量子场论笔记

臧亦驰

目录

1 量子场论

1.1 经典场论

1.1.1 经典力学回顾

在经典力学中，作用量由拉格朗日量给出

$$S[q_n] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t L(q_n, \dot{q}_n) \tag{1}$$

在对广义坐标做变分后，由作用量变分为 0 的条件可以得到欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = 0 \tag{2}$$

为了进入哈密顿力学的部分，做变量代换

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \tag{3}$$

并定义哈密顿量

$$H(q_n, p_n) = \sum_n p_n \dot{q}_n - L \tag{4}$$

于是运动方程变为

$$\begin{aligned} \dot{q}_n &= \{q_n, H\}_{\text{泊松}} = \frac{\partial H}{\partial p_n} \\ \dot{p}_n &= \{p_n, H\}_{\text{泊松}} = -\frac{\partial H}{\partial q_n} \end{aligned} \tag{5}$$

其中泊松括号定义为

$$\{f, g\}_{\text{泊松}} = \sum_n \left(\frac{\partial f}{\partial q_n}\frac{\partial g}{\partial p_n} - \frac{\partial g}{\partial q_n}\frac{\partial f}{\partial p_n} \right) \tag{6}$$

1.1.2 经典场论

场论中，作用量变为拉格朗日密度对全时空的积分

$$S = \int \mathrm{d}^4 x \mathcal{L}(\phi_\alpha(x), \partial_\mu \phi_\alpha(x)) \tag{7}$$

由场的变分得到欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} = 0 \tag{8}$$

与场 $\phi_\alpha(x)$ 对易的动量密度定义为

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_\alpha(x)} \tag{9}$$

同样和经典力学类似地，哈密顿量密度为

$$\mathcal{H} = \sum_\alpha \pi_\alpha \dot{\phi}_\alpha - \mathcal{L} \tag{10}$$

举例来说，自由标量场的拉氏量密度为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \tag{11}$$

从中写出欧拉-拉格朗日方程为

$$(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\phi = 0 \tag{12}$$

被称为克莱因-戈登方程。场的共轭动量

$$\pi(x) = \dot{\phi}(x) \tag{13}$$

而哈密顿量密度则为

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{14}$$

1.1.3 诺特定理

经典力学中的诺特定理表明，每一个对称性都对应于一个守恒律。如果对于场变换

$$\phi(x) \to \phi(x) + \alpha\Delta\phi(x) \tag{15}$$

拉氏量密度在至多改变一个全导数的意义下对称 (不变)，即

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \alpha\partial_\mu J^\mu \tag{16}$$

那么就认为这个系统在这个场变换下具有对称性。通过展开计算 $\Delta\mathcal{L}$，可以得到诺特守恒流

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta\phi - J^\mu \tag{17}$$

其满足

$$\partial_\mu j^\mu = -\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\nu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\right)\Delta\phi = 0 \tag{18}$$

1.1.4 能量动量张量

通过对无限小空间平移变换

$$x^\mu \to x^\mu - \alpha^\mu \tag{19}$$

应用诺特定理，写出

$$\begin{aligned} &\phi(x) \to \phi(x) + \alpha^\mu\partial_\mu\phi(x) \\ &\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(x) + \alpha^\mu\partial_\mu\mathcal{L}(x) = \mathcal{L} + \alpha^\nu\partial_\mu(\delta^\mu{}_\nu\mathcal{L}) \end{aligned} \tag{20}$$

则这里的诺特流就是

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi - \mathcal{L}\delta^\mu{}_\nu \tag{21}$$

这个张量被称为能量动量张量，它满足流守恒方程，但此时的形式对于两个指标并不对称，为此我们可以构造一个张量 $S^{\rho\mu\nu} = -S^{\mu\rho\nu}$ 来将其对称化

$$\Theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\rho S^{\rho\mu\nu} \tag{22}$$

另一种更直接的获得对称的能动张量的方法是写出依赖于度规的作用量

$$S = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}(g_{\mu\nu}, \phi, \partial\phi) \tag{23}$$

然后对度规做变分，得到的能动张量形式为

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} \tag{24}$$

1.2 自由标量场

在这里说明本文采用的记号：由于场论中坐标通常不作为算符出现，因此 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 等通常情况下均表示坐标值；而动量算符和动量本征值则沿用量子力学笔记中的记号，所有本征值均用带下标的字母表示，不带下标的字母则表示算符。

1.2.1 正则量子化

前文已经提到经典场论中的自由标量场形式 (11)，现在我们将 $\phi(\boldsymbol{x})$ 和 $\pi(\boldsymbol{x})$ 都视为算符 (注意到这里是在薛定谔图景下讨论)，并且规定它们的对易子满足

$$\begin{aligned}
&[\phi(\boldsymbol{x}),\pi(\boldsymbol{y})]=i\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\
&[\phi(\boldsymbol{x}),\phi(\boldsymbol{y})]=[\pi(\boldsymbol{x}),\pi(\boldsymbol{y})]=0
\end{aligned}\tag{25}$$

为了便于类比，我们做傅里叶变换将场变换至动量表象

$$\phi(\boldsymbol{x})=\int\frac{\mathrm{d}^3p_1}{(2\pi)^3}e^{-i\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{x}}\phi(\boldsymbol{p}_1)\tag{26}$$

此时克莱因-戈登方程就变为了

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2+(\boldsymbol{p}_1^2+m^2)\right]\phi(\boldsymbol{p}_1)=0\tag{27}$$

