数理方法笔记

臧亦驰

目录

1 复变函数

1.1 基本概念

1.1.1 复变函数

以复数作为自变量和因变量的函数称为复变函数

$$w = f(z)$$

若令 $w = u + iv$，则复变函数可以写成两个二元实函数的有序组合

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

复变函数可以是单值函数，也可以是多值函数。

1.1.2 导数与微分

对于单值函数 $w = f(z)$，定义它在 z 点的导数为

$$f'(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f(z) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

与实函数类似可以定义微分。

复变函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 可导的充要条件是 u, v 在该点处

1. 可微
2. 满足柯西-黎曼条件 (简称 C-R 条件)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

在极坐标下函数 $f(r, \theta) = \rho e^{i\varphi}$ 的 C-R 条件可以写为

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\rho}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial r}$$

可以证明，C-R 的充要条件是当把复变函数写成 $w = f(z, z^*)$ 的形式时

$$\left(\frac{\partial w}{\partial z^*} \right)_z = 0$$

函数不可导的点称为奇点。

1.1.3 解析性

若函数 $f(z)$ 在 z_0 的邻域内处处可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 处解析。若函数在区域内所有点解析，则称函数在这个区域上解析。

- 解析函数的虚部和实部之间通过 C-R 条件相联系，称为解析函数的共轭性;
- 解析函数的虚部和实部都满足二维拉普拉斯方程，这称为解析函数的调和性;
- 经过解析函数映射后两条曲线之间的夹角保持不变，称为解析函数的保角性。

1.1.4 多值函数

对于每一个多值函数，都存在一些特定的点，当 z 绕着这些点旋转一周后回到原处，函数值由一个单值分支变到另一个单值分支，这些特殊的点称为支点。若函数在旋转 n 圈后回到原来函数值，则称这个支点为 $n-1$ 阶支点。

设想每个单值分支都定义在一个不同的 z 平面上，再将这些平面沿着几条割线剪开后相互粘连，使得 z 的连续变化对应于函数值的连续变化，这样形成的结构称为黎曼面。原本的多值结构成为了定义在黎曼面上的单值结构。

多值函数的支点一定是奇点。

1.2 复变积分

1.2.1 定义

对于复平面上的一条曲线 L，可以定义复变函数 $f(z)$ 沿曲线的积分

$$\int_L f(z)\mathrm{d}z = \lim_{\max|\Delta z|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$$

它可以化为两个实变线积分计算。

1.2.2 柯西定理与原函数

若 $f(z)$ 在单通区域 D 上解析，则 $f(z)$ 沿区域内任意闭合曲线积分为 0

$$\oint_{i\in D} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

对于复通区间则有 $f(z)$ 沿所有边界线正方向回路积分之和为 0。其中正方向指沿环路积分时区域保持在左侧。

由柯西定理我们知道，在单通的解析区域内积分 $\int_l f(z)\mathrm{d}z$ 与路径选择无关，于是可以与实函数类似地定义原函数

$$g(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z$$

且牛顿莱布尼茨公式成立。

1.2.3 柯西公式

对于区域 D 内部一点 a，有

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z$$

其中积分回路 L 分别对应于该区域 (可能是单通、复通或无界) 的所有边界。其中无界区域柯西公式需要满足

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$$

当以上极限为有限值 A 时，无界区域的柯西公式可以拓展如下

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = \begin{cases} f(a)-A, & a\text{在回路外} \\ -A, & a\text{在回路内} \end{cases}$$

柯西公式表明解析函数区域内函数值可以完全由边界决定。

柯西公式的一个重要推论是高阶导数的柯西公式

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\mathrm{d}\xi$$

这说明解析函数的任意阶导数存在。

柯西公式的另一个重要推论是刘维尔定理，它表明复变函数不可能在包含无穷远点的全平面解析，除非它是一个常函数。

1.3 级数展开

1.3.1 幂级数

形如

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-b)^k = a_0 + a_1(z-b) + \cdots$$

的无穷级数称为幂级数。根据阿贝尔定理，对于任意幂级数都存在一个圆，在园内级数绝对收敛而圆外发散，这个圆称为收敛圆。对幂级数的逐项求导或积分不改变收敛半径。

通过根式判别和比值判别法可以得到以下两种求级数收敛半径的方法

$$R = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{a_k}} = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$$

1.3.2 泰勒展开

在圆域 $|z-b| < R$ 内解析的函数 $f(z)$ 可以在园内任意一点展开为泰勒级数

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-b)^k$$

其中系数称为泰勒系数

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{k+1}}\mathrm{d}\xi = \frac{f^{(k)}(b)}{k!}$$

