

# 量子场论笔记

臧亦驰

# 目录

<b>1 量子场论</b>	<b>4</b>
1.1 经典场论	4
1.1.1 经典力学回顾	4
1.1.2 经典场论	4
1.1.3 诺特定理	5
1.1.4 洛伦兹群	5
1.1.5 表示与场	6
1.2 自由标量场	6
1.2.1 克莱因-戈登方程	6
1.2.2 正则量子化	7
1.2.3 态的产生与湮灭	7
1.2.4 海森堡图景	8
1.2.5 因果律与关联函数	9
1.2.6 传播子	9
1.3 狄拉克旋量场	10
1.3.1 狄拉克方程	10
1.3.2 外尔旋量	10
1.3.3 手征性与螺旋性	11
1.3.4 平面波解	12
1.3.5 狄拉克场量子化	12
1.3.6 狄拉克场的态	13
1.3.7 传播子	14
1.4 阿贝尔规范场	14
1.4.1 经典麦克斯韦场	14
1.4.2 矢量场量子化	15
1.4.3 勃洛勒量子化	16
1.4.4 传播子	16
1.5 路径积分理论	16
1.5.1 路径积分原理	16
1.5.2 温伯格作用量原理	17
1.6 微扰场论	18
1.6.1 微扰展开	18
1.6.2 相互作用真空态	19
1.6.3 传播子	19
1.6.4 维克定理	20
1.6.5 费曼图	21
1.6.6 动量空间费曼图	22
1.7 散射理论	24

目录	3
1.7.1 散射截面	24
1.7.2 $S$ 矩阵	25
1.7.3 费曼图计算 $S$ 矩阵元	26
1.7.4 费米子费曼规则	27
1.7.5 汤川理论	28
1.7.6 量子电动力学	29
1.8 量子电动力学	31
1.8.1 量子电动力学	31
1.8.2 $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ 散射过程	31
1.8.3 $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ 散射的手性结构	32
1.8.4 交叉对称性	32
1.8.5 康普顿散射	33
<b>A 狄拉克代数</b>	<b>33</b>

# 1 量子场论

## 1.1 经典场论

### 1.1.1 经典力学回顾

在经典力学中，作用量由拉格朗日量给出

$$S[q_n(t)] \doteq \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_n, \dot{q}_n) \quad (1)$$

在对广义坐标做变分后，由作用量变分为 0 的条件可以得到欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = 0 \quad (2)$$

为了进入哈密顿力学的部分，做变量代换

$$p_n \doteq \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \quad (3)$$

并定义哈密顿量

$$H(q_n, p_n) \doteq \sum_n p_n \dot{q}_n - L \quad (4)$$

于是运动方程变为

$$\begin{aligned} \dot{q}_n &= \{q_n, H\}_{\text{泊松}} = \frac{\partial H}{\partial p_n} \\ \dot{p}_n &= \{p_n, H\}_{\text{泊松}} = -\frac{\partial H}{\partial q_n} \end{aligned} \quad (5)$$

另外有动量和坐标的正则共轭关系

$$\{q_i, p_j\}_{\text{泊松}} = \delta_{ij}, \quad \{p_i, p_j\}_{\text{泊松}} = \{q_i, q_j\}_{\text{泊松}} = 0 \quad (6)$$

其中泊松括号定义为

$$\{f, g\}_{\text{泊松}} \doteq \sum_n \left( \frac{\partial f}{\partial q_n} \frac{\partial g}{\partial p_n} - \frac{\partial g}{\partial q_n} \frac{\partial f}{\partial p_n} \right) \quad (7)$$

### 1.1.2 经典场论

场论中，作用量变为拉格朗日密度对全时空的积分

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_\alpha(x), \partial_\mu \phi_\alpha(x)) \quad (8)$$

由场的变分得到欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_\alpha)} = 0 \quad (9)$$

与场  $\phi_\alpha(x)$  对易的动量密度定义为

$$\pi(x) \doteq \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_\alpha(x)} \quad (10)$$

同样和经典力学类似地，哈密顿量密度为

$$\mathcal{H} \doteq \sum_\alpha \pi_\alpha \dot{\phi}_\alpha - \mathcal{L} \quad (11)$$

### 1.1.3 诺特定理

经典力学中的诺特定理表明，每一个对称性都对应于一个守恒律。如果对于场变换

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \alpha \Delta \phi(x) \quad (12)$$

拉氏量密度在至多改变一个全导数的意义下对称 (不变)，即

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \alpha \partial_\mu J^\mu \quad (13)$$

那么就认为这个系统在这个场变换下具有对称性。通过展开计算  $\Delta \mathcal{L}$ ，可以得到诺特守恒流

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta \phi - J^\mu \quad (14)$$

其满足

$$\partial_\mu j^\mu = - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \right) \Delta \phi = 0 \quad (15)$$

通过对无限小空间平移变换

$$x^\mu \rightarrow x^\mu - \alpha^\mu \quad (16)$$

应用诺特定理，写出

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow \phi(x) + \alpha^\mu \partial_\mu \phi(x) \\ \mathcal{L}(x) &\rightarrow \mathcal{L}(x) + \alpha^\mu \partial_\mu \mathcal{L}(x) = \mathcal{L} + \alpha^\nu \partial_\mu (\delta^\mu_\nu \mathcal{L}) \end{aligned} \quad (17)$$

则这里的诺特流就是

$$T^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \mathcal{L} \delta^\mu_\nu \quad (18)$$

这个张量被称为能量动量张量，它满足流守恒方程，但此时的形式对于两个指标并不对称，为此我们可以构造一个张量  $S^{\rho\mu\nu} = -S^{\mu\rho\nu}$  来将其对称化

$$\Theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\rho S^{\rho\mu\nu} \quad (19)$$

另一种更直接的获得对称的能动张量的方法是写出依赖于度规的作用量

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}(g_{\mu\nu}, \phi, \partial\phi) \quad (20)$$

然后对度规做变分，得到的能动张量形式为

$$T^{\mu\nu} = - \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} \quad (21)$$

### 1.1.4 洛伦兹群

一个相对论性场论应该满足洛伦兹协变性，即场应该遵循洛伦兹变换，这意味着场的变换是洛伦兹群的某个表示。不同的变换 (不同的表示) 因而定义了不同类型的场。要求这样的洛伦兹群的表示，实际上就是求对应李代数的表示。

我们知道，三维的旋转群是由角动量算符

$$\mathbf{J} = \mathbf{x} \times \mathbf{p} \quad (22)$$

生成的。通过简单的类比，可以推广到更一般的四维洛伦兹变换生成元

$$J^{\mu\nu} = i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) \quad (23)$$

同样与三维类似，我们给出它的对易关系

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho}) \quad (24)$$

这就是洛伦兹群对应的李代数应该满足的形式。

### 1.1.5 表示与场

**标量场** 洛伦兹群最简单的表示就是一维平凡表示，它对应的场在洛伦兹变换下不变，这就是一个标量场。我们最终希望构造的拉格朗日密度也应该是一个洛伦兹标量，因此对于其他非平凡表示对应的场，我们需要找到构造平凡表示 (洛伦兹标量) 的方法。

**旋量场** 考虑一组矩阵  $\gamma^i$  满足

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \times \mathbb{1} \quad (25)$$

它们构成狄拉克代数的一部分。由此出发构造矩阵

$$S^{\mu\nu} \doteq \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (26)$$

可以证明这是一种洛伦兹李代数的矩阵表示。如果在三维空间中取  $\gamma^i = i\sigma^i$ ，就得到三维旋转的  $2 \times 2$  矩阵表示。对于四维闵氏时空，狄拉克矩阵至少要是  $4 \times 4$  的。

按这种表示的形式变换的四分量场称为旋量场，注意到这是一个可约表示，因此一个旋量场实际上可以分解为两个二分量的外尔旋量。

**矢量场** 考虑这样一个矩阵表示

$$(\mathcal{J}^{\mu\nu})_{\alpha\beta} \doteq i(\delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta \delta^\nu_\alpha) \quad (27)$$

其中  $\mu\nu$  是群元的指标，而  $\alpha\beta$  是矩阵指标，它也是一种洛伦兹李代数的矩阵表示，并且不难发现它生成的洛伦兹群表示就是我们熟知的四矢量的洛伦兹变换矩阵。按这种形式变换的场就被称为矢量场。

## 1.2 自由标量场

在这里说明本文采用的记号：由于场论中坐标通常不作为算符出现，因此  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  等通常情况下均表示坐标值；而动量算符和动量本征值则沿用量子力学笔记中的记号，所有本征值均用带下标的字母表示，不带下标的字母则表示算符。

### 1.2.1 克莱因-戈登方程

从标量场  $\phi$  和它的一阶导出发可以构造出的洛伦兹标量包括  $\phi$ ,  $\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$  等，从中构造一个洛伦兹不变的拉格朗日密度如下

$$\mathcal{L} \doteq \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (28)$$

这就是自由标量场的拉格朗日密度，写出欧拉-拉格朗日方程

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = 0 \quad (29)$$

这被称为克莱因-戈登方程，它是自由标量场的场方程。最后，写出场的共轭动量

$$\pi(x) = \dot{\phi}(x) \quad (30)$$

### 1.2.2 正则量子化

所谓正则量子化是将正则共轭关系 (6) 推广为场的对易关系，并以此为基础进行量子化的方法。

我们将  $\phi(\mathbf{x})$  和  $\pi(\mathbf{x})$  都视为算符 (注意到这里是在薛定谔图景下讨论)，并且规定它们的对易子满足

$$[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (31)$$

$$[\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})] = [\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = 0$$

为了便于类比，我们做傅里叶变换将场变换至动量表象

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}} \phi(\mathbf{p}_1) \quad (32)$$

此时克莱因-戈登方程就变为了

$$\left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 + (\mathbf{p}_1^2 + m^2) \right] \phi(\mathbf{p}_1) = 0 \quad (33)$$

这是谐振子方程，很容易得到频率

$$\omega_{\mathbf{p}_1} = \sqrt{\mathbf{p}_1^2 + m^2} \quad (34)$$

类比量子力学中对谐振子的处理方法，还可以引入产生湮灭算符

$$\phi(\mathbf{p}_1) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}_1}}} (a_{\mathbf{p}_1} + a_{\mathbf{p}_1}^\dagger), \quad \pi(\mathbf{p}_1) = -i\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}_1}}{2}} (a_{\mathbf{p}_1} - a_{\mathbf{p}_1}^\dagger) \quad (35)$$

为了回到坐标表象下的场和场动量算符，做傅里叶逆变换，并注意到场算符的厄米性，有

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}_1}}} (a_{\mathbf{p}_1} e^{i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}_1}^\dagger e^{-i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}}) \\ \pi(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}_1}}{2}} (a_{\mathbf{p}_1} e^{i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}} - a_{\mathbf{p}_1}^\dagger e^{-i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}}) \end{aligned} \quad (36)$$

由  $\phi(\mathbf{x})$  和  $\pi(\mathbf{x})$  的对易关系，可以得出产生湮灭算符的对易关系

$$[a_{\mathbf{p}_1}, a_{\mathbf{p}_2}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \quad (37)$$

### 1.2.3 态的产生与湮灭

用产生湮灭算符写出哈密顿量的形式

$$\begin{aligned} H &= \int d^3 x \left[ \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right] \\ &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}_1} \left( a_{\mathbf{p}_1}^\dagger a_{\mathbf{p}_1} + \frac{1}{2} [a_{\mathbf{p}_1}, a_{\mathbf{p}_1}^\dagger] \right) \end{aligned} \quad (38)$$

其中第二项出现了一个无穷大  $\delta(0)$ ，这是将全空间的零点能求和的结果。由于这是一个常数，而将能量整体增减一个常数不会对物理带来可观测的改变，因此我们可以忽略这一无穷大项。