这是谐振子方程，很容易得到频率

$$\omega_{\boldsymbol{p}_1}=\sqrt{\boldsymbol{p}_1^2+m^2}\tag{28}$$

类比量子力学中对谐振子的处理方法，还可以引入产生湮灭算符

$$\phi(\boldsymbol{p}_1)=\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}_1}}}(a_{\boldsymbol{p}_1}+a^\dagger_{\boldsymbol{p}_1}),\quad \pi(\boldsymbol{p}_1)=-i\sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{p}_1}}{2}}(a_{\boldsymbol{p}_1}-a^\dagger_{\boldsymbol{p}_1})\tag{29}$$

为了回到坐标表象下的场和场动量算符，做傅里叶逆变换，并注意到场算符的厄米性，有

$$\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{x})&=\int\frac{\mathrm{d}^3p_1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}_1}}}\left(a_{\boldsymbol{p}_1}e^{i\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{x}}+a^\dagger_{\boldsymbol{p}_1}e^{-i\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{x}}\right)\\
\pi(\boldsymbol{x})&=\int\frac{\mathrm{d}^3p_1}{(2\pi)^3}(-i)\sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{p}_1}}{2}}\left(a_{\boldsymbol{p}_1}e^{i\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{x}}-a^\dagger_{\boldsymbol{p}_1}e^{-i\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{x}}\right)
\end{aligned}\tag{30}$$

由 $\phi(\boldsymbol{x})$ 和 $\pi(\boldsymbol{x})$ 的对易关系，可以得出产生湮灭算符的对易关系

$$[a_{\boldsymbol{p}_1},a^\dagger_{\boldsymbol{p}_2}]=(2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)\tag{31}$$

1.2.2 态的产生与湮灭

用产生湮灭算符写出哈密顿量的形式

$$\begin{aligned}
H&=\int\mathrm{d}^3x\left[\frac{1}{2}\pi^2+\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2+\frac{1}{2}m^2\phi^2\right]\\
&=\int\frac{\mathrm{d}^3p_1}{(2\pi)^3}\omega_{\boldsymbol{p}_1}\left(a^\dagger_{\boldsymbol{p}_1}a_{\boldsymbol{p}_1}+\frac{1}{2}[a_{\boldsymbol{p}_1},a^\dagger_{\boldsymbol{p}_1}]\right)
\end{aligned}\tag{32}$$

其中第二项出现了一个无穷大 $\delta(0)$，这是将全空间的零点能求和的结果。由于这是一个常数，而将能量整体增减一个常数不会对物理带来可观测的改变，因此我们可以忽略这一无穷大项。

这样一来，哈密顿量和产生湮灭算符的对易关系就可以求出

$$[H, a^\dagger_{\boldsymbol{p}_1}] = \omega_{\boldsymbol{p}_1} a^\dagger_{\boldsymbol{p}_1}, \quad [H, a_{\boldsymbol{p}_1}] = -\omega_{\boldsymbol{p}} a_{\boldsymbol{p}_1} \tag{33}$$

类似于谐振子，可以写出能量的本征谱。首先定义出真空态 $|0\rangle$，其满足 $a_{\boldsymbol{p}_1}|0\rangle = 0$。在这之上通过连续作用产生算符来构造一个能量本征态 $a^\dagger_{\boldsymbol{p}_1} a^\dagger_{\boldsymbol{p}_2} \cdots |0\rangle$，其对应的能量本征值为 $\omega_{\boldsymbol{p}_1} + \omega_{\boldsymbol{p}_2} + \cdots$。

接下来构造一个总动量算符

$$\boldsymbol{p} \doteq \int \frac{\mathrm{d}^3 p_1}{(2\pi)^3} \boldsymbol{p}_1 a^\dagger_{\boldsymbol{p}_1} a_{\boldsymbol{p}_1} \tag{34}$$

与哈密顿算符类似，$a^\dagger_{\boldsymbol{p}_1} a^\dagger_{\boldsymbol{p}_2} \cdots |0\rangle$ 也是一个动量算符的本征态，其本征值为 $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \cdots$。很容易联想到，把这些动量和能量视作若干粒子，也就是说，每一个作用在真空态上的产生算符都可以视作激发出了一个对应动量 (和能量的粒子)，记为

$$|\boldsymbol{p}_1\rangle \doteq \sqrt{2E_{\boldsymbol{p}_1}} a^\dagger_{\boldsymbol{p}_1} |0\rangle \tag{35}$$

其中 $E_{\boldsymbol{p}_1} \doteq +\sqrt{|\boldsymbol{p}_1|^2 + m^2}$ 在这里被用来使结果满足洛伦兹不变性。两个态的内积满足

$$\langle \boldsymbol{p}_2 | \boldsymbol{p}_1 \rangle = 2E_{\boldsymbol{p}_1} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2) \tag{36}$$

其中用到了真空态的归一化条件 $\langle 0|0\rangle = 1$。

最后，考虑一个场算符作用在真空态上，我们得到

$$\phi(\boldsymbol{x})|0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}_1}} e^{-i\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{x}} |\boldsymbol{p}_1\rangle \tag{37}$$

注意到除了 $1/2E_{\boldsymbol{p}_1}$ 项以外，这与非相对论的坐标本征态很类似。而在非相对论的情况下这一项也确实可以被视为常数。因此，我们认为一个场算符作用于真空态上会生成一个在坐标 $\boldsymbol{x}$ 处的粒子。

1.2.3 海森堡图景

在海森堡图景下，场算符成为时间的函数。我们将时间和空间坐标统一记为时空坐标，有

$$\phi(x) \doteq e^{iHt} \phi(\boldsymbol{x}) e^{-iHt} \tag{38}$$

对于场动量算符 $\pi(x)$ 同理。而产生湮灭算符的时间演化可以通过它们和哈密顿算符之间的对易关系得到

$$e^{iHt} a_{\boldsymbol{p}_1} e^{-iHt} = a_{\boldsymbol{p}_1} e^{-iE_{\boldsymbol{p}_1} t}, \quad e^{iHt} a^\dagger_{\boldsymbol{p}_1} e^{-iHt} = a^\dagger_{\boldsymbol{p}_1} e^{iE_{\boldsymbol{p}_1} t} \tag{39}$$