1.3.3 洛朗展开

在环域 $R_1 < |z-b| < R_2$ 内解析的函数 $f(z)$ 可以在环域内任意一点展开为洛朗级数

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(z-b)^k$$

其中系数称为洛朗系数

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{k+1}}\mathrm{d}\xi$$

积分回路为环域内任意绕小圆的曲线。

1.3.4 零点与孤立奇点

解析函数值为 0 的点称为解析函数的零点。若零点邻域的泰勒展开系数中最小的非零项系数为 a_m，则称这个零点为 m 阶零点。非常值的解析函数的零点具有孤立性。

解析函数的孤立奇点指在其邻域内函数解析的奇点。依据解析函数在孤立奇点 b 邻域的洛朗展开系数可以将其分为

可去奇点 $f(z)$ 在 b 处的极限存在且为有限值，且在 $z=b$ 的去心邻域内洛朗展开不含负幂次项；

m 阶奇点 $f(z)$ 在 b 处的极限为无穷，且在 $z=b$ 的去心邻域内洛朗展开含有有限个负幂次项，最低为 $-m$ 阶，也称为 m 阶极点；

本性奇点 $f(z)$ 在 b 处的极限无定值，且在 $z=b$ 的去心邻域内洛朗展开含有无穷多负幂次项。

1.4 留数定理

1.4.1 留数定理

若函数在区域 D 内只有有限个孤立奇点 b_k，则

$$\oint_L f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_k \mathrm{Res}f(b_k)$$

积分回路为区域边界。式中 $\mathrm{Res}f(b_k)$ 称为函数在 b_k 点的留数，它等于函数在 b_k 去心邻域内洛朗展开系数 $a_{-1}^{(k)}$。

若函数在全平面上除了有限个孤立奇点以及无穷远点外解析，则有

$$\sum_k \mathrm{Res}f(b_k) + \mathrm{Res}f(\infty) = 0$$

1.4.2 计算留数的方法

可去奇点

$$\mathrm{Res}f(b) = 0$$

m 阶极点

$$\mathrm{Res}f(b) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to b}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}^{m-1}[(z-b)^m f(z)]\right)$$

1 阶极点 若 $f(z)$ 能写成两个解析函数之商 $f(z)=\varphi(z)/\psi(z)$，且 $\varphi(b)\psi'(b)\neq 0$，则

$$\mathrm{Res}f(b) = \frac{\varphi(b)}{\psi'(b)}$$

本性奇点 直接求洛朗展开系数。

1.4.3 留数定理计算实积分

首先介绍几个引理

- 若 $\lim_{z\to\infty} zf(z)=0$，则对上半圆周积分

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z=0$$

- 若 $\lim_{z\to\infty} f(z)=0$，则对上半圆周积分

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)e^{imz}\mathrm{d}z=0,\quad m>0$$

- 若 b 是实轴上的一阶极点，则在 b 附近上半圆周积分

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)\mathrm{d}z=-\pi i\mathrm{Res}f(b)$$

由这些引理出发，通过取无穷大上半圆作为积分回路可以计算许多实无穷积分。

除此之外还有一类可以用留数定理计算的积分

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

可以做变量代换 $z=e^{i\theta}$，此时原积分化为

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta=\oint_{|z|=1} f\left(\frac{1}{2}(z+z^{-1}),\frac{1}{2i}(z-z^{-1})\right)\frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

进而可以用留数定理计算。

1.5 傅里叶变换与拉普拉斯变换

1.5.1 傅里叶级数

周期函数如果满足满足狄利克雷条件：在 $[-T/2,T/2]$ 上有有限个第一类间断点且有有限个单调区间，则可以写成如下傅里叶级数

$$f(t)=a_0+\sum_n\left(a_n\cos\frac{2n\pi t}{T}+b_n\sin\frac{2n\pi t}{T}\right)$$

可以证明这是一组完备正交函数族。其中系数为

$$\begin{cases} a_0=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\mathrm{d}t \\ a_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\frac{2n\pi t}{T}\mathrm{d}t \\ b_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\frac{2n\pi t}{T}\mathrm{d}t \end{cases}$$

记 $\omega_0 = 2\pi/T$，则傅里叶级数可以写成

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-in\omega_0 t}$$

其中系数为

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{in\omega_0 t} \mathrm{d}t$$

1.5.2 傅里叶变换

对于非周期函数，若其满足分段光滑且至多只有第一类间断点，并且 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \mathrm{d}t$ 存在，则我们可以对其做傅里叶变换。

$$\begin{cases} f(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} \mathrm{d}\omega \\ F(\omega) = \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} \mathrm{d}t \end{cases}$$

