$为**反对称矩阵**。则对于任意矩阵$\mathbf{A}$，$\mathbf{AA}^T, \mathbf{A}^T\mathbf{A}$都是对称矩阵；若$\mathbf{A}$是$n$阶对称矩阵，$\mathbf{B}$是$n$阶反对称矩阵，则$\mathbf{AB}+\mathbf{BA}$是$n$阶反对称矩阵。

2.2.5 幂

对于方阵$\mathbf{A}$，k个$\mathbf{A}$的乘积称为**$\mathbf{A}$的k次幂**，记为$\mathbf{A}^k$。如果存在正整数m，使得$\mathbf{A}^m = \mathbf{O}$，则称矩阵$\mathbf{A}$为**幂零矩阵**。

2.2.6 行列式

方阵的行列式满足：

$$\begin{cases} |\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}| \\ |k\mathbf{A}| = k^n|\mathbf{A}| \\ |\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| = |\mathbf{BA}| \end{cases}$$

2.3 逆

2.3.1 定义

对于一个方矩阵$\mathbf{A}$，如果存在$\mathbf{B}$满足

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$$

则称矩阵$\mathbf{B}$为矩阵$\mathbf{A}$的**逆矩阵**，记为$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$。逆矩阵是唯一的。

2.3.2 性质

逆矩阵满足以下性质

$$\begin{cases}(\mathbf{A}^{-1})^{-1}=\mathbf{A}\\(k\mathbf{A})^{-1}=\dfrac{1}{k}\mathbf{A}^{-1}\\(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\\(\mathbf{A}^T)^{-1}=(\mathbf{A}^{-1})^T\\|\mathbf{A}||\mathbf{A}^{-1}|=1\end{cases}$$

2.3.3 伴随矩阵

设$\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，定义以下矩阵

$$\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$$

为$\mathbf{A}$的**伴随矩阵**，即$\mathbf{A}^*=(A_{ji})_{n\times n}$。其中$A_{ij}$为$|\mathbf{A}|$中$a_{ij}$的代数余子式。可以得到

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^*=|\mathbf{A}|\mathbf{I}$$

2.3.4 可逆性

矩阵$\mathbf{A}$可逆的充要条件是$|\mathbf{A}|\neq 0$，它的逆矩阵为

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|}$$

当$|\mathbf{A}|=0$时，矩阵$\mathbf{A}$称为**奇异矩阵**。

2.4 初等变换

2.4.1 定义

下列三种变换称作矩阵的**初等变换**：

交换矩阵的两行（列）；

用非零数k乘矩阵的某一行（列）；

把某一行（列）的k倍加到另一行（列）上。

若矩阵$\mathbf{A}$经过有限次初等变换得到矩阵$\mathbf{B}$，则称这两个矩阵**等价**，记为$\mathbf{A}\cong\mathbf{B}$或$\mathbf{A}\to\mathbf{B}$。任意一个矩阵都可以通过有限次变换化为以下标准形矩阵

$$\begin{pmatrix}\mathbf{I}&\mathbf{O}\\\mathbf{O}&\mathbf{O}\end{pmatrix}$$

任意一个可逆矩阵都可以通过有限次变换化为单位矩阵。

2.4.2 初等矩阵

对单位矩阵施以一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵**，三种初等变换对应三种初等矩阵：
交换两行（列）：

$$I(i,j)_{pq} = \begin{cases} \delta_{pq}, & p \neq i,j \\ \delta_{pj}, & p = i \\ \delta_{pi}, & p = j \end{cases}$$

将其中一行（列）乘非零数k：

$$I(i(k))_{pq} = \begin{cases} \delta_{pq}, & p \neq i \\ k\delta_{pq}, & p = i \end{cases}$$

将其中一行（列）乘k加到另一行（列）：

$$I(ij(k))_{pq} = \begin{cases} \delta_{pq}, & p \neq i \\ \delta_{pq} + k\delta_{pj}, & p = i \end{cases}$$

用初等矩阵左乘/右乘一个矩阵，就相当于对它的行/列做初等变换。

2.4.3 初等变换求矩阵的逆

矩阵$\mathbf{A}$可逆的充要条件是$\mathbf{A}$可以表示成若干初等矩阵乘积。可以证明，若对矩阵$\mathbf{A}$做一系列初等变换得到单位矩阵$\mathbf{I}$，则对单位矩阵做相同初等变换就可以得到$\mathbf{A}$的逆矩阵$\mathbf{A}^{-1}$。