于是，在海森堡图景下，场的傅里叶变换变为

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}_1}}} \left(a_{\boldsymbol{p}_1} e^{-ip_1 \cdot x} + a^\dagger_{\boldsymbol{p}_1} e^{ip_1 \cdot x} \right) \\ \pi(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^3 p_1}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{E_{\boldsymbol{p}_1}}{2}} \left(a_{\boldsymbol{p}_1} e^{-ip_1 \cdot x} - a^\dagger_{\boldsymbol{p}_1} e^{ip_1 \cdot x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \phi(x) \end{aligned} \tag{40}$$

其中动量四矢 $p_1^\mu = (E_{\boldsymbol{p}_1}, \boldsymbol{p}_1)$。由海森堡运动方程可以推导出克莱因-戈登方程。

最后，由于动量算符和哈密顿算符有类似的作用，我们可以写出

$$\phi(x) = e^{ip \cdot x} \phi(0) e^{-ip \cdot x} \tag{41}$$

其中四维动量算符 $p^\mu = (H, \boldsymbol{p})$。

1.2.4 因果律与关联函数

由狭义相对论的因果律要求，两个局域的可观测量 $\mathcal{O}_1(x)$ 和 $\mathcal{O}_2(y)$ 应当满足对于类空间隔

$$[\mathcal{O}_1(x), \mathcal{O}_2(y)] = 0, \quad \text{对于}(x-y)^2 < 0 \tag{42}$$

现在考虑两个标量场算符的对易子

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] =& \int \frac{\mathrm{d}^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}_1}} \left(e^{-ip_1\cdot(x-y)} - e^{ip_1\cdot(x-y)}\right) \\ =& D(x-y) - D(y-x) \end{aligned} \tag{43}$$

其中定义

$$D(x-y) \doteq \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}_1}} e^{-ip_1\cdot(x-y)} \tag{44}$$

为两点之间的关联函数。这是一个洛伦兹不变量。当 $x-y$ 是类空的时候，可以通过一个连续的洛伦兹变换将 $(x-y)$ 变为 $-(x-y)$，这样一来对易子 (43) 的值就变为 0，因果性得到满足。(由于空间有三个维度而时间只有一个，连续的洛伦兹变换可以绕过光锥将类空间隔取反号而不能将类时间隔取反号。)

如果考虑一个复数场，就能较为清楚地看出，$\phi(x)$ 和 $\phi^\dagger(x)$ 分别产生湮灭具有正负诺特荷的粒子。于是对易子可以改写为

$$\langle 0|[\phi^\dagger(y), \phi(x)]|0\rangle = \langle 0|\phi^\dagger(y)\phi(x)|0\rangle - \langle 0|\phi(x)\phi^\dagger(y)|0\rangle \tag{45}$$

它们分别表示带正 (负) 荷的粒子从 x 到 y(y 到 x) 的振幅。为了使这两项抵消，两种粒子必须具有相同的质量，换言之，量子场论中要求粒子和反粒子拥有相同的质量和相反的量子数 (在此处是粒子的荷)。对应于实的克莱因-戈登场，则粒子的反粒子就是自身。

1.2.5 传播子

现在进一步考察对易子的性质

$$\begin{aligned} \langle 0|[\phi(x), \phi(y)]|0\rangle =& \int \frac{\mathrm{d}^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{p_1}}} \left(e^{-ip_1\cdot(x-y)} - e^{ip_1\cdot(x-y)}\right) \\ =& \int \frac{\mathrm{d}^3 p_1}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathrm{d}p_1^0}{2\pi i} \frac{-1}{p_1^2 - m^2} e^{-ip_1\cdot(x-y)} \end{aligned} \tag{46}$$

其中最后一个积分在实轴上有两个关于原点对称的极点 $\pm E_{\boldsymbol{p_1}}$，绕这两个极点有四种可以选择的积分回路，另一方面，将回路闭合所用的大圆在上下半平面则取决于 $x^0 - y^0$ 的正负，正值对应于下半平面的无穷大半圆，反之亦然。

这样一来，不同的回路选择对应不同的积分结果。例如，两个小圆弧均取上半圆的积分回路会得到

$$D_R(x-y) \doteq \theta(x^0 - y^0) \langle 0|[\phi(x), \phi(y)]|0\rangle \tag{47}$$

这是一个克莱因-戈登方程的格林函数，由于它在 $x^0 - y^0 < 0$ 时取 0，我们称其为推迟格林函数 (retarded Green's function)。其中较为有用的一种结果是在 $-E_{\boldsymbol{p_1}}$ 处取下半圆而在 $+E_{\boldsymbol{p_1}}$ 处取上半圆得到的结果，我们将其称为费曼传播子

$$\begin{aligned} D_F(x-y) \doteq& \theta(x^0 - y^0) \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle - \theta(y^0 - x^0) \langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle \\ =& \langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle \end{aligned} \tag{48}$$

最后的 T 记号称为时间排序记号，表示按照时间 (即第 0 个时空分量) 顺序将算符排序。

费曼传播子同样也是克莱因-戈登方程的格林函数。

1.3 狄拉克场

1.3.1 洛伦兹变换

我们知道，三维的旋转群是由角动量算符

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p} \tag{49}$$

生成的。通过简单的类比，可以推广到更一般的四维洛伦兹变换生成元

$$J^{\mu\nu} = i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) \tag{50}$$

同样与三维类似，我们给出它的对易关系

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho}) \tag{51}$$

这就是洛伦兹群对应的李代数应该满足的形式。

举例来说，考察这样一个矩阵表示

$$(\mathcal{J}^{\mu\nu})_{\alpha\beta} \doteq i(\delta^\mu{}_\alpha \delta^\nu{}_\beta - \delta^\mu{}_\beta \delta^\nu{}_\alpha) \tag{52}$$