有时也会用 (x, k) 分别表示原函数和像函数的自变量，在这种情况下取相反的正负号。

傅里叶变换的像函数有如下几条性质

- 线性可加性
$$\mathcal{F}\left[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right] = c_1 \mathcal{F}\left[f_1(t)\right] + c_2 \mathcal{F}\left[f_2(t)\right]$$
- 平移与相似
$$\mathcal{F}\left[f(at)\right] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$
$$\mathcal{F}\left[f(t - t_0)\right] = e^{i\omega t_0} F(\omega)$$
- 若对于 $m = 0, 1, \cdots n-1$，有 $f^{(m)}(t)|_{t\to\infty} = 0$，则
$$\mathcal{F}\left[f^{(n)}(t)\right] = (-i\omega)^n F(\omega)$$
- 若 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \mathrm{d}t = 0$，则
$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\xi) \mathrm{d}\xi\right] = \frac{1}{i\omega} F(\omega)$$
- 原函数的乘积对应像函数的卷积
$$\mathcal{F}\left[f_1(t) f_2(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\eta) F_2(\omega - \eta) \mathrm{d}\eta$$

1.5.3 δ 函数

为了使得不绝对可积的常函数、正余弦函数可以进行傅里叶变换，引入 δ 函数。它满足如下性质

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}, \quad \int_a^b \delta(x) \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & 0 \notin (a, b) \\ 1, & 0 \in (a, b) \end{cases}$$

δ 函数是一种广义函数，它的意义在积分中体现。

对于连续函数，可以用 δ 函数取出它在某点处的导数值 (函数值)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta^{(n)}(x)\mathrm{d}x = (-1)^n f^{(n)}(0)$$

除此之外，δ 函数的性质包括

- δ 函数是偶函数，导函数是奇函数；
- δ 函数的积分是阶跃函数

$$H(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(\eta)\mathrm{d}\eta = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

- δ 函数和普通函数卷积得到函数本身 $f(x) * \delta(x) = f(x)$；
- δ 函数可写成某些函数序列的极限；
- δ 函数的傅里叶变换是常函数

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)e^{-i\omega x} = \frac{1}{2\pi}, \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x}\mathrm{d}\omega$$

由此可以写出如三角函数，阶跃函数，整幂次函数等不满足绝对可积的函数的傅里叶变换。

1.5.4 拉普拉斯变换

为了使傅里叶变换适用更广泛的条件，考虑一个从 $t = 0$ 时刻出现的物理量，即 $f(t) = 0, t < 0$。在它上面乘一个指数衰减因子使得积分收敛，我们可以类似地得到变换

$$F(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$$

其中 $p = \sigma + i\omega$ 是实部大于零的复数。这称为拉普拉斯变换，其逆变换为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(p)e^{pt}\mathrm{d}p$$

拉普拉斯变换的适用条件是函数在 $t \geqslant 0$ 上至多只有有限个第一类间断点，且存在常数 $M > 0$ 和 $\sigma \geqslant 0$，使得

$$\forall t \geqslant 0,\ |f(t)| < Me^{\sigma t}$$

其中 σ 的下界用 σ_0 表示，可以证明拉普拉斯变换的像函数是在 $\mathrm{Re}p = \sigma > \sigma_0$ 的半平面上的解析函数。

拉普拉斯变换的其他性质与傅里叶变换基本一致，除了注意到

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right] = \frac{1}{p}\mathcal{L}\left[f(t)\right] - f(0)$$

1.5.5 反演问题

由像函数求原函数的问题称为反演问题。之前给出的逆变换积分公式称为黎曼梅林反演公式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(p)e^{pt}\mathrm{d}p$$

在此基础上可以得到拉普拉斯变换的展开定理：对于单值的像函数 $F(p)$，如果满足在 $0\leqslant\arg p\leqslant 2\pi$ 内有

$$\lim_{p\to\infty}F(p)=0$$

则

$$f(t)=\sum_{\text{全平面}}\mathrm{Res}[F(p)e^{pt}]$$

如果不满足以上条件，但是满足在任意小的 δ 下在 $-\dfrac{\pi}{2}+\delta\leqslant\arg p\leqslant\dfrac{\pi}{2}-\delta$ 内

$$\lim_{p\to\infty}F(p)=0$$

则有

$$f(t)=\sum_{\mathrm{Re}p<\sigma_0}\mathrm{Res}[F(p)e^{pt}]$$