由此可知，对矩阵$(\mathbf{A},\mathbf{I})$做初等行变换，即可以得到$(\mathbf{I},\mathbf{A}^{-1})$；对矩阵$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix}$做初等行变换，即可以得到$\begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{A}^{-1} \end{pmatrix}$

2.5 分块矩阵

2.5.1 定义

把一个矩阵分成许多小块，每个小块都是一个矩阵，称为**子矩阵**。

2.5.2 运算

分块矩阵的加法、数乘和乘法都与普通矩阵类似。

2.5.3 分块矩阵求逆

对于方矩阵的分块，如果只有主对角线上有非零小方矩阵，则称其为**分块对角阵**。分块对角阵的行列式等于各小矩阵行列式之积，分块对角阵的逆等于各小矩阵的逆组成的新矩阵。

若矩阵$\mathbf{A}$可按以下方式分块

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{D} \\ \mathbf{O} & \mathbf{C} \end{pmatrix}$$

且$\mathbf{B},\mathbf{C}$可逆，则矩阵$\mathbf{A}$可逆，且

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{B}^{-1} & -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{C}^{-1}\\ \mathbf{O} & \mathbf{C}^{-1}\end{pmatrix}$$

若矩阵$\mathbf{A}$可按以下方式分块

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{O}\\ \mathbf{D} & \mathbf{C}\end{pmatrix}$$

且$\mathbf{B},\mathbf{C}$可逆，则矩阵$\mathbf{A}$可逆，且

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{B}^{-1} & \mathbf{O}\\ -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1} & \mathbf{C}^{-1}\end{pmatrix}$$

2.6 矩阵的秩

2.6.1 定义

在一个$m\times n$的矩阵$\mathbf{A}$中任取k行k列，他们相交处的元素构成一个k阶行列式称为矩阵$\mathbf{A}$的k**阶子式**。矩阵中最高阶非零子式的阶数称作矩阵的**秩**。记为$r(\mathbf{A})=k$。零矩阵的秩为零。当矩阵的秩满足$r(\mathbf{A})=\min\{m,n\}$时，称其为**满秩矩阵**，否则称之为**降秩矩阵**。显然，可逆矩阵都是满秩的。

2.6.2 秩的求法

初等矩阵变换不改变矩阵的秩。若将一个矩阵化为标准形

$$\mathbf{A}\cong\begin{pmatrix}\mathbf{I}_r & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{pmatrix}$$

那么$r(\mathbf{A})=r$。

2.6.3 秩的性质

$$\begin{cases}\max\{r(\mathbf{A}),r(\mathbf{B})\}\leqslant r(\mathbf{A},\mathbf{B})\leqslant r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})\\ r(\mathbf{A}+\mathbf{B})\leqslant r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})\\ r(\mathbf{A}\mathbf{B})\leqslant\min\{r(\mathbf{A}),r(\mathbf{B})\}\\ \mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{B}_{n\times l}=\mathbf{O}\Rightarrow r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})\leqslant n\\ r\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{pmatrix}=r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})\end{cases}$$

3 矩阵进一步

3.1 特征向量特征值

3.1.1 定义

设$\mathbf{A}$是一个方矩阵，如果存在数λ和非零向量$\mathbf{x}$，使

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

则称数λ为矩阵$\mathbf{A}$的**特征值**，向量$\mathbf{x}$为对应于特征值λ的**特征向量**。通过对方程变换可以得到

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

方阵的特征值可以通过解这个方程求得。

3.1.2 求特征值

矩阵$\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$称为矩阵$\mathbf{A}$的**特征矩阵**，它的行列式称为矩阵$\mathbf{A}$的**特征行列式**。通过解方程

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$$

即可以求出矩阵的特征值。这个方程称为矩阵的**特征方程**。

3.1.3 性质

矩阵的特征值具有以下性质

$$\begin{cases} \sum \lambda_i = \sum a_{ii} \\ |\mathbf{A}| = \prod \lambda_i \end{cases}$$

并且有：矩阵和它的转置特征值相同；$k\lambda$是$k\mathbf{A}$的特征值；λ^m是$\mathbf{A}^m$的特征值；λ^{-1}是$\mathbf{A}^{-1}$的特征值，且以上情况特征向量均不变。