其中 $\mu\nu$ 是群元的指标，而 $\alpha\beta$ 是矩阵指标，从这个矩阵表示出发可以构造如下作用于矢量的无限小变换

$$V^\alpha \to \left(\delta^\alpha{}_\beta - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta \right) V^\beta \tag{53}$$

其中 $\omega_{\mu\nu}$ 是反对称的无限小参数，选取不同的 ω 可以分别生成无限小转动和洛伦兹变换。

1.3.2 旋量场

接下来研究旋量的洛伦兹变换的矩阵表示。首先考虑满足如下性质的一组矩阵 γ^μ

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \times \mathbb{1} \tag{54}$$

这实际上是狄拉克代数的一部分。由此出发可以构造一种洛伦兹变换的矩阵表示

$$S^{\mu\nu} \doteq \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \tag{55}$$

对于三维欧氏空间，可以取 $\gamma^i = i\sigma^i$，此时 S^{ij} 就会回归到我们熟悉的三维旋转的二维矩阵表示 (作为指标的 i 和作为虚数单位的 i 在不会引起歧义的情况下不再用不同字母表示)。在我们当前研究的四维闵氏时空中，狄拉克矩阵则至少要为 4×4 的。容易验证

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{56}$$

就是一种符合要求的矩阵实现。此时洛伦兹变换的矩阵表示为

$$S^{0i} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}, \quad S^{ij} = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \Sigma^k \tag{57}$$

以这种方式进行洛伦兹变换的四分量场被称为狄拉克旋量场。

1.3.3 狄拉克方程

现在我们已经可以导出有限洛伦兹变换的形式

$$(\Lambda_{\frac{1}{2}})^{\alpha}{}_{\beta} = \exp(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu})^{\alpha}{}_{\beta} \tag{58}$$

在这里我们写出了矩阵的指标以方便考察，但后文中有时我们忽略这个记号。首先我们给出一个重要的表达式

$$(\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1})^{\sigma}{}_{\rho}(\gamma^{\mu})^{\rho}{}_{\lambda}(\Lambda_{\frac{1}{2}})^{\lambda}{}_{\kappa} = (\Lambda^{\mu}{}_{\nu})^{\sigma}{}_{\alpha}(\gamma^{\nu})^{\alpha}{}_{\kappa} \tag{59}$$

左右两侧分别是对 γ 的旋量和矢量指标做洛伦兹变换。

接下来我们希望从旋量场 ψ^{μ} 中构造出一个洛伦兹标量的拉格朗日量。注意到单纯采用 $\psi_{\mu}^{\dagger}\psi^{\mu}$ 并不符合要求，因为 $\Lambda_{\frac{1}{2}}$ 不是幺正的。这里定义

$$\overline{\psi}_{\mu} \doteq \psi_{\nu}^{\dagger}(\gamma^{0})^{\nu}{}_{\mu} \tag{60}$$

则可以证明 $\overline{\psi}_{\mu}\psi^{\mu}$ 是一个洛伦兹标量。类似地，$\overline{\psi}_{\alpha}(\gamma^{\mu})^{\alpha}{}_{\beta}\psi^{\beta}$ 是一个洛伦兹矢量。这样一来，我们构造一个洛伦兹不变的拉格朗日量密度

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi \tag{61}$$

从 $\overline{\psi}$ 的拉格朗日方程立刻可以得到

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi = 0 \tag{62}$$

这就是自由旋量场满足的狄拉克方程，上文的拉格朗日量密度就是自由旋量场对应的拉氏量密度。

注意到如果把 $(-i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)$ 作用在狄拉克方程的两侧，就会回归到克莱因-戈登方程

$$\begin{aligned} 0 =& (-i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)(i\gamma^{\nu}\partial_{\nu} - m)\psi \\ =& (\partial^2 + m^2)\psi \end{aligned} \tag{63}$$

1.3.4 外尔旋量

由于 (57) 的两个分块对于旋转表现一致而对于洛伦兹变换相差一个负号，可以把旋量的两个对应部分分别写出来

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \tag{64}$$

这两个分量称为左手和右手外尔旋量，它们都是二分量的旋量，在无限小变换下分别为

$$\begin{aligned} \psi_L &\to (\mathbb{1}_2 - \frac{i}{2}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\sigma})\psi_L \\ \psi_R &\to (\mathbb{1}_2 - \frac{i}{2}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\sigma})\psi_R \end{aligned} \tag{65}$$

如果记

$$\sigma^{\mu} \doteq (\mathbb{1}_2, \boldsymbol{\sigma}), \quad \bar{\sigma}^{\mu} \doteq (\mathbb{1}_2, -\boldsymbol{\sigma}) \tag{66}$$

则狄拉克方程可以写为

$$\begin{pmatrix} -m & i\sigma^{\mu}\partial_{\mu} \\ i\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0 \tag{67}$$

如果取 $m = 0$ 则两个外尔旋量的方程会解耦合，得到的方程称为外尔方程

$$i\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi_L = 0, \quad i\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_R = 0 \tag{68}$$

1.3.5 手征性与螺旋性

作为狄拉克代数的一部分，我们引入手性算符 (chirality operator)

$$\gamma^5 \doteq i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{69}$$

可以证明它有性质

$$(\gamma^5)^2 = \mathbb{1}, \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad [S^{\rho\sigma}, \gamma^5] = 0 \tag{70}$$

在当前的基 (56) 下，它可以写为

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \tag{71}$$

通过手性算符可以定义正交投影算符

$$\mathbb{P}_\pm \doteq \frac{1}{2}(\mathbb{1} \pm \gamma^5) \tag{72}$$

通过正交投影算符，可以分别获得一个旋量对应的左手和右手外尔旋量

$$\mathbb{P}_+\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{P}_-\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} \tag{73}$$