这样一来，哈密顿量和产生湮灭算符的对易关系就可以求出

$$[H, a_{\mathbf{p}_1}^\dagger] = \omega_{\mathbf{p}_1} a_{\mathbf{p}_1}^\dagger, \quad [H, a_{\mathbf{p}_1}] = -\omega_{\mathbf{p}_1} a_{\mathbf{p}_1} \quad (39)$$

类似于谐振子，可以写出能量的本征谱。首先定义出真空态  $|0\rangle$ ，其满足  $a_{\mathbf{p}_1}|0\rangle = 0$ 。在这之上通过连续作用产生算符来构造一个能量本征态  $a_{\mathbf{p}_1}^\dagger a_{\mathbf{p}_2}^\dagger \cdots |0\rangle$ ，其对应的能量本征值为  $\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \cdots$ 。

接下来构造一个总动量算符

$$\mathbf{p} \doteq \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \mathbf{p}_1 a_{\mathbf{p}_1}^\dagger a_{\mathbf{p}_1} \quad (40)$$

与哈密顿算符类似， $a_{\mathbf{p}_1}^\dagger a_{\mathbf{p}_2}^\dagger \cdots |0\rangle$  也是一个动量算符的本征态，其本征值为  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \cdots$ 。很容易联想到，把这些动量和能量视作若干粒子，也就是说，每一个作用在真空态上的产生算符都可以视作激发了一个对应动量（和能量的粒子），记为

$$|\mathbf{p}_1\rangle \doteq \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} a_{\mathbf{p}_1}^\dagger |0\rangle \quad (41)$$

其中  $E_{\mathbf{p}_1} \doteq +\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m^2}$  在这里被用来使结果满足洛伦兹不变性。两个态的内积满足

$$\langle \mathbf{p}_2 | \mathbf{p}_1 \rangle = 2E_{\mathbf{p}_1} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \quad (42)$$

其中用到了真空态的归一化条件  $\langle 0|0\rangle = 1$ 。

最后，考虑一个场算符作用在真空态上，我们得到

$$\phi(\mathbf{x})|0\rangle = \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}_1}} e^{-i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}} |\mathbf{p}_1\rangle \quad (43)$$

注意到除了  $1/2E_{\mathbf{p}_1}$  项以外，这与非相对论的坐标本征态很类似。而在非相对论的情况下这一项也确实可以被视为常数。因此，我们认为一个场算符作用于真空态上会生成一个在坐标  $\mathbf{x}$  处的粒子。

#### 1.2.4 海森堡图景

在海森堡图景下，场算符成为时间的函数。我们将时间和空间坐标统一记为时空坐标，有

$$\phi(x) \doteq e^{iHt} \phi(\mathbf{x}) e^{-iHt} \quad (44)$$

对于场动量算符  $\pi(x)$  同理。而产生湮灭算符的时间演化可以通过它们和哈密顿算符之间的对易关系得到

$$e^{iHt} a_{\mathbf{p}_1} e^{-iHt} = a_{\mathbf{p}_1} e^{-iE_{\mathbf{p}_1} t}, \quad e^{iHt} a_{\mathbf{p}_1}^\dagger e^{-iHt} = a_{\mathbf{p}_1}^\dagger e^{iE_{\mathbf{p}_1} t} \quad (45)$$

于是，在海森堡图景下，场的傅里叶变换变为

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}}} (a_{\mathbf{p}_1} e^{-i\mathbf{p}_1 \cdot x} + a_{\mathbf{p}_1}^\dagger e^{i\mathbf{p}_1 \cdot x}) \\ \pi(x) &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}_1}}{2}} (a_{\mathbf{p}_1} e^{-i\mathbf{p}_1 \cdot x} - a_{\mathbf{p}_1}^\dagger e^{i\mathbf{p}_1 \cdot x}) = \frac{\partial}{\partial t} \phi(x) \end{aligned} \quad (46)$$

其中动量四矢  $p_1^\mu = (E_{\mathbf{p}_1}, \mathbf{p}_1)$ 。由海森堡运动方程可以推导出克莱因-戈登方程。

最后，由于动量算符和哈密顿算符有类似的作用，我们可以写出

$$\phi(x) = e^{i\mathbf{p} \cdot x} \phi(0) e^{-i\mathbf{p} \cdot x} \quad (47)$$

其中四维动量算符  $p^\mu = (H, \mathbf{p})$ 。



### 1.2.5 因果律与关联函数

由狭义相对论的因果律要求，两个局域的可观测量  $\mathcal{O}_1(x)$  和  $\mathcal{O}_2(y)$  应当满足对于类空间隔

$$[\mathcal{O}_1(x), \mathcal{O}_2(y)] = 0, \quad \text{对于 } (x - y)^2 < 0 \quad (48)$$

现在考虑两个标量场算符的对易子

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{p_1}} (e^{-ip_1 \cdot (x-y)} - e^{ip_1 \cdot (x-y)}) \\ &= D(x - y) - D(y - x) \end{aligned} \quad (49)$$

其中定义

$$D(x - y) \doteq \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{p_1}} e^{-ip_1 \cdot (x-y)} \quad (50)$$

为两点之间的关联函数。这是一个洛伦兹不变量。当  $x - y$  是类空的时候，可以通过一个连续的洛伦兹变换将  $(x - y)$  变为  $-(x - y)$ ，这样一来对易子 (49) 的值就变为 0，因果性得到满足。(由于空间有三个维度而时间只有一个，连续的洛伦兹变换可以绕过光锥将类空间隔取反号而不能将类时间隔取反号。)

如果考虑一个复数场，就能较为清楚地看出， $\phi(x)$  和  $\phi^\dagger(x)$  分别产生湮灭具有正负诺特荷的粒子。于是对易子可以改写为

$$\langle 0 | [\phi^\dagger(y), \phi(x)] | 0 \rangle = \langle 0 | \phi^\dagger(y) \phi(x) | 0 \rangle - \langle 0 | \phi(x) \phi^\dagger(y) | 0 \rangle \quad (51)$$

它们分别表示带正(负)荷的粒子从  $x$  到  $y$  ( $y$  到  $x$ ) 的振幅。为了使这两项抵消，两种粒子必须具有相同的质量，换言之，量子场论中要求粒子和反粒子拥有相同的质量和相反的量子数(在此处是粒子的荷)。对应于实的克莱因-戈登场，则粒子的反粒子就是自身。

### 1.2.6 传播子

现在进一步考察对易子的性质

$$\begin{aligned} \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{p_1}} (e^{-ip_1 \cdot (x-y)} - e^{ip_1 \cdot (x-y)}) \\ &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \int \frac{dp_1^0}{2\pi i} \frac{-1}{p_1^2 - m^2} e^{-ip_1 \cdot (x-y)} \end{aligned} \quad (52)$$

其中最后一个积分在实轴上有两个关于原点对称的极点  $\pm E_{p_1}$ ，绕这两个极点有四种可以选择的积分回路，另一方面，将回路闭合所用的大圆在上下半平面则取决于  $x^0 - y^0$  的正负，正值对应于下半平面的无穷大半圆，反之亦然。

这样一来，不同的回路选择对应不同的积分结果。例如，两个小圆弧均取上半圆的积分回路会得到

$$D_R(x - y) \doteq \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \quad (53)$$

这是一个克莱因-戈登方程的格林函数，由于它在  $x^0 - y^0 < 0$  时取 0，我们称其为推迟格林函数 (retarded Green's function)。其中较为有用的一种结果是在  $-E_{p_1}$  处取下半圆而在  $+E_{p_1}$  处取上半圆得到的结果，我们将其称为费曼传播子

$$\begin{aligned} D_F(x - y) &\doteq \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle - \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (54)$$

最后的  $T$  记号称为时间排序记号，表示按照时间（即第 0 个时空分量）顺序将算符排序。

费曼传播子同样也是克莱因-戈登方程的格林函数。

### 1.3 狄拉克旋量场

#### 1.3.1 狄拉克方程

首先，给出一组狄拉克矩阵的实现

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (55)$$

此时洛伦兹变换的矩阵表示为

$$S^{0i} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}, \quad S^{ij} = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \Sigma^k \quad (56)$$

将它生成的洛伦兹变换矩阵记为  $(\Lambda_{\frac{1}{2}})^{\alpha}_{\beta}$ 。首先我们给出一个重要的表达式

$$(\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1})^{\sigma}_{\rho} (\gamma^{\mu})^{\rho}_{\lambda} (\Lambda_{\frac{1}{2}})^{\lambda}_{\kappa} = (\Lambda^{\mu}_{\nu})^{\sigma}_{\alpha} (\gamma^{\nu})^{\alpha}_{\kappa} \quad (57)$$

左右两侧分别是对  $\gamma$  的旋量和矢量指标做洛伦兹变换。

接下来我们希望能从旋量场  $\psi^{\mu}$  中构造出一个洛伦兹标量的拉格朗日量。注意到单纯采用  $\psi_{\mu}^{\dagger} \psi^{\mu}$  并不符合要求，因为  $\Lambda_{\frac{1}{2}}$  不是幺正的。这里定义

$$\bar{\psi}_{\mu} \doteq \psi_{\nu}^{\dagger} (\gamma^0)^{\nu}_{\mu} \quad (58)$$

则可以证明  $\bar{\psi}_{\mu} \psi^{\mu}$  是一个洛伦兹标量。类似地， $\bar{\psi}_{\alpha} (\gamma^{\mu})^{\alpha}_{\beta} \psi^{\beta}$  是一个洛伦兹矢量。这样一来，我们构造一个洛伦兹不变的拉格朗日量密度

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} - m) \psi \quad (59)$$

从  $\bar{\psi}$  的拉格朗日方程立刻可以得到

$$(i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} - m) \psi = 0 \quad (60)$$

这就是自由旋量场满足的狄拉克方程，上文的拉格朗日量密度就是自由旋量场对应的拉氏量密度。

注意到如果把  $(-i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} - m)$  作用在狄拉克方程的两侧，就会回归到克莱因-戈登方程

$$\begin{aligned} 0 &= (-i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} - m)(i\gamma^{\nu} \partial_{\nu} - m) \psi \\ &= (\partial^2 + m^2) \psi \end{aligned} \quad (61)$$

#### 1.3.2 外尔旋量

由于 (56) 的两个分块对于旋转表现一致而对于洛伦兹变换相差一个负号，可以把旋量的两个对应部分分别写出来

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (62)$$

这两个分量称为左手和右手外尔旋量，它们都是二分量的旋量，在无限小变换下分别为

$$\begin{aligned}\psi_L &\rightarrow \left(\mathbb{1}_2 - \frac{i}{2}\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right)\psi_L \\ \psi_R &\rightarrow \left(\mathbb{1}_2 - \frac{i}{2}\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right)\psi_R\end{aligned}\quad (63)$$

如果记

$$\sigma^\mu \doteq (\mathbb{1}_2, \boldsymbol{\sigma}), \quad \bar{\sigma}^\mu \doteq (\mathbb{1}_2, -\boldsymbol{\sigma}) \quad (64)$$

则狄拉克方程可以写为

$$\begin{pmatrix} -m & i\sigma^\mu \partial_\mu \\ i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0 \quad (65)$$

如果取  $m = 0$  则两个外尔旋量的方程会解耦合，得到的方程称为外尔方程

$$i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = 0, \quad i\sigma^\mu \partial_\mu \psi_R = 0 \quad (66)$$

### 1.3.3 手征性与螺旋性

作为狄拉克代数的一部分，我们引入手性算符 (chirality operator)

$$\gamma^5 \doteq i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (67)$$

可以证明它有性质

$$(\gamma^5)^2 = \mathbb{1}, \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad [S^{\rho\sigma}, \gamma^5] = 0 \quad (68)$$