接下来定义螺旋性算符 (helicity operator)

$$h \doteq \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\hat{p}_1^i S^{jk} = \frac{1}{2}\hat{p}_1^i \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \tag{74}$$

这可以认为是将自旋投影到了动量方向上，其中 $\hat{p}_1$ 是沿动量方向的单位算符。它可以用于计算旋量场的螺旋性。

1.3.6 平面波解

将旋量场变换至动量表象

$$\psi(x) = \int_{p_1^0>0} \frac{\mathrm{d}^3 p_1}{(2\pi)^3} \left(u(\boldsymbol{p}_1) e^{-ip_1\cdot x} + v(\boldsymbol{p}_1) e^{ip_1\cdot x} \right) \tag{75}$$

写出动量表象下的狄拉克方程

$$\begin{pmatrix} -m & p_1\cdot\sigma \\ p_1\cdot\overline{\sigma} & -m \end{pmatrix} u(\boldsymbol{p}_1) = 0, \quad \begin{pmatrix} -m & -p_1\cdot\sigma \\ -p_1\cdot\overline{\sigma} & -m \end{pmatrix} v(\boldsymbol{p}_1) = 0 \tag{76}$$

考虑到

$$(p_1\cdot\sigma)(p_1\cdot\overline{\sigma}) = m^2 \times \mathbb{1}_2 \tag{77}$$

我们可以把解写为

$$u(\boldsymbol{p}_1) = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1\cdot\sigma}\xi \\ \sqrt{p_1\cdot\overline{\sigma}}\xi \end{pmatrix}, \quad v(\boldsymbol{p}_1) = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1\cdot\sigma}\eta \\ -\sqrt{p_1\cdot\overline{\sigma}}\eta \end{pmatrix} \tag{78}$$

其中 ξ 和 η 是正交的二分量旋量，用于描述场的自旋。

现在考虑一个自旋向上的场 $\xi = (1,0)^T$，并通过洛伦兹变换将动量变换到 x^3 方向 $p_1^\mu = (p_1^0, 0, 0, p_1^3)$，则

$$u(\boldsymbol{p}_1) = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1^0 - p_1^3}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ \sqrt{p_1^0 + p_1^3}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \end{pmatrix} \xrightarrow{m=0} \sqrt{2p_1^0}\begin{pmatrix}0\\ \xi\end{pmatrix} \tag{79}$$

可以看出，当 $m=0$ 时，得到的场是螺旋性算符 h 的本征态

$$hu_+ = +\frac{1}{2}u_+\bigg|_{m=0} \tag{80}$$

自旋向下的场同理，在 $m=0$ 时会得到 $-1/2$ 的本征值。这表明，质量为 0 的场拥有确定的 (内禀的) 螺旋性，并且和场的自旋有关，而 $m \neq 0$ 时，螺旋性则会随洛伦兹坐标变换而改变。

最后，用上标表示场的自旋，我们给出一些有用的恒等式

$$\begin{aligned} &\overline{u}^r(\boldsymbol{p}_1)u^s(\boldsymbol{p}_1) = 2m\delta^{rs}, && u^{r\dagger}(\boldsymbol{p}_1)u^s(\boldsymbol{p}_1) = 2p_1^0\delta^{rs} \\ &\overline{v}^r(\boldsymbol{p}_1)v^s(\boldsymbol{p}_1) = -2m\delta^{rs}, && v^{r\dagger}(\boldsymbol{p}_1)v^s(\boldsymbol{p}_1) = 2p_1^0\delta^{rs} \\ &\sum_s u^s(\boldsymbol{p}_1)\overline{u}^s(\boldsymbol{p}_1) = \not{p}_1 + m, && \sum_s v^s(\boldsymbol{p}_1)\overline{v}^s(\boldsymbol{p}_1) = \not{p}_1 - m \end{aligned} \tag{81}$$

其中记 $\not{p}_1 \doteq \gamma^\mu p_{1\mu}$。

1.3.7 狄拉克场量子化

与克莱因-戈登场类似，我们也通过在傅里叶展开谱上插入产生湮灭算符来将场量子化

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^3 p_1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}_1}}}\sum_s \left(a_{\boldsymbol{p}_1}^s u^s(\boldsymbol{p}_1)e^{-ip_1\cdot x} + b_{\boldsymbol{p}_1}^{s\dagger}v^s(\boldsymbol{p}_1)e^{ip_1\cdot x}\right) \\ \overline{\psi}(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^3 p_1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}_1}}}\sum_s \left(b_{\boldsymbol{p}_1}^s \overline{v}^s(\boldsymbol{p}_1)e^{-ip_1\cdot x} + a_{\boldsymbol{p}_1}^{s\dagger}\overline{u}^s(\boldsymbol{p}_1)e^{ip_1\cdot x}\right) \end{aligned} \tag{82}$$

可以证明，如果采用和克莱因-戈登场类似的对易关系，将会得到

$$H = \int \frac{\mathrm{d}^3 p_1}{(2\pi)^3}\sum_s \left(E_{\boldsymbol{p}_1}a_{\boldsymbol{p}_1}^{s\dagger}a_{\boldsymbol{p}_1}^s - E_{\boldsymbol{p}_1}b_{\boldsymbol{p}_1}^{s\dagger}b_{\boldsymbol{p}_1}^s\right) \tag{83}$$

这意味着 $b_{\boldsymbol{p}_1}^{s\dagger}$ 产生的态会具有负的能量本征值，因而系统不再具有稳定的基态。为了解决这个问题，我们采用反对易关系

$$\begin{aligned} &\{\psi_a(\boldsymbol{x},t), \psi_b^\dagger(\boldsymbol{y},t)\} = \delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\delta_{ab} \\ &\{\psi_a(\boldsymbol{x},t), \psi_b(\boldsymbol{y},t)\} = \{\psi_a^\dagger(\boldsymbol{x},t), \psi_b^\dagger(\boldsymbol{y},t)\} = 0 \end{aligned} \tag{84}$$

这会给出产生湮灭算符的反对易关系

$$\{a_{\boldsymbol{p}_1}^r, a_{\boldsymbol{p}_2}^{s\dagger}\} = \{b_{\boldsymbol{p}_1}^r, b_{\boldsymbol{p}_2}^{s\dagger}\} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2)\delta^{rs} \tag{85}$$

注意到这意味着 $(a^\dagger)^2 = (b^\dagger)^2 = 0$，并且交换两个粒子会导致波函数变号

$$a_{\boldsymbol{p}_1}^\dagger a_{\boldsymbol{p}_2}^\dagger |0\rangle = -a_{\boldsymbol{p}_2}^\dagger a_{\boldsymbol{p}_1}^\dagger |0\rangle \tag{86}$$

因而狄拉克场的粒子遵循费米-狄拉克统计。事实上，更一般地来说，综合洛伦兹不变性、正能量本征态、正范数和因果律会要求整数自旋的粒子服从玻色-爱因斯坦统计，而半整数自旋的粒子服从费米-狄拉克统计。

1.3.8 狄拉克场的态

写出此时的哈密顿量

$$H=\int\frac{\mathrm{d}^3p_1}{(2\pi)^3}E_{\boldsymbol{p}_1}\sum_s\left[a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}_1}a^s_{\boldsymbol{p}_1}+b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}_1}b^s_{\boldsymbol{p}_1}-(2\pi)^3\delta(0)\right] \tag{87}$$

发散项的符号和自由标量场相反，因此在两种场同时存在时它们可以抵消 (这会在超对称理论中出现)。与标量场类似，我们写出对易关系

$$\begin{aligned}&[H,a^s_{\boldsymbol{p}_1}]=-E_{\boldsymbol{p}_1}a^s_{\boldsymbol{p}_1},\quad [H,a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}_1}]=E_{\boldsymbol{p}_1}a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}_1}\\&[H,b^s_{\boldsymbol{p}_1}]=-E_{\boldsymbol{p}_1}b^s_{\boldsymbol{p}_1},\quad [H,b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}_1}]=E_{\boldsymbol{p}_1}b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}_1}\end{aligned} \tag{88}$$

同样与标量场类似地，可以定义总动量算符

$$\boldsymbol{p}\doteq\int\frac{\mathrm{d}^3p_1}{(2\pi)^3}\boldsymbol{p}_1\sum_s\left(a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}_1}a^s_{\boldsymbol{p}_1}+b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}_1}b^s_{\boldsymbol{p}_1}\right) \tag{89}$$

接下来定义真空态 $|0\rangle$，使得 $a^s_{\boldsymbol{p}_1}|0\rangle=b^s_{\boldsymbol{p}_1}|0\rangle=0$，在这之上通过作用产生算符可以构造激发态

$$|\boldsymbol{p}_1,s\rangle\doteq\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}_1}}a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}_1}|0\rangle \tag{90}$$

这表示一个动量为 $\boldsymbol{p}_1$，能量为 $E_{\boldsymbol{p}_1}=\sqrt{|\boldsymbol{p}_1|^2+m^2}$ 并在 x^3 方向上有自旋极化 s 的单粒子态。归一化关系给出

$$\langle\boldsymbol{p}_2,r|\boldsymbol{p}_1,s\rangle=2E_{\boldsymbol{p}_1}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)\delta^{rs} \tag{91}$$

为了说明 $a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}_1}|0\rangle$ 和 $b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}_1}|0\rangle$ 的区别，考虑全局 $U(1)$ 变换的对应的诺特荷

$$\psi\to e^{-i\alpha}\psi,\quad \overline{\psi}\to\overline{\psi}e^{i\alpha} \tag{92}$$

其对应的守恒流为

$$j^\mu=\overline{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{93}$$

于是诺特荷给出

$$Q=\int\frac{\mathrm{d}^3p_1}{(2\pi)^3}\sum_s(a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}_1}a^s_{\boldsymbol{p}_1}-b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}_1}b^s_{\boldsymbol{p}_1}) \tag{94}$$

这样一来可以算出 $a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}_1}|0\rangle$ 和 $b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}_1}|0\rangle$ 分别具有正的和负的诺特荷。

1.3.9 传播子

旋量场的传播振幅为

$$\begin{aligned}\langle0|\psi_\mu(x)\overline{\psi}_\nu(y)|0\rangle&=(i\partial\!\!\!/_x+m)_{\mu\nu}\int\frac{\mathrm{d}^3p_1}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}_1}}e^{-ip_1\cdot(x-y)}\\\langle0|\overline{\psi}_\nu(y)\psi_\mu(x)|0\rangle&=-(i\partial\!\!\!/_x+m)_{\mu\nu}\int\frac{\mathrm{d}^3p_1}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}_1}}e^{-ip_1\cdot(x-y)}\end{aligned} \tag{95}$$

接下来，与标量场类似，我们可以写出一系列旋量场的格林函数，如推迟格林函数

$$\begin{aligned}S_R(x-y)\doteq&\theta(x^0-y^0)\langle0|\{\psi(x),\overline{\psi}(y)\}|0\rangle\\=&(i\partial\!\!\!/_x+m)D_R(x-y)\end{aligned} \tag{96}$$

同样，也可以给出费曼传播子

$$S_F(x-y)\doteq\langle0|T\psi(x)\overline{\psi}(y)|0\rangle \tag{97}$$

1.4 阿贝尔规范场

1.4.1 经典麦克斯韦场

经典无源电磁场的拉格朗日量密度为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu \tag{98}$$