在当前的基 (55) 下，它可以写为

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \quad (69)$$

通过手性算符可以定义正交投影算符

$$\mathbb{P}_\pm \doteq \frac{1}{2}(\mathbb{1} \pm \gamma^5) \quad (70)$$

通过正交投影算符，可以分别获得一个旋量对应的左手和右手外尔旋量

$$\mathbb{P}_+\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix}, \quad \mathbb{P}_-\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} \quad (71)$$

接下来定义螺旋性算符 (helicity operator)

$$h \doteq \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\hat{p}_1^i S^{jk} = \frac{1}{2}\hat{p}_1^i \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \quad (72)$$

这可以认为是将自旋投影到了动量方向上，其中  $\hat{p}_1$  是沿动量方向的单位算符。它可以用于计算旋量场的螺旋性。

### 1.3.4 平面波解

将旋量场变换至动量表象

$$\psi(x) = \int_{p_1^0 > 0} \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} (u(\mathbf{p}_1) e^{-ip_1 \cdot x} + v(\mathbf{p}_1) e^{ip_1 \cdot x}) \quad (73)$$

写出动量表象下的狄拉克方程

$$\begin{pmatrix} -m & p_1 \cdot \sigma \\ p_1 \cdot \bar{\sigma} & -m \end{pmatrix} u(\mathbf{p}_1) = 0, \quad \begin{pmatrix} -m & -p_1 \cdot \sigma \\ -p_1 \cdot \bar{\sigma} & -m \end{pmatrix} v(\mathbf{p}_1) = 0 \quad (74)$$

考虑到

$$(p_1 \cdot \sigma)(p_1 \cdot \bar{\sigma}) = m^2 \times \mathbb{1}_2 \quad (75)$$

我们可以把解写为

$$u(\mathbf{p}_1) = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1 \cdot \sigma \xi} \\ \sqrt{p_1 \cdot \bar{\sigma} \xi} \end{pmatrix}, \quad v(\mathbf{p}_1) = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1 \cdot \sigma \eta} \\ -\sqrt{p_1 \cdot \bar{\sigma} \eta} \end{pmatrix} \quad (76)$$

其中  $\xi$  和  $\eta$  是正交的二分量旋量，用于描述场的自旋。

现在考虑一个自旋向上的场  $\xi = (1, 0)^T$ ，并通过洛伦兹变换将动量变换到  $x^3$  方向  $p_1^\mu = (p_1^0, 0, 0, p_1^3)$ ，则

$$u(\mathbf{p}_1) = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1^0 - p_1^3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \sqrt{p_1^0 + p_1^3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \xrightarrow{m=0} \sqrt{2p_1^0} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix} \quad (77)$$

可以看出，当  $m = 0$  时，得到的场是螺旋性算符  $h$  的本征态

$$hu_+ = +\frac{1}{2}u_+ \Big|_{m=0} \quad (78)$$

自旋向下的场同理，在  $m = 0$  时会得到  $-1/2$  的本征值。这表明，质量为 0 的场拥有确定的（内禀的）螺旋性，并且和场的自旋有关，而  $m \neq 0$  时，螺旋性则会随洛伦兹坐标变换而改变。

最后，用上标表示场的自旋，我们给出一些有用的恒等式

$$\begin{aligned} \bar{u}^r(\mathbf{p}_1)u^s(\mathbf{p}_1) &= 2m\delta^{rs}, & u^{r\dagger}(\mathbf{p}_1)u^s(\mathbf{p}_1) &= 2p_1^0\delta^{rs} \\ \bar{v}^r(\mathbf{p}_1)v^s(\mathbf{p}_1) &= -2m\delta^{rs}, & v^{r\dagger}(\mathbf{p}_1)v^s(\mathbf{p}_1) &= 2p_1^0\delta^{rs} \\ \sum_s u^s(\mathbf{p}_1)\bar{u}^s(\mathbf{p}_1) &= \not{p}_1 + m \times \mathbb{1}, & \sum_s v^s(\mathbf{p}_1)\bar{v}^s(\mathbf{p}_1) &= \not{p}_1 - m \times \mathbb{1} \end{aligned} \quad (79)$$

其中记  $\not{p}_1 \doteq \gamma^\mu p_{1\mu}$ 。

### 1.3.5 狄拉克场量子化

与克莱因-戈登场类似，我们也通过在傅里叶展开谱上插入产生湮灭算符来将场量子化

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}}} \sum_s (a_{\mathbf{p}_1}^s u^s(\mathbf{p}_1) e^{-ip_1 \cdot x} + b_{\mathbf{p}_1}^{s\dagger} v^s(\mathbf{p}_1) e^{ip_1 \cdot x}) \\ \bar{\psi}(x) &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}}} \sum_s (b_{\mathbf{p}_1}^s \bar{v}^s(\mathbf{p}_1) e^{-ip_1 \cdot x} + a_{\mathbf{p}_1}^{s\dagger} \bar{u}^s(\mathbf{p}_1) e^{ip_1 \cdot x}) \end{aligned} \quad (80)$$

可以证明，如果采用和克莱因-戈登场类似的对易关系，将会得到

$$H = \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \sum_s (E_{\mathbf{p}_1} a_{\mathbf{p}_1}^{s\dagger} a_{\mathbf{p}_1}^s - E_{\mathbf{p}_1} b_{\mathbf{p}_1}^{s\dagger} b_{\mathbf{p}_1}^s) \quad (81)$$

这意味着  $b_{\mathbf{p}_1}^{s\dagger}$  产生的态会具有负的能量本征值，因而系统不再具有稳定的基态。为了解决这个问题，我们采用反对易关系

$$\begin{aligned} \{\psi_a(\mathbf{x}, t), \psi_b^\dagger(\mathbf{y}, t)\} &= \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_{ab} \\ \{\psi_a(\mathbf{x}, t), \psi_b(\mathbf{y}, t)\} &= \{\psi_a^\dagger(\mathbf{x}, t), \psi_b^\dagger(\mathbf{y}, t)\} = 0 \end{aligned} \quad (82)$$

这会给出产生湮灭算符的反对易关系

$$\{a_{\mathbf{p}_1}^r, a_{\mathbf{p}_2}^{s\dagger}\} = \{b_{\mathbf{p}_1}^r, b_{\mathbf{p}_2}^{s\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \delta^{rs} \quad (83)$$

注意到这意味着  $(a^\dagger)^2 = (b^\dagger)^2 = 0$ ，并且交换两个粒子会导致波函数变号

$$a_{\mathbf{p}_1}^\dagger a_{\mathbf{p}_2}^\dagger |0\rangle = -a_{\mathbf{p}_2}^\dagger a_{\mathbf{p}_1}^\dagger |0\rangle \quad (84)$$

因而狄拉克场的粒子遵循费米-狄拉克统计。事实上，更一般地说，综合洛伦兹不变性、正能量本征态、正范数和因果律会要求整数自旋的粒子服从玻色-爱因斯坦统计，而半整数自旋的粒子服从费米-狄拉克统计。我们称  $a_{\mathbf{p}_1}^\dagger$  生成的粒子为费米子，而  $b_{\mathbf{p}_1}^\dagger$  生成的粒子为反费米子。

### 1.3.6 狄拉克场的态

写出此时的哈密顿量

$$H = \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}_1} \sum_s [a_{\mathbf{p}_1}^{s\dagger} a_{\mathbf{p}_1}^s + b_{\mathbf{p}_1}^{s\dagger} b_{\mathbf{p}_1}^s - (2\pi)^3 \delta(0)] \quad (85)$$

发散项的符号和自由标量场相反，因此在两种场同时存在时它们可以抵消（这会在超对称理论中出现）。与标量场类似，我们写出对易关系

$$\begin{aligned} [H, a_{\mathbf{p}_1}^s] &= -E_{\mathbf{p}_1} a_{\mathbf{p}_1}^s, & [H, a_{\mathbf{p}_1}^{s\dagger}] &= E_{\mathbf{p}_1} a_{\mathbf{p}_1}^{s\dagger} \\ [H, b_{\mathbf{p}_1}^s] &= -E_{\mathbf{p}_1} b_{\mathbf{p}_1}^s, & [H, b_{\mathbf{p}_1}^{s\dagger}] &= E_{\mathbf{p}_1} b_{\mathbf{p}_1}^{s\dagger} \end{aligned} \quad (86)$$

同样与标量场类似地，可以定义总动量算符

$$\mathbf{p} \doteq \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \mathbf{p}_1 \sum_s (a_{\mathbf{p}_1}^{s\dagger} a_{\mathbf{p}_1}^s + b_{\mathbf{p}_1}^{s\dagger} b_{\mathbf{p}_1}^s) \quad (87)$$

接下来定义真空态  $|0\rangle$ ，使得  $a_{\mathbf{p}_1}^s |0\rangle = b_{\mathbf{p}_1}^s |0\rangle = 0$ ，在这之上通过作用产生算符可以构造激发态

$$|\mathbf{p}_1, s\rangle \doteq \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} a_{\mathbf{p}_1}^{s\dagger} |0\rangle \quad (88)$$

这表示一个动量为  $\mathbf{p}_1$ ，能量为  $E_{\mathbf{p}_1} = \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m^2}$  并在  $x^3$  方向上有自旋极化  $s$  的单粒子态。归一化关系给出

$$\langle \mathbf{p}_2, r | \mathbf{p}_1, s \rangle = 2E_{\mathbf{p}_1} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \delta^{rs} \quad (89)$$

### 1.3.7 守恒流

为了说明  $a_{\mathbf{p}_1}^{s\dagger}|0\rangle$  和  $b_{\mathbf{p}_1}^{s\dagger}|0\rangle$  的区别, 考虑全局  $U(1)$  变换的对应的诺特荷

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{-i\alpha} \quad (90)$$

其对应的守恒流为

$$j^\mu \doteq \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (91)$$

于是诺特荷给出

$$Q \doteq \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} \sum_s (a_{\mathbf{p}_1}^{s\dagger}a_{\mathbf{p}_1}^s - b_{\mathbf{p}_1}^{s\dagger}b_{\mathbf{p}_1}^s) \quad (92)$$

这样一来可以算出  $a_{\mathbf{p}_1}^{s\dagger}|0\rangle$  和  $b_{\mathbf{p}_1}^{s\dagger}|0\rangle$  分别具有正的和负的诺特荷。

另一个狄拉克场的守恒流来自对称性

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha\gamma^5}\psi \quad (93)$$

这被称为手性变换 (chiral transformation), 其对应的守恒流为

$$j^{\mu 5} \doteq \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi \quad (94)$$

### 1.3.8 传播子

旋量场的传播振幅为

$$\begin{aligned} \langle 0|\psi_\mu(x)\bar{\psi}_\nu(y)|0\rangle &= (i\cancel{\partial}_x + m\mathbb{1})_{\mu\nu} \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}_1}} e^{-ip_1 \cdot (x-y)} \\ \langle 0|\bar{\psi}_\nu(y)\psi_\mu(x)|0\rangle &= -(i\cancel{\partial}_x + m\mathbb{1})_{\mu\nu} \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}_1}} e^{-ip_1 \cdot (x-y)} \end{aligned} \quad (95)$$

接下来, 与标量场类似, 我们可以写出一系列旋量场的格林函数, 如推迟格林函数

$$\begin{aligned} S_R(x-y) &\doteq \theta(x^0 - y^0) \langle 0|\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\}|0\rangle \\ &= (i\cancel{\partial}_x + m\mathbb{1})D_R(x-y) \end{aligned} \quad (96)$$

同样, 也可以给出费曼传播子

$$S_F(x-y) \doteq \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \frac{i(\cancel{p}_1 + m\mathbb{1})}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip_1 \cdot (x-y)} = \langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle \quad (97)$$

注意到这里的时间排序要添加一个负号。

## 1.4 阿贝尔规范场

### 1.4.1 经典麦克斯韦场

经典无源电磁场的拉格朗日量密度为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu\partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu\partial^\nu A^\mu \quad (98)$$

其中电磁场张量

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (99)$$

写出  $A_\mu$  的欧拉-拉格朗日方程以及比安基恒等式 (Bianchi identity)

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \partial^\mu \partial_\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0 \\ \partial_\mu F_{\nu\sigma} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\nu} &= 0 \end{aligned} \quad (100)$$

这可以给出麦克斯韦方程。注意到在这个拉氏量密度中, 场的共轭动量为

$$\begin{aligned} \pi^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^0} = 0 \\ \pi^i &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^i} = -F^{0i} = E^i \end{aligned} \quad (101)$$

时间分量成为了一个非动力学场, 这会在量子化的时候带来问题。

除此之外, 这个系统还在规范变换

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha(x) \quad (102)$$

下不变, 即由这一规范变换联系的两个场在物理上等价。为了消除多余的自由度, 引入洛伦兹规范

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (103)$$

引入洛伦兹规范后, 场方程变为了 4 个无质量场的克莱因-戈登方程。注意到由于规范条件的存在, 这并不意味着矢量场就是四个克莱因-戈登场的组合。

#### 1.4.2 矢量场量子化

为了克服量子化的困难, 在拉格朗日密度中加入一个拉格朗日乘子

$$\mathcal{L}_\xi = \mathcal{L} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (104)$$

此时欧拉-拉格朗日方程变为

$$\partial^\mu \partial_\mu A^\nu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (105)$$

当  $\xi = 1$  时方程会变得很简单, 我们称这种规范为费曼规范。在费曼规范下, 拉格朗日密度可以写为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu \quad (106)$$

场的共轭动量则变为

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\mu)} = -\dot{A}^\mu \quad (107)$$

采用如下等时对易关系

$$\begin{aligned} [A_\mu(\mathbf{x}, t), \pi_\nu(\mathbf{y}, t)] &= ig_{\mu\nu}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ [A_\mu(\mathbf{x}, t), A_\nu(\mathbf{y}, t)] &= [\pi_\mu(\mathbf{x}, t), \pi_\nu(\mathbf{y}, t)] = 0 \end{aligned} \quad (108)$$

同样写出场和场动量的傅里叶谱

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}}} \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_\mu^\lambda(\mathbf{p}) (a_{\mathbf{p}_1}^\lambda e^{-ip_1 \cdot x} + a_{\mathbf{p}_1}^{\lambda\dagger} e^{ip_1 \cdot x}) \\ \pi_\mu(x) &= \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} (+i) \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}_1}}{2}} \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_\mu^\lambda(\mathbf{p}) (a_{\mathbf{p}_1}^\lambda e^{-ip_1 \cdot x} - a_{\mathbf{p}_1}^{\lambda\dagger} e^{ip_1 \cdot x}) \end{aligned} \quad (109)$$

其中  $\epsilon_\mu^\lambda$  是由极化指标  $\lambda$  编号的四个基矢量，根据其取向将四个极化方向分为类时、横向和纵向极化。令其满足正交性和完备性关系

$$\epsilon^{\lambda_1} \cdot \epsilon^{\lambda_2} = g^{\lambda_1 \lambda_2}, \quad \epsilon_\mu^{\lambda_1} \epsilon_\nu^{\lambda_2} g_{\lambda_1 \lambda_2} = g^{\mu\nu} \quad (110)$$

此时可以得到产生湮灭算符的对易关系

$$[a_{\mathbf{p}_1}^{\lambda_1}, a_{\mathbf{p}_2}^{\lambda_2}] = -(2\pi)^3 g^{\lambda_1 \lambda_2} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \quad (111)$$

一个具有特定极化  $\zeta_\mu = \sum_\lambda \alpha_\lambda \epsilon_\mu^\lambda$  的单粒子态由如下给出

$$|\mathbf{p}_1, \zeta\rangle \doteq \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \sum_\lambda \alpha_\lambda a_{\mathbf{p}_1}^{\lambda\dagger} |0\rangle \quad (112)$$

### 1.4.3 勃洛勒量子化

为了消除非物理的态 (类时和纵向极化)，需要引入洛伦兹规范 (101)。我们定义满足

$$\langle S' | \partial_\mu A^\mu | S \rangle = 0 \quad (113)$$

的态  $|S\rangle$  才是物理的态。这称为勃洛勒量子化条件 (Gupta-Bleuler quantization condition)。可以等价地将其写为

$$\partial^\mu A_\mu^+ |S\rangle = 0 \quad (114)$$

其中  $A = A^+ + A^-$ ， $A^+$  表示只含有湮灭算符的部分。考虑一个单粒子态  $|\mathbf{p}_1, \zeta\rangle$ ，有

$$\partial^\mu A_\mu^+ |\mathbf{p}_1, \zeta\rangle = ip_1 \cdot \zeta e^{-ip_1 \cdot x} |0\rangle \quad (115)$$

因而一个单粒子态是物理的态等价于它的极化方向与动量正交  $p_1 \cdot \zeta = 0$ 。这意味着对于  $p^2 = 0$  的光子而言，类时方向和纵向的极化必须大小相等，而这样的单粒子态由于具有等于零的模

$$\langle 0 | (a_{\mathbf{p}_1}^0 - a_{\mathbf{p}_1}^3)(a_{\mathbf{p}_2}^{0\dagger} - a_{\mathbf{p}_2}^{3\dagger}) | 0 \rangle = 0 \quad (116)$$

会破坏希尔伯特空间的正定性，因而是一个非物理的态，于是在所有物理允许的态中不存在类时和纵向的极化。事实上，这样的态和其他物理过程均不耦合，并且不提供能量，因而可以略去不考虑。



### 1.4.4 传播子

易得，矢量场的费曼传播子为

$$\langle 0|TA_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle = \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\mu\nu}}{p_1^2 + i\epsilon} e^{-ip_1 \cdot (x-y)} \quad (117)$$

如果重新写出拉格朗日乘子则有

$$\langle 0|TA_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle = \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \frac{i}{p_1^2 + i\epsilon} \left( -g_{\mu\nu} + (1-\xi) \frac{p_{1\mu}p_{1\nu}}{p_1^2} \right) e^{-ip_1 \cdot (x-y)} \quad (118)$$

其中取  $\xi = 1$  即为费曼规范，取  $\xi \rightarrow 0$  则为朗道规范。

## 1.5 路径积分理论

### 1.5.1 路径积分原理

在量子力学中，从一个时空坐标到另一个时空坐标的跃迁振幅可以由下式给出

$$\langle x_f, t_f | x_0, t_0 \rangle \sim \sum_{\text{所有可能路径}} \exp(iS[x(t)]) \quad (119)$$

其中对所有可能路径求和的具体方法是，考虑一个时间区间  $[t_0, t_f]$ ，将其平均分为  $N$  个格点，就得到一系列时间点  $t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = t_f$ 。我们认为对所有路径求和等价于在中间的每个时间格点遍历全空间然后求和，每条路径就对应一个序列  $\{x(t_n)\}$ 。写出

$$\sum_{\text{所有可能路径}} = n(N) \int \prod_{m=1}^{N-1} d^n x_m \quad (120)$$

这里将  $x(t_m)$  记为  $x_m$ ， $n(N)$  是归一化因子。如果记积分算符

$$\mathcal{D}[x(t)] \doteq \lim_{N \rightarrow \infty} n(N) \prod_{m=1}^{N-1} d^n x_m \quad (121)$$

则路径积分原理可以写为

$$\langle x_f, t_f | x_0, t_0 \rangle = \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{D}[x(t)] \exp(iS[x(t)]) \quad (122)$$

场是一个具有无穷大自由度的系统，因此除了时间格点化我们也需要将空间格点化处理，这相当于我们将整个时空区域划分为  $N$  个格点再作积分，这个操作被称为格点正规化。对于一个场，记积分算符

$$\mathcal{D}\phi \doteq \lim_{N \rightarrow \infty} n(N) \prod_{i=1}^N d\phi(x_i) \quad (123)$$

这样一来，场的路径积分就可以写为

$$\langle \phi_f, t_f | \phi_0, t_0 \rangle = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[ i \int_{t_0}^{t_f} d^4x \mathcal{L}(\phi) \right] \quad (124)$$

这里的积分区域可以认为是  $t = t_0$  和  $t = t_f$  等时面之间的整个时空区域。

### 1.5.2 温伯格作用量原理

首先在路径积分体系中引入算符。若一个场的算符  $\mathcal{O}(x)$  定义在传播子的积分区域内，则给出它在一个等时面上的矩阵元作为其定义

$$\langle \phi_2, t | \mathcal{O}(\mathbf{x}, t) | \phi_1, t \rangle = O_{\phi_1}(\mathbf{x}, t) \delta_{\phi_1 \phi_2} \quad (125)$$

则可以利用路径积分写出

$$\langle \phi_2, t_2 | \mathcal{O}(x) | \phi_1, t_1 \rangle \doteq \int \mathcal{D}\phi O_\phi(x) \exp \left[ i \int_{t_0}^{t_f} d^4x \mathcal{L}(\phi) \right] \quad (126)$$

现在将场做一个无穷小变换  $\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \delta\phi(x)$ ，起始和终止的等时面（更一般地说是对应类空超曲面）也做变换  $x_1 \rightarrow x_1 + \delta x_1$  和  $x_2 \rightarrow x_2 + \delta x_2$ ，拉格朗日密度也有  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$ 。经过这一系列变换，得到

$$\begin{aligned} \delta \langle \phi_2, t_2 | \phi_1, t_1 \rangle &= \delta \int \mathcal{D}\phi \exp \left[ i \int_{t_1}^{t_2} d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \right] \\ &= i \int \mathcal{D}\phi \delta S \exp(iS) \\ &= i \langle \phi_2, t_2 | \delta S | \phi_1, t_1 \rangle \end{aligned} \quad (127)$$

这有时被称为施温格作用量原理 (Schwinger's action principle)，它与路径积分原理等价，同样可以作为量子场论的基本公理。

作为一个特例，考虑只对场做变换而保持积分区域和拉格朗日密度不变，并且令  $\delta\phi$  在积分边界上为 0，则此时路径积分应保持不变，有

$$\delta \langle \phi_2, t_2 | \phi_1, t_1 \rangle = 0 = i \int d^4x \langle \phi_2, t_2 | \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) | \phi_1, t_1 \rangle \delta\phi \quad (128)$$

因为场的变分是任意的，有算符方程

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0 \quad (129)$$

这即是场的欧拉-拉格朗日方程。

## 1.6 微扰场论

### 1.6.1 微扰展开

以  $\phi^4$  场论为例，有相互作用的场可以认为是在自由场哈密顿量的基础上加入额外的相互作用项

$$H = H_0 + H_{\text{int}} = H_{\text{K-G}} + \int d^3x \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (130)$$

其中  $\lambda$  是耦合常数。当耦合常数很小时，可以认为理论由  $H_0$  主导，给出相互作用图景下的算符表达式

$$\mathcal{O}_I(\mathbf{x}, t) \doteq e^{i(t-t_0)H_0} \mathcal{O}(\mathbf{x}, t_0) e^{-i(t-t_0)H_0} \quad (131)$$

相比之下，真实的时间演化应该给出

$$\mathcal{O}(\mathbf{x}, t) = e^{i(t-t_0)H} e^{-i(t-t_0)H_0} \mathcal{O}_I(\mathbf{x}, t) e_{i(t-t_0)H_0} e^{-i(t-t_0)H} \quad (132)$$