其中电磁场张量

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} =& \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ =& \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{99}$$

写出 A_μ 的欧拉-拉格朗日方程以及比安基恒等式 (Bianchi identity)

$$\begin{aligned} &\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial^\mu \partial_\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0 \\ &\partial_\mu F_{\nu\sigma} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\nu} = 0 \end{aligned} \tag{100}$$

这可以给出麦克斯韦方程。注意到在这个拉氏量密度中，场的共轭动量为

$$\begin{aligned} \pi^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^0} = 0 \\ \pi^i &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^i} = -F^{0i} = E^i \end{aligned} \tag{101}$$

时间分量成为了一个非动力学场，这会在量子化的时候带来问题。

除此之外，这个系统还在规范变换

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha(x) \tag{102}$$

下不变，即由这一规范变换联系的两个场在物理上等价。为了消除多余的自由度，引入洛伦兹规范

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{103}$$

引入洛伦兹规范后，场方程变为了 4 个无质量场的克莱因-戈登方程。

1.4.2 矢量场量子化

为了克服量子化的困难，在拉格朗日密度中加入一个拉格朗日乘子

$$\mathcal{L}_\xi = \mathcal{L} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 \tag{104}$$

此时欧拉-拉格朗日方程变为

$$\partial^\mu \partial_\mu A^\nu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0 \tag{105}$$

当 $\xi = 1$ 时方程会变得很简单，我们称这种规范为费曼规范。接下来的一段讨论中我们就取费曼规范计算。

1.5 微扰场论

1.5.1 微扰展开

以 ϕ^4 场论为例，有相互作用的场可以认为是在自由场哈密顿量的基础上加入额外的相互作用项

$$H = H_0 + H_{\text{int}} = H_{\text{K-G}} + \int \mathrm{d}^3x \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \tag{106}$$

其中 λ 是耦合常数。当耦合常数很小时，可以认为理论由 H_0 主导，给出相互作用图景下的算符表达式

$$\mathcal{O}_I(\boldsymbol{x}, t) \doteq e^{i(t-t_0)H_0}\mathcal{O}(\boldsymbol{x}, t_0)e_{-i(t-t_0)H_0} \tag{107}$$

相比之下，真实的时间演化应该给出

$$\mathcal{O}(\boldsymbol{x}, t) = e^{i(t-t_0)H}e^{-i(t-t_0)H_0}\mathcal{O}_I(\boldsymbol{x}, t)e_{i(t-t_0)H_0}e_{-i(t-t_0)H} \tag{108}$$

相互作用图景下的算符可以由自由场理论给出，例如 $\phi_I(x)$ 遵循自由场的克莱因-戈登方程，也可以按照自由克莱因-戈登场的傅里叶谱分解。因此我们需要研究的就是

$$U(t, t_0) \doteq e^{i(t-t_0)H_0}e^{-i(t-t_0)H} \tag{109}$$

为此写出它的时间导数

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(t, t_0) =& -ie^{i(t-t_0)H_0}H_{\text{int}}e^{-i(t-t_0)H_0}U(t, t_0)\\ =& -iH_I(t)U(t, t_0)\end{aligned} \tag{110}$$

其中

$$H_I(t) \doteq e^{i(t-t_0)H_0}H_{\text{int}}e^{-i(t-t_0)H_0} \tag{111}$$

这被称为相互作用哈密顿量，注意到不同时的 H_I 之间不对易。

现在将微分方程重新写为积分形式，并注意到 $U(t_0, t_0) = 1$，有

$$U(t, t_0) = 1 + (-i)\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1 H_I(t_1)U(t_1, t_0) \tag{112}$$

注意到这里的 t_1 和 t 并不是与之前记号类似地表示算符和本征值，而只是表示不同时间变量。用迭代的方法可以算出级数解

$$U(t, t_0) = 1 + (-i)\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1 H_I(t_1) + (-i)^2\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_2\int_{t_0}^{t_2}\mathrm{d}t_1 H_I(t_2)H_I(t_1) + \cdots \tag{113}$$

最后，出于记号考虑，注意到等式

$$\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_2\int_{t_0}^{t_2}\mathrm{d}t_1 H_I(t_2)H_I(t_1) = \frac{1}{2!}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_2 T H_I(t_1)H_I(t_2) \tag{114}$$

于是可以把级数写为

$$\begin{aligned}U(t, t_0) =& 1 + (-i)\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1 H_I(t_1) + \frac{(-i)^2}{2!}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_2 T H_I(t_1)H_I(t_2) + \cdots\\ =& T\exp\left[-i\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}\tau H_I(\tau)\right]\end{aligned} \tag{115}$$

这个级数被称为戴森级数 (Dyson's series)，实际计算时通常只取前几项展开。

1.5.2 相互作用真空态

显然，由于 $[H, H_0]$ 不为零，自由场和相互作用场的基态不同。我们将其分别记为 $|0\rangle$ 和 $|\Omega\rangle$，另外，记 $|n\rangle$ 为 H 的本征态，有

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle \tag{116}$$

则有自由场基态 $|0\rangle$ 的时间演化

$$\begin{aligned} e^{-iHt}|0\rangle =& e^{-iHt}\sum|n\rangle\langle n|0\rangle \\ =& e^{-iE_\Omega t}|\Omega\rangle\langle\Omega|0\rangle + \sum_{|n\rangle\neq|\Omega\rangle} e^{-iE_n t}|n\rangle\langle n|0\rangle \end{aligned} \tag{117}$$