相互作用图景下的算符可以由自由场理论给出，例如  $\phi_I(x)$  遵循自由场的克莱因-戈登方程，也可以按照自由克莱因-戈登场的傅里叶谱分解。因此我们需要研究的就是

$$U(t, t_0) \doteq e^{i(t-t_0)H_0} e^{-i(t-t_0)H} \quad (133)$$

为此写出它的时间导数

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} U(t, t_0) &= -ie^{i(t-t_0)H_0} H_{\text{int}} e^{-i(t-t_0)H_0} U(t, t_0) \\ &= -iH_I(t)U(t, t_0) \end{aligned} \quad (134)$$

其中

$$H_I(t) \doteq e^{i(t-t_0)H_0} H_{\text{int}} e^{-i(t-t_0)H_0} \quad (135)$$

这被称为相互作用哈密顿量，注意到不同时的  $H_I$  之间不对易。

现在将微分方程重新写为积分形式，并注意到  $U(t_0, t_0) = 1$ ，有

$$U(t, t_0) = 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) U(t_1, t_0) \quad (136)$$

注意到这里的  $t_1$  和  $t$  并不是与之前记号类似地表示算符和本征值，而只是表示不同时间变量。用迭代的方法可以算出级数解

$$U(t, t_0) = 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 H_I(t_2) H_I(t_1) + \cdots \quad (137)$$

最后，出于记号考虑，注意到等式

$$\int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 H_I(t_2) H_I(t_1) = \frac{1}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T H_I(t_1) H_I(t_2) \quad (138)$$

于是可以把级数写为

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T H_I(t_1) H_I(t_2) + \cdots \\ &= T \exp \left[ -i \int_{t_0}^t d\tau H_I(\tau) \right] \end{aligned} \quad (139)$$

这个级数被称为戴森级数 (Dyson's series)，实际计算时通常只取前几项展开。

### 1.6.2 相互作用真空态

显然，由于  $[H, H_0]$  不为零，自由场和相互作用场的基态不同。我们将其分别记为  $|0\rangle$  和  $|\Omega\rangle$ ，另外，记  $|n\rangle$  为  $H$  的本征态，有

$$H |n\rangle = E_n |n\rangle \quad (140)$$

则有自由场基态  $|0\rangle$  的时间演化

$$\begin{aligned} e^{-iHt} |0\rangle &= e^{-iHt} \sum |n\rangle \langle n|0\rangle \\ &= e^{-iE_\Omega t} |\Omega\rangle \langle \Omega|0\rangle + \sum_{|n\rangle \neq |\Omega\rangle} e^{-iE_n t} |n\rangle \langle n|0\rangle \end{aligned} \quad (141)$$

由于  $E_\Omega$  是最小的能量本征值，我们可以通过取  $t \rightarrow (1 - i\epsilon)\infty$  将其他本征态消除，得到

$$|\Omega\rangle = \lim_{t \rightarrow (1-i\epsilon)\infty} (e^{-iE_\Omega t} \langle \Omega|0\rangle)^{-1} e^{-iHt} |0\rangle \quad (142)$$

由于  $t$  趋于无穷，我们可以在其上增加一个有限的常数，经过化简可以配出

$$|\Omega\rangle = \lim_{t \rightarrow (1-i\epsilon)\infty} (e^{-iE_\Omega(t_0 - (-t))} \langle \Omega|0\rangle)^{-1} U(t_0, -t) |0\rangle \quad (143)$$

这被称为盖尔曼-劳定理 (Gell-Mann-Low theorem)。对于基态左矢  $\langle \Omega|$  同理。

### 1.6.3 传播子

接下来计算  $\langle \Omega|T\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle$ 。注意到  $t_1 \geq t_2 \geq t_3$  时有

$$\begin{aligned} U(t_1, t_2)U(t_2, t_3) &= U(t_1, t_3) \\ U(t_1, t_3)[U(t_2, t_3)]^\dagger &= U(t_1, t_2) \end{aligned} \quad (144)$$

首先考虑  $x^0 \geq y^0 \geq t_0$  的情况，得到

$$\langle \Omega|\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \lim_{t \rightarrow (1-i\epsilon)\infty} (|\langle \Omega|0\rangle|^2 e^{-iE_\Omega 2t})^{-1} \langle 0|U(t, x^0)\phi_I(x)U(x^0, y^0)\phi_I(y)U(y^0, -t)|0\rangle \quad (145)$$

其中系数可以通过

$$1 = \langle \Omega|\Omega\rangle = \lim_{t \rightarrow (1-i\epsilon)\infty} (|\langle \Omega|0\rangle|^2 e^{-iE_\Omega 2t})^{-1} \langle 0|U(t, t_0)U(t_0, -t)|0\rangle \quad (146)$$

消去。于是有

$$\langle \Omega|\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \lim_{t \rightarrow (1-i\epsilon)\infty} \frac{\langle 0|U(t, x^0)\phi_I(x)U(x^0, y^0)\phi_I(y)U(y^0, -t)|0\rangle}{\langle 0|U(t, -t)|0\rangle} \quad (147)$$

最后，加入时间排序记号，得到

$$\langle \Omega|T\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \lim_{t \rightarrow (1-i\epsilon)\infty} \frac{\langle 0|T\phi_I(x)\phi_I(y) \exp\left[-i \int_{-t}^t d\tau H_I(\tau)\right] |0\rangle}{\langle 0|T \exp\left[-i \int_{-t}^t d\tau H_I(\tau)\right] |0\rangle} \quad (148)$$

这个表达式可以被推广到多点关联函数的形式。

### 1.6.4 维克定理

为了找到一般方法计算  $\langle 0|T\phi_I(x)\phi_I(y)|0\rangle$ ，我们首先将场算符分解为

$$\phi_I(x) = \phi_I^+(x) + \phi_I^-(x) \quad (149)$$

其中

$$\phi_I^+(x) = \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}}} a_{\mathbf{p}_1} e^{-ip_1 \cdot x}, \quad \phi_I^-(x) = \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}}} a_{\mathbf{p}_1}^\dagger e^{ip_1 \cdot x} \quad (150)$$

后文中在没有歧义的情况下，我们将省略场的相互作用图景下标。

接下来, 引入正规序 (normal order) 记号  $N$ , 表示将所有  $a_{\mathbf{p}_1}^\dagger$  排在  $a_{\mathbf{p}_1}$  左侧, 记为  $N\phi_1\phi_2$ , 有时也记为  $:\phi_1\phi_2:$ 。注意到有

$$\langle 0|N(\text{任意算符})|0\rangle = 0 \quad (151)$$

定义两个场算符的缩并 (contraction) 为

$$\overline{\phi(x)\phi(y)} \doteq \begin{cases} [\phi^+(x), \phi^-(y)], & x^0 > y^0 \\ [\phi^+(y), \phi^-(x)], & x^0 < y^0 \end{cases} \quad (152)$$

$$= D_F(x-y)$$

最后, 将场的时间排序展开, 可以得到

$$T\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) = N\{\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) + \text{所有可能缩并}\} \quad (153)$$

这就是维克定理 (Wick's theorem)。注意到, 对于只部分缩并的项, 其正规序为

$$N\overline{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} = D_F(x_1-x_3) \cdot N\phi_2\phi_4 \quad (154)$$

由 (149) 知, 这样的项对结果没有贡献。

将这些结果组合起来, 可以得到我们要求的表达式  $\langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)|0\rangle$  等于所有完全缩并的项对应的费曼传播子之和。

### 1.6.5 费曼图

考虑具有四个场的情况, 可以写出

$$\begin{aligned} \langle 0|T\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4|0\rangle &= D_F(x_1-x_2)D_F(x_3-x_4) \\ &\quad + D_F(x_1-x_3)D_F(x_2-x_4) \\ &\quad + D_F(x_1-x_4)D_F(x_2-x_3) \end{aligned} \quad (155)$$

现在我们用费曼图表示这三项, 写出

$$\langle 0|T\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4|0\rangle = \begin{array}{c} \text{1} \text{---} \text{2} \\ \text{3} \text{---} \text{4} \end{array} + \begin{array}{c} \text{1} \\ | \\ \text{3} \end{array} \begin{array}{c} \text{2} \\ | \\ \text{4} \end{array} + \begin{array}{c} \text{1} \quad \text{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{3} \quad \text{4} \end{array} \quad (156)$$

这里的每一张图表示一种传播方式对结果的贡献, 总振幅就等于这三张图贡献的叠加。

回到两点关联函数, 首先将分子展开为

$$\langle 0|T \left[ \phi(x)\phi(y) + \phi(x)\phi(y)(-i) \int d\tau H_I(\tau) + \cdots \right] |0\rangle \quad (157)$$

第一项就是自由场的结果, 在  $\phi^4$  场论中, 回忆起哈密顿量 (128), 带入并作展开, 我们可以写出第二项

$$\begin{aligned} &\langle 0|T \left[ \phi(x)\phi(y) \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4z \phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(z) \right] |0\rangle \\ &= 3 \cdot \frac{-i\lambda}{4!} D_F(x-y) \int d^4z D_F(z-x) D_F(z-y) \\ &\quad + 12 \cdot \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4z D_F(x-z) D_F(y-z) D_F(z-z) \end{aligned} \quad (158)$$

忽略系数  $-i\lambda \int d^4z$ , 可以认为它是这两张图之和

$$\frac{1}{8} \left( \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ x \quad y \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{8} \\ z \end{array} \right) + \frac{1}{2} \left( \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ x \quad y \\ \text{loop} \\ z \end{array} \right) \quad (159)$$

前面的系数被称为对称因子, 它来自费曼图具有的对称性。例如, 第一个图的  $1/8$  可以写成  $1/(2 \times 2 \times 2)$ , 分别表示两个圈各自翻转对称和它们之间交换的对称。

在这些图中, 如  $x, y$  这样的点被称为外点 (external points), 而  $z$  这样的点被称为顶点 (vertices), 点和点的连线则被称为传播子 (propagators)。显然, 在  $\phi^4$  场论中每个顶点都连接着四条传播子。另外, 可以证明我们要计算的就是所有具有两个外点的费曼图之和。

真正的计算过程实际上是画出费曼图然后再计算相应振幅, 为此我们需要知道如何写出一个图对应的振幅表达式。这由费曼规则给出:

1. 对于每条传播子

$$x \text{---} y = D_F(x-y) \quad (160)$$

2. 对于每个顶点

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \times \\ \diagdown \end{array} z = -i\lambda \int d^4z \quad (161)$$

3. 对于每个外点

$$x \bullet = 1 \quad (162)$$

4. 最后除上对称因子。

对此的一种解读是认为每个顶点的  $-i\lambda$  对应在该时空坐标生成/吸收一个粒子对应的振幅, 而  $\int d^4z$  就是将全时空的振幅积分。

### 1.6.6 动量空间费曼图

更常见的计算费曼图的方式是在动量空间中, 此时写出传播子

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip_1 \cdot (x-y)} \quad (163)$$

这启示我们为每一条传播子赋予一个动量, 当遇到顶点时, 有

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} p_1 \nearrow \\ \times \\ p_2 \nwarrow \\ p_3 \swarrow \\ p_4 \searrow \end{array} \end{array} \int d^4z e^{-p_1 \cdot z} e^{-p_2 \cdot z} e^{-p_3 \cdot z} e^{p_4 \cdot z} \quad (164)$$

$$= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3 - p_4)$$

只需要对动量积分就可以将这个  $\delta$  函数转化为顶点处动量守恒的条件。我们可以写出动量空间的费曼规则:

1. 对于每条传播子

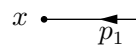
$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ p_1 \end{array} = \frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (165)$$

2. 对于每个顶点



$$= -i\lambda \quad (166)$$

3. 对于每个外点



$$= e^{-ip_1 \cdot x} \quad (167)$$

4. 在每个顶点上加入动量守恒条件

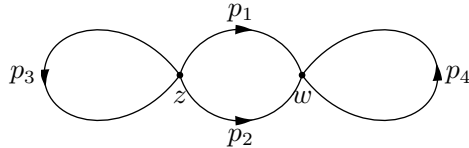
5. 对于剩下的动量作积分

$$\int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \quad (168)$$

6. 最后除上对称因子。

### 真空图

真空图是指没有外点的费曼图，例如



$$(169)$$

在  $z$  处得到动量守恒式为  $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2)$ ，则  $w$  处的动量守恒自动满足，将会得到  $\delta(0)$ ，这是一个发散的结果。在坐标空间中计算也同理， $d^4 w$  会在全时空对某个常数积分。这意味着这张图表示的过程可以在时空中任意一点等概率（等振幅）发生。

一般来说，展开的每一项中包含一个含有外点  $x, y$  的图和若干不含外点的真空图。将每一张真空图的贡献记为  $V_i$ ，并设我们关心的这一项带有  $n_i$  个对应的真空图，则可以将这一项的贡献写为

$$(\text{包含外点的图}) \cdot \prod_i \frac{1}{n_i!} V_i^{n_i} \quad (170)$$

$1/n_i!$  为同种图之间交换产生的对称因子。则关联函数表达式 (146) 的分子可以写为

$$\begin{aligned} & \sum_{\text{所有可能的}} \sum_{\text{所有可能的}} (\text{包含外点的图}) \times \prod_i \frac{1}{n_i!} V_i^{n_i} \\ & \quad \text{包含外点的图} \quad \text{真空图序列} \{n_i\} \\ &= \sum (\text{包含外点的图}) \times \sum_{\{n_i\}} \left( \prod_i \frac{1}{n_i!} V_i^{n_i} \right) \\ &= \sum (\text{包含外点的图}) \times \prod_i \left( \sum_{n_i} \frac{1}{n_i!} V_i^{n_i} \right) \\ &= \sum (\text{包含外点的图}) \times \prod_i \exp(V_i) \\ &= \sum (\text{包含外点的图}) \times \exp \left( \sum_i V_i \right) \end{aligned} \quad (171)$$

另一方面，关联函数的分母则只包含真空图而不含外点，因此，在计算关联函数时，真空图的贡献  $\exp(\sum V_i)$  就被抵消了，只需要计算包含外点的图的贡献即可。

## 配分函数

所有真空图之和，即关联函数的分母

$$\langle 0|U(t, -t)|0\rangle = \langle 0|T \exp\left[-i \int d\tau H_I(\tau)\right]|0\rangle \quad (172)$$

是这里的配分函数，记为  $Z$ 。可以写出

$$Z = \lim_{t \rightarrow (1-i\epsilon)\infty} |\langle \Omega|0\rangle|^2 e^{-iE_\Omega 2t} \quad (173)$$

取对数后并忽略极限下的有限大项  $|\langle \Omega|0\rangle|^2$ ，得到

$$E_\Omega = \lim_{t \rightarrow (1-i\epsilon)\infty} \frac{i}{2t} \ln Z \quad (174)$$

容易联想到，如果计算真空能量密度，即在两侧同时除以全空间体积，则真空图带来的  $\delta(0)$  就可以被抵消。这解决了红外 (IR) 发散的问题，紫外 (UV) 发散的问题将由重整化处理。(这里的红外和紫外分别指当  $p \rightarrow 0$  和  $p \rightarrow \infty$  时产生的发散)

## 1.7 散射理论

### 量子力学中的散射

\* 这一节以后也许会被移到量力笔记中。

考虑一个带有势的哈密顿算符

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad (175)$$

设势能形式为只在  $-x_0$  到  $x_0$  的区间内有正的值，而在其他区域为 0。此时在  $x_1 < -x_0$  和  $x_1 > x_0$  的区间上的本征波函数为

$$\psi(x_1) = \begin{cases} Ae^{ik_1 x_1} + Be^{-ik_1 x_1}, & x_1 < -x_0 \\ Ce^{ik_1 x_1} + De^{-ik_1 x_1}, & x_1 > x_0 \end{cases} \quad (176)$$

其中  $A, D$  项对应向势垒运动的波， $B, C$  对应反射回/穿过的波。则散射矩阵定义为

$$\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix} \quad (177)$$

//一些定量的讨论开摆了吧

### 1.7.1 散射截面

散射实验是研究微观粒子性质的重要实验，其中一个重要参数就是散射截面。考虑单个靶粒子的情形，对应的散射截面定义为

$$\sigma \doteq \frac{\text{散射发生次数}}{\text{入射粒子数}} \times \frac{\text{入射面积}}{\text{靶粒子数}} = \frac{1}{T\Phi} N \quad (178)$$



在同一个散射实验中可能存在很多不同的散射过程和它们各自对应的散射截面。很多时候我们同时也关心散射后粒子的动量，此时定义微分散射截面

$$\frac{d^{3n}\sigma}{d^3p_1 d^3p_2 \cdots d^3p_n} \quad (179)$$

将微分散射截面对动量空间的微元积分可以得到具有相应动量的散射的散射截面。注意到这些动量并不独立，而是受到四个分量守恒方程的限制。举例来说，两个粒子散射的微分散射截面经过约束条件约化后就得到常见的微分散射截面  $d\sigma/d\Omega$ 。

如果进一步考虑单个入射粒子的情况，即两个粒子之间的散射，则微分散射截面可以由对应散射发生的微分概率得到

$$d\sigma = \frac{1}{T\Phi} dP = \frac{V}{T|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|} dP \quad (180)$$

其中  $\mathbf{v}_i \doteq \mathbf{p}_i/p_i^0$ 。

衰变是另一种散射的特例，可以认为是单粒子（共振态）到多粒子的散射过程。与散射截面类似的概念是衰变率

$$\Gamma \doteq \frac{\text{衰变发生次数}}{\text{粒子数} \times \text{时间}} \quad (181)$$

它是半衰期的倒数。类似地有衰变到某一特定态的微分衰变率

$$d\Gamma = \frac{1}{T} dP \quad (182)$$

### 1.7.2 S 矩阵

一个散射过程前后可以分别由初态和末态描述，在薛定谔图景下它们分别对应时间  $t = -\infty$  和  $t = \infty$  的态，在海森堡图景下则是由散射算符  $S$  联系的两种态。从某个能量的本征初态  $|i, t = -\infty\rangle$  演化至某个能量本征末态  $|f, t = \infty\rangle$  的概率振幅在薛定谔图景和海森堡图景下可以分别写为

$$\langle f, \infty | i, -\infty \rangle_{\text{薛定谔}} = \langle f | S | i \rangle_{\text{海森堡}} \quad (183)$$

将这定义为  $S$  矩阵的矩阵元

$$S_{fi} \doteq \langle f | S | i \rangle \quad (184)$$

显然，对于无相互作用的散射，也即根本没有散射的情况，散射算符  $S = 1$ 。于是我们将一般的  $S_{fi}$  写为

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \delta_{fi} + i\mathcal{T}_{fi} \\ &= \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \mathcal{M}_{fi} \end{aligned} \quad (185)$$

其中  $\mathcal{T}$  被称为转移算符。考虑从  $|i\rangle$  散射到  $|f\rangle$  的概率 ( $|i\rangle \neq |f\rangle$ )，写出

$$|\langle f | S | i \rangle|^2 = |\langle f | \mathcal{T} | i \rangle|^2 = (2\pi)^8 \delta^{(4)}(0) \delta^{(4)}(p_f - p_i) |\mathcal{M}_{fi}|^2 \quad (186)$$

其中  $\delta(0)$  的出现是由于  $\delta$  函数的平方项。将其视为时空体积  $VT$ ，(末态) 动量空间的概率元

$$dP = \frac{|\langle f | S | i \rangle|^2}{\langle i | i \rangle} \prod_{j \in f} \frac{d^3p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j} = \frac{VT}{\prod_{k \in i} (2E_k V)} |\mathcal{M}_{fi}|^2 d\Pi \quad (187)$$

其中分母上的  $\langle i | i \rangle$  来自归一化  $\int Dp_f |\langle f | S | i \rangle|^2 = \langle i | i \rangle$ ； $d\Pi$  是动量空间的洛伦兹不变体元

$$d\Pi \doteq (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \prod_{j \in f} \frac{d^3p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j} \quad (188)$$

## 特殊情况

对于两个粒子之间的散射，带入 (178)，得到

$$d\sigma = \frac{1}{4E_1E_2|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|} |\mathcal{M}_{fi}|^2 d\Pi \quad (189)$$

其中考虑 0 动量系下的  $2 \rightarrow 2$  散射，可以得到

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| &= |\mathbf{p}_i| \frac{E_{\text{cm}}}{E_1E_2} \\ \int d\Pi &= \frac{|\mathbf{p}_f|}{(2\pi)^4(4E_{\text{cm}})} \int d\Omega \end{aligned} \quad (190)$$

于是微分散射截面

$$d\sigma_{\text{cm}} = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{64\pi^2 E_{\text{cm}}^2} \frac{|\mathbf{p}_f|}{|\mathbf{p}_i|} d\Omega \quad (191)$$

对于衰变，带入 (180)，得到

$$d\Gamma = \frac{1}{2E_1} |\mathcal{M}_{fi}|^2 d\Pi \quad (192)$$

### 1.7.3 费曼图计算 $S$ 矩阵元

和之前计算两点关联函数时类似，现在需要计算的是

$$\langle \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4 | S | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4 | e^{-2iHt} | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle \quad (193)$$

可以证明，存在一个类似相互作用真空和自由场真空之间的关系

$$|\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle \propto \lim_{t \rightarrow (1-i\epsilon)\infty} e^{-iHt} |\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle_0 \quad (194)$$

于是我们可以写出

$$\langle \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4 | iT | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle = \lim_{t \rightarrow (1-i\epsilon)\infty} {}_0 \langle \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4 | T \exp \left[ -i \int_{-t}^t d\tau H_I(\tau) \right] | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle_0 \quad (195)$$

后文中不引起歧义的情况下我们省略下标。

以  $\phi^4$  理论为例，展开的零阶项是

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle &= \prod_i \sqrt{2E_i} \langle 0 | a_3 a_4 a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle \\ &= 4E_1 E_2 (2\pi)^6 [\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_4) + \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_4) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3)] \end{aligned} \quad (196)$$

这就是  $S$  矩阵中恒等的部分，可以用如下费曼图表示

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} 3 \\ | \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 4 \\ | \\ 2 \end{array} & + & \begin{array}{cc} 3 & 4 \\ & \diagdown \quad \diagup \\ 1 & 2 \end{array} \end{array} \quad (197)$$

在计算一阶项时，注意到由于这并不是真空期望值，因此未完全缩并的项不会直接得到 0。余下的场需要和初态/末态缩并，在图中用外腿 (external lines) 表示

$$\begin{aligned} \overline{\phi(x) | \mathbf{p}_1} &\doteq e^{-ip_1 \cdot x} | 0 \rangle : \quad \begin{array}{c} \text{---} \leftarrow x \\ \text{---} p_1 \end{array} \\ \langle \mathbf{p}_1 | \phi(x) &\doteq \langle 0 | e^{ip_1 \cdot x} : \quad \begin{array}{c} \text{---} p_1 \leftarrow \\ \text{---} x \end{array} \end{aligned} \quad (198)$$

在这过程中，还会出现不完全联通的图，例如

$$\begin{array}{c} 3 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ 2 \end{array} \quad \text{或} \quad \left( \text{---} \times \begin{array}{c} 3 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ 2 \end{array} \right) \quad (199)$$

由于在顶点上增加了动量守恒条件，这些图都表示没有发生散射的过程，即入射动量和出射动量相等。因此它们和 (195) 一样描述  $S$  矩阵中的恒等部分，我们不研究这些图。

排除了以上这些过程后，一阶项只剩下一张图，给出

$$\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \quad (4!) \left( -i \frac{\lambda}{4!} \right) \int d^4 x e^{-i(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \cdot x} \quad (200)$$

$$= -i\lambda(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$$

其中  $4!$  来自四个外点 (动量) 与  $\phi^4$  之间不同的缩并方式。类比形式  $i\mathcal{M}_{fi}(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i)$ ，可以发现这张图给出  $\mathcal{M}_{fi} = -\lambda$ 。于是一阶的结果给出 0 动量系下

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{cm}} = \frac{\lambda^2}{64\pi^2 E_{\text{cm}}^2} \quad (201)$$

对所有方向积分，同时考虑到出射的两个粒子全同，乘上  $1/2$  的系数，得到

$$\sigma_{\text{cm}} = \frac{\lambda^2}{32\pi E_{\text{cm}}^2} \quad (202)$$

最后，对于外腿上带圈的图，直接计算会导致发散项  $1/0$ ，我们认为这些过程不属于散射的过程，因而将它们截去 (amputate)

$$\begin{array}{c} \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} \quad (203)$$

#### 1.7.4 费米子费曼规则

记得对于旋量场，为了满足反对易关系，把时间排序定义为

$$T\psi(x)\bar{\psi}(y) \doteq \begin{cases} \psi(x)\bar{\psi}(y), & x^0 > y^0 \\ -\bar{\psi}(y)\psi(x), & x^0 < y^0 \end{cases} \quad (204)$$

这样一来，就得到我们之前写出的旋量场的费曼传播子 (95)

$$S_F(x-y) = \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p}_1 + m\mathbb{1})}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip_1 \cdot (x-y)} = \langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle \quad (205)$$

正规序也是同理

$$N a_{\mathbf{p}_1} a_{\mathbf{p}_2}^\dagger = -a_{\mathbf{p}_2}^\dagger a_{\mathbf{p}_1} \quad (206)$$

场的缩并定义为

$$\overline{\psi(x)\bar{\psi}(y)} \doteq \begin{cases} \{\psi^+(x), \bar{\psi}^-(y)\}, & x^0 > y^0 \\ -\{\bar{\psi}^-(y), \psi^+(x)\}, & x^0 < y^0 \end{cases} \quad (207)$$

$$= S_F(x-y)$$

于是将场从正规序算符中提出的过程也同样给出

$$N \overline{\psi_1 \psi_2 \psi_3 \bar{\psi}_4} = -S_F(x_1 - x_3) \cdot N \psi_2 \bar{\psi}_4 \quad (208)$$

这样一来我们会得到和玻色子相同的维克定理。

### 1.7.5 汤川理论

汤川理论 (Yukawa theory) 描述了旋量场和标量场的耦合，它的哈密顿量为

$$H \doteq H_{\text{狄拉克}} + H_{\text{克莱因-戈登}} + \int d^3x g \bar{\psi} \psi \phi \quad (209)$$

其中  $g$  为耦合常数。汤川理论是一个简化版的量子电动力学理论。为了计算相应费曼图，我们现在还需要知道旋量场是如何与旋量粒子的初末态缩并的，例如一个  $\psi$  和一个费米子初态的缩并给出

$$\overline{\psi(x) | \mathbf{p}_1, s \rangle} \doteq e^{-ip_1 \cdot x} u^s(p_1) |0\rangle \quad (210)$$

其他的缩并与此类似， $\psi$  可以与费米子初态/反费米子末态缩并； $\bar{\psi}$  反之。后文默认分别用  $q_i, p_i, k_i$  表示标量粒子、费米子和反费米子的初末态动量。

给出汤川理论的费曼规则：

1. 对于每条传播子：

$$\overline{\phi(x)\phi(y)} : \text{---} \xrightarrow{q_1} \text{---} = \frac{i}{p_1^2 - m_\phi^2 + i\epsilon} \quad (211)$$

$$\overline{\psi(x)\bar{\psi}(y)} : \xrightarrow{p_1} \text{---} = \frac{i(\not{p}_1 + m\mathbb{1})}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon}$$

2. 对于每个顶点：

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \text{---} = -ig \quad (212)$$

3. 对于每个外腿:

$$\begin{aligned}
 \overline{\phi}|\mathbf{q}_1\rangle : & \quad \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \text{---} \overleftarrow{q_1} \text{---} = 1 & \quad \langle \mathbf{q}_1|\phi : & \quad \text{---} \overleftarrow{q_1} \text{---} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} = 1 \\
 \overline{\psi}|\mathbf{p}_1, s\rangle : & \quad \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \text{---} \overleftarrow{p_1} \text{---} = u^s(p_1) & \quad \langle \mathbf{p}_1, s|\overline{\psi} : & \quad \text{---} \overleftarrow{p_1} \text{---} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} = \overline{u}^s(p_1) \\
 \overline{\psi}|\mathbf{k}_1, s\rangle : & \quad \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \text{---} \overleftarrow{k_1} \text{---} = \overline{v}^s(k_1) & \quad \langle \mathbf{k}_1, s|\psi : & \quad \text{---} \overleftarrow{k_1} \text{---} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} = v^s(k_1)
 \end{aligned} \tag{213}$$

4. 在每个顶点上加入动量守恒条件, 对剩下的未定的动量积分, 最后确定图的符号。

注意到展开系数中的  $1/n!$  总是会与交换顶点产生的对称性  $n!$  抵消, 而汤川理论中展开式的每一项里的三个场  $(\overline{\psi}\psi\phi)$  之间无法交换缩并, 因而不会产生其他对称因子, 所以汤川理论的费曼图不需要计算对称因子。

另外, 费曼图中的实线箭头代表的是费米子的粒子数方向, 也即费米子的动量方向或反费米子的动量反方向。注意到费米子和反费米子的区分只有在外腿上才是有意义的, 一条传播子既可以看作带有沿箭头方向动量的费米子, 也可以看作反方向的反费米子。对于玻色子而言, 箭头没有什么实际意义, 而传播子动量的方向也可以自由选取。

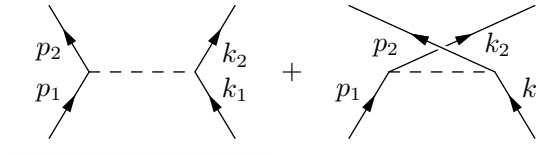
最后是图的符号确定, 由于缩并不能跨过别的场进行, 所以形如下式 (212) 左侧的缩并需要通过将  $\overline{\psi}_y$  左移两格来使得缩并之间互不纠缠。由于对易关系, 这会产生一个符号因子  $(-1)^2 = 1$ 。

$$\langle \mathbf{k}_2, \mathbf{p}_2 | \overline{\psi}_x \psi_x \overline{\psi}_y \psi_y | \mathbf{p}_1, \mathbf{k}_1 \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{k}_2, \mathbf{p}_2 | \overline{\psi}_y \overline{\psi}_x \psi_x \psi_y | \mathbf{p}_1, \mathbf{k}_1 \rangle \tag{214}$$

一个一般的缩并也用类似的方法判断符号。

## 汤川势

考虑两个可分辨费米子的非相对论散射, 可分辨意味着两张最低阶的图中, 我们只需考虑左图 (在这里  $p_i$  和  $k_i$  均表示费米子)



$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} p_2 \\ \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} p_1 \end{array} \text{---} \text{---} \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} k_2 \\ \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} k_1 \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} p_2 \\ \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} p_1 \end{array} \text{---} \text{---} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} k_2 \\ \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} k_1 \end{array} \tag{215}$$

为了计算非相对论近似, 我们只考虑三动量的最低阶项, 有近似

$$\begin{aligned}
 (p_2 - p_1)^2 &= -|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|^2 + O(p_i^4) \\
 u^s(p_i) &= \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{216}$$

其中  $\xi^s$  是一个二分量常旋量, 满足  $\xi^{s_1 \dagger} \xi^{s_2} = \delta^{s_1 s_2}$ 。这样计算得到 (213) 左图对应的散射振幅为

$$i\mathcal{M} = \frac{ig^2}{|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|^2 + m_\phi^2} 2m\delta^{s_1 s_2} 2m\delta^{r_1 r_2} \tag{217}$$

由经典量子力学中的玻恩近似可以计算出该散射对应的势函数在动量空间的值

$$\langle p_2 | iT | p_1 \rangle = -i\tilde{V}(\mathbf{q}_1) 2\pi\delta(E_{p_2} - E_{p_1}), \quad \mathbf{q}_1 = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 \quad (218)$$

于是对于汤川势, 有

$$\tilde{V}(\mathbf{q}_1) = \frac{-g^2}{|\mathbf{q}_1|^2 + m_\phi^2} \quad (219)$$

做傅里叶逆变换可得

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{g^2}{4\pi r} e^{-m_\phi r} \quad (220)$$

这是一个吸引的短程势 (由于轴子具有质量), 事实上如果计算反费米子和费米子的散射或反费米子之间的散射, 可以发现汤川势总是吸引的。

### 1.7.6 量子电动力学

量子电动力学 (QED) 和汤川理论的区别在于将标量场  $\phi$  替换为矢量场  $A_\mu$ , 得到哈密顿量的相互作用部分为

$$H_{\text{int}} \doteq \int d^3x e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (221)$$

除了汤川理论中费米子的费曼规则外, 只需类似地加上

1. 对于光子传播子

$$\mu \begin{array}{c} \sim \\ \leftarrow p_1 \end{array} \nu = \frac{-ig_{\mu\nu}}{p_1^2 + i\epsilon} \quad (222)$$

2. 对于顶点

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ \bullet \\ \searrow \end{array} \begin{array}{c} \sim \\ \mu \end{array} = -ie\gamma^\mu \quad (223)$$

3. 对于光子的外腿

$$\overline{A_\mu | p_1} : \begin{array}{c} \sim \\ \leftarrow p_1 \end{array} \mu = \epsilon_\mu(p_1) \quad \langle p_1 | A_\mu : \begin{array}{c} \sim \\ \leftarrow p_1 \end{array} \mu = \epsilon_\mu^*(p_1) \quad (224)$$

其中  $\epsilon$  和  $\epsilon^*$  分别表示初态和末态的极化矢量, 由之前得到的结论我们知道初态和末态的极化必须要被限制在横向方向上。

另外, 在这里顶点只考虑了电子的情况, 对于其他带电荷  $Q|e|$  的狄拉克粒子, 只需把对于项也做替换即可。

### 库伦势

与汤川势同理, 我们计算最低阶的可分辨费米子非相对论散射, 有

$$\begin{array}{c} \nearrow p_2 \\ \nearrow p_1 \end{array} \begin{array}{c} \sim \\ \mu \end{array} \begin{array}{c} \searrow k_2 \\ \searrow k_1 \end{array} \quad i\mathcal{M} = (-ie)^2 \bar{u}(p_2)\gamma^\mu u(p_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_2 - p_1)^2} \bar{u}(k_2)\gamma^\nu u(k_1) \quad (225)$$

在非相对论近似下，有

$$\bar{u}(p_2)\gamma^0 u(p_1) = u^\dagger(p_2)u(p_1) \approx 2m\xi^{s_1\dagger}\xi^{s_2} \quad (226)$$

其他  $\bar{u}(p_2)\gamma^i u(p_1)$  项在  $p_2 = p_1 = 0$  时取 0，因此在非相对论近似下可以被忽略。于是写出

$$i\mathcal{M} = \frac{-ie^2}{|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|^2} 2m\xi^{s_1\dagger}\xi^{s_2} 2m\xi^{r_1\dagger}\xi^{r_2} \quad (227)$$

与汤川势的结果对比会发现这里多了一个来自  $-g_{00}$  的负号，最终的势函数为

$$V(r) = \frac{e^2}{4\pi r} = \frac{\alpha}{r} \quad (228)$$

其中  $\alpha$  为精细结构常数。

这里得到的势函数是排斥的，而如果将其中一个费米子替换为反费米子，则最终会得到一个吸引的势，这个结果和电磁学给出的结果是一致的。这里的负号是来自矢量玻色子（光子）带来的  $-g_{00}$  项，如果考虑一个张量玻色子，例如引力子，那么传播子会具有形式

$$\mu\nu \text{ ~~~~~ } \rho\sigma = \frac{1}{2} (g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) \frac{i}{p_1^2 + i\epsilon} \quad (229)$$

这样的传播子会给出  $(-g_{00})^2 = +1$ ，因而带来全部吸引的势，这同样符合我们对引力理论的理解。

## 1.8 量子电动力学

### 1.8.1 量子电动力学

在上一节已经作为一个例子给出了 QED 的哈密顿量和费曼规则，在这里对量子电动力学做简单介绍。

首先，给出 QED 的拉格朗日密度

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} \doteq \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (230)$$

其具有如下规范对称性

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x), \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \quad (231)$$

我们可以通过定义规范协变导数  $D_\mu$  来将 QED 的拉格朗日密度写成更简洁的形式

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad D_\mu \doteq \partial_\mu + ieA_\mu(x) \quad (232)$$

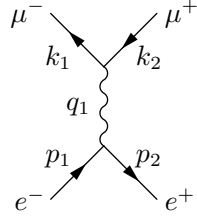
此时狄拉克场和麦克斯韦场的欧拉-拉格朗日方程分别给出

$$\begin{aligned} (i\not{D} - m)\psi &= 0 \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} &= e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi \doteq ej^\nu \end{aligned} \quad (233)$$

其中  $j^\nu$  是狄拉克场的守恒流 ( $\cdot$ )。

### 1.8.2 $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ 散射过程

考虑一个简单的过程： $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$  的一阶图



$$\bar{v}^{s_2}(p_2) (-ie\gamma^\mu) u^{s_1}(p_1) \left( \frac{-ig_{\mu\nu}}{q_1^2} \right) \bar{u}^{r_1}(k_1) (-ie\gamma^\nu) v^{r_2}(k_2) \quad (234)$$

可以算出散射振幅

$$i\mathcal{M} = \frac{ie^2}{q_1^2} \cdot \bar{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1) \cdot \bar{u}(k_1)\gamma^\nu v(k_2) \quad (235)$$

考虑到共轭关系  $(\bar{v}\gamma^\mu u)^* = \bar{u}\gamma^\mu v$ , 散射振幅的模方有

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q_1^4} \cdot \bar{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1)\bar{u}(p_1)\gamma^\nu v(p_2) \cdot \bar{u}(k_1)\gamma_\mu v(k_2)\bar{v}(k_2)\gamma_\nu u(k_1) \quad (236)$$

理论上此时带入  $s_1, s_2, r_1, r_2$  这四个自旋就可以算出确定自旋情况下的散射振幅。但在通常的散射实验中我们不考虑粒子的自旋, 于是要对所有自旋情况求和。更准确地说, 是对入射的正负电子自旋状态求平均并对出射的正负  $\mu$  子自旋状态求和, 即

$$\left( \frac{1}{2} \sum_{s_1} \frac{1}{2} \sum_{s_2} \right) \left( \sum_{r_1} \sum_{r_2} \right) |\mathcal{M}|^2 \quad (237)$$

这可以通过完备性关系 (79) 计算出, 结果为

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{所有自旋}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4q_1^4} \text{Tr}[(\not{p}_2 - m_e \mathbb{1})\gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e \mathbb{1})\gamma^\nu] \text{Tr}[(\not{k}_2 + m_\mu \mathbb{1})\gamma_\mu (\not{k}_1 - m_\mu \mathbb{1})\gamma_\nu] \quad (238)$$

利用狄拉克代数的迹的性质可以算出这个结果, 其中由于电子质量相对于  $\mu$  子来说太小我们将其忽略不计。将其置于 0 动量系, 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{所有自旋}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{8e^4}{q_1^4} [(p_1 \cdot k_1)(p_2 \cdot k_2) + (p_1 \cdot k_2)(p_2 \cdot k_1) + m_\mu^2(p_1 \cdot p_2)] \\ &\stackrel{\text{CM}}{=} e^4 \left[ \left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos^2 \theta \right] \end{aligned} \quad (239)$$

其中  $E = p^0 = E_{\text{CM}}/2$  为每个粒子的能量。于是有微分散射截面和总散射截面

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{\alpha^2}{4E_{\text{CM}}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E_{\text{CM}}^2}} \left[ \left(1 + \frac{m_\mu^2}{E_{\text{CM}}^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E_{\text{CM}}^2}\right) \cos^2 \theta \right] \\ \sigma &= \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{\text{CM}}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E_{\text{CM}}^2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_\mu^2}{E_{\text{CM}}^2}\right) \end{aligned} \quad (240)$$

### 1.8.3 $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ 散射的手性结构

在这节里只考虑高能情况, 此时所有费米子的质量均近似为 0。为了便于计算, 我们通过在各项中插入正交投影算符  $\mathbb{P}_\pm$  来研究对应的自旋态, 这样就可以继续利用狄拉克矩阵求迹的方法计算散射。举



例来说，将散射振幅中的一项进行如下替换

$$\bar{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1) \longrightarrow \bar{v}(p_2)\gamma^\mu \mathbb{P}_+ u(p_1) \quad (241)$$

会使得  $u(p_1)$  中左手旋量部分变为 0，因而筛选出了右手方向的电子。注意到  $\mathbb{P}_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)$  与  $\gamma^\mu$  反对易，有

$$\bar{v}(p_2)\gamma^\mu \mathbb{P}_+ u(p_1) = v^\dagger(p_2)\gamma^0 \gamma^\mu \mathbb{P}_+ u(p_1) = v^\dagger(p_2)\mathbb{P}_+ \gamma^0 \gamma^\mu u(p_1) \quad (242)$$

因此插入这一投影算符同时也筛选出了  $v(p_2)$  的右手旋量部分，而这对应着一个左手方向的正电子。注意到

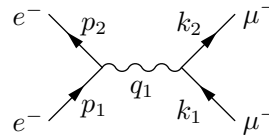
$$\begin{aligned} \sum_{\text{所有自旋}} |\bar{v}(p_2)\gamma^\mu \mathbb{P}_+ u(p_1)|^2 &= \text{Tr}(\not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \mathbb{P}_+) \\ &= 2(p_2^\mu p_1^\nu + p_2^\nu p_1^\mu - g^{\mu\nu} p_1 \cdot p_2 - i\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} p_{2\alpha} p_{1\beta}) \end{aligned} \quad (243)$$

于是可以写出四种可能发生的散射对应散射截面

$$\begin{aligned} e^-_R e^-_L \rightarrow \mu^-_R \mu^-_L &: \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_{\text{CM}}^2} (1 + \cos\theta)^2 \\ e^-_R e^-_L \rightarrow \mu^-_L \mu^-_R &: \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_{\text{CM}}^2} (1 - \cos\theta)^2 \\ e^-_L e^-_R \rightarrow \mu^-_R \mu^-_L &: \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_{\text{CM}}^2} (1 - \cos\theta)^2 \\ e^-_L e^-_R \rightarrow \mu^-_L \mu^-_R &: \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_{\text{CM}}^2} (1 + \cos\theta)^2 \end{aligned} \quad (244)$$

#### 1.8.4 交叉对称性

考虑这样一种散射过程  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ ，它的一阶图给出



$$\frac{ie^2}{q_1^2} \bar{u}(p_2)\gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(k_2)\gamma_\mu u(k_1) \quad (245)$$

这张图几乎相当于将 (230) 旋转了一下，计算可以发现它的散射振幅和  $e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$  散射给出的结果形式相同，只相差一个变量代换

$$(p_1, p_2, k_1, k_2)_{e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+} \longrightarrow (p_1, -p_2, k_2, -k_1)_{e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-} \quad (246)$$

注意到高能近似下 0 动量系的散射截面

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2E_{\text{CM}}^2 (1 - \cos\theta)^2} [4 + (1 + \cos\theta)^2] \quad (247)$$

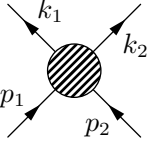
在  $\theta \rightarrow 0$  时出现发散，这是因为作为传播子的虚光子有了在壳 (on shell) 的动量。

这种相似性带来的更一般的结论被称为交叉对称性 (crossing symmetry)。对于一般的散射过程而言，将一个初态中具有动量  $p_1$  的粒子替换为一个末态中具有动量  $k_1 = -p_1$  的反粒子并不会改变  $S$  矩阵元，即

$$\mathcal{M}(\phi(p_1) + \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) = \mathcal{M}(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} + \bar{\phi}(k_1)) \quad (248)$$

需要注意的是交换一个费米子的时候，可能会造成符号的改变。

对于  $2 \rightarrow 2$  散射，我们构建三个称为曼德尔斯塔姆变量 (Mandelstam variables) 的物理量，利用它们可以很好地在交叉对称性之下描述散射振幅

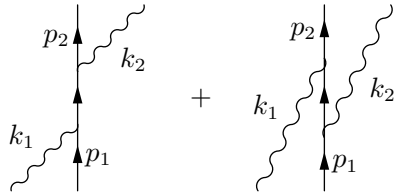


$$\begin{aligned}
 s &\doteq (p_1 + p_2)^2 = (k_1 + k_2)^2 \\
 t &\doteq (k_1 - p_1)^2 = (k_2 - p_2)^2 \\
 u &\doteq (k_2 - p_1)^2 = (k_1 - p_2)^2
 \end{aligned} \tag{249}$$

一个可能会有用的恒等式是  $s + t + u = \sum m_i$

### 1.8.5 康普顿散射

康普顿散射 (Compton scattering) 是如下散射过程  $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$ ，它的一阶图给出



$$\tag{250}$$

根据费曼规则写出总的散射振幅并化简得到

$$i\mathcal{M} = -ie^2 \epsilon_\mu^*(k_2) \epsilon_\nu(k_1) \bar{u}(p_2) \left[ \frac{\gamma^\mu \not{k}_1 \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p_1^\nu}{2p_1 \cdot k_1} + \frac{-\gamma^\nu \not{k}_2 \gamma^\mu + 2\gamma^\nu p_1^\mu}{-2p_1 \cdot k_2} \right] u(p_1) \tag{251}$$

## A 狄拉克代数

狄拉克代数包含的元素有

标量型	$\mathbb{1}$	
矢量型	$\gamma^\mu : \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \times \mathbb{1}$	
赝标量型	$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$	(252)
赝矢量型	$\gamma^\mu \gamma^5$	
张量型	$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$	

狄拉克矩阵有如下性质

$$(\gamma^\mu)^2 = g^{\mu\mu} \times \mathbb{1}, \quad (\gamma^5)^2 = \mathbb{1}, \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad [\sigma^{\mu\nu}, \gamma^5] = 0 \tag{253}$$

狄拉克矩阵的迹满足如下性质

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}(\mathbf{1}) &= 4 \\
 \text{Tr}(\text{奇数个}\gamma\text{乘积}) &= 0 \\
 \text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) &= 4g^{\mu\nu} \\
 \text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) &= 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \\
 \text{Tr}(\gamma^5) &= 0 \\
 \text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5) &= 0 \\
 \text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5) &= -4ie^{\mu\nu\rho\sigma} \\
 \text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\cdots) &= \text{Tr}(\cdots\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu)
 \end{aligned} \tag{254}$$

狄拉克矩阵的缩并满足如下性质

$$\begin{aligned}
 \gamma^\mu\gamma_\mu &= 4 \times \mathbf{1} \\
 \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu &= -2\gamma^\nu \\
 \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu &= 4g^{\rho\sigma} \times \mathbf{1} \\
 \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu &= -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu
 \end{aligned} \tag{255}$$