由于 E_Ω 是最小的能量本征值，我们可以通过取 $t\to(1-i\epsilon)\infty$ 将其他本征态消除，得到

$$|\Omega\rangle = \lim_{t\to(1-i\epsilon)\infty}\left(e^{-iE_\Omega t}\langle\Omega|0\rangle\right)^{-1} e^{-iHt}|0\rangle \tag{118}$$

由于 t 趋于无穷，我们可以在其上增加一个有限的常数，经过化简可以配出

$$|\Omega\rangle = \lim_{t\to(1-i\epsilon)\infty}\left(e^{-iE_\Omega(t_0-(-t))}\langle\Omega|0\rangle\right)^{-1} U(t_0,-t)|0\rangle \tag{119}$$

这被称为盖尔曼-劳定理 (Gell-Mann-Low theorem)。对于基态左矢 $\langle\Omega|$ 同理。

1.5.3 传播子

接下来计算 $\langle\Omega|T\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle$。注意到 $t_1\geqslant t_2\geqslant t_3$ 时有

$$\begin{aligned} U(t_1,t_2)U(t_2,t_3) &= U(t_1,t_3) \\ U(t_1,t_3)[U(t_2,t_3)]^\dagger &= U(t_1,t_2) \end{aligned} \tag{120}$$

首先考虑 $x^0\geqslant y^0\geqslant t_0$ 的情况，得到

$$\langle\Omega|\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \lim_{t\to(1-i\epsilon)\infty}\left(|\langle\Omega|0\rangle|^2 e^{-iE_\Omega 2t}\right)^{-1}\langle 0|U(t,x^0)\phi_I(x)U(x^0,y^0)\phi_I(y)U(y^0,-t)|0\rangle \tag{121}$$

其中系数可以通过

$$1 = \langle\Omega|\Omega\rangle = \lim_{t\to(1-i\epsilon)\infty}\left(|\langle\Omega|0\rangle|^2 e^{-iE_\Omega 2t}\right)^{-1}\langle 0|U(t,t_0)U(t_0,-t)|0\rangle \tag{122}$$

消去。于是有

$$\langle\Omega|\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \lim_{t\to(1-i\epsilon)\infty}\frac{\langle 0|U(t,x^0)\phi_I(x)U(x^0,y^0)\phi_I(y)U(y^0,-t)|0\rangle}{\langle 0|U(t,-t)|0\rangle} \tag{123}$$

最后，加入时间排序记号，得到

$$\langle\Omega|T\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \lim_{t\to(1-i\epsilon)\infty}\frac{\langle 0|T\phi_I(x)\phi_I(y)\exp\left[-i\int_{-t}^{t}\mathrm{d}\tau H_I(\tau)\right]|0\rangle}{\langle 0|T\exp\left[-i\int_{-t}^{t}\mathrm{d}\tau H_I(\tau)\right]|0\rangle} \tag{124}$$

这个表达式可以被推广到多点关联函数的形式。

1.5.4 维克定理

为了找到一般方法计算 $\langle 0|T\phi_I(x)\phi_I(y)|0\rangle$，我们首先将场算符分解为

$$\phi_I(x) = \phi_I^+(x) + \phi_I^-(x) \tag{125}$$

其中

$$\phi_I^+(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3p_1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}_1}}}a_{\boldsymbol{p}_1}e^{-ip_1\cdot x}, \quad \phi_I^-(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3p_1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}_1}}}a_{\boldsymbol{p}_1}^\dagger e^{ip_1\cdot x} \tag{126}$$

后文中在没有歧义的情况下，我们将省略相互作用图景的下标。

接下来，引入正规序 (normal order) 记号 N，表示将所有 $a_{\boldsymbol{p}_1}^\dagger$ 排在 $a_{\boldsymbol{p}_1}$ 左侧，记为 $N\phi_1\phi_2$，有时也记为 $:\phi_1\phi_2:$。注意到有

$$\langle 0|N(\text{任意算符})|0\rangle = 0 \tag{127}$$

定义两个场算符的缩并 (contraction) 为

$$\begin{aligned}\overline{\phi(x)\phi}(y) \doteq& \begin{cases}[\phi^+(x), \phi^-(y)], & x^0 > y^0\\ [\phi^+(y), \phi^-(x)], & x^0 < y^0\end{cases}\\ =& D_F(x-y)\end{aligned} \tag{128}$$

最后，将场的时间排序展开，可以得到

$$T\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) = N\{\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) + \text{所有可能缩并}\} \tag{129}$$

这就是维克定理 (Wick's theorem)。注意到，对于只部分缩并的项，其正规序为

$$N\overline{\phi_1\phi_2\phi_3}\phi_4 = D_F(x_1-x_3)\cdot N\phi_2\phi_4 \tag{130}$$

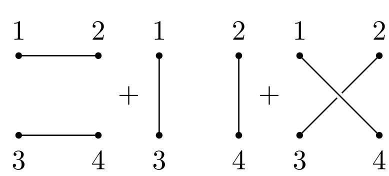
将这些结果组合起来，可以得到我们要求的表达式 $\langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)|0\rangle$ 等于所有完全缩并的项对应的费曼传播子之和。

1.5.5 费曼图

考虑具有四个场的情况，可以写出

$$\begin{aligned}\langle 0|T\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4|0\rangle =& D_F(x_1-x_2)D_F(x_3-x_4)\\ &+ D_F(x_1-x_3)D_F(x_2-x_4)\\ &+ D_F(x_1-x_4)D_F(x_2-x_3)\end{aligned} \tag{131}$$

现在我们用费曼图表示这三项，写出

$\langle 0|T\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4|0\rangle =$  (132)

这里的每一张图表示一种传播方式对结果的贡献，总振幅就等于这三张图贡献的叠加。

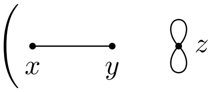
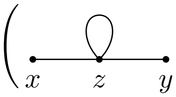
回到两点关联函数，首先将分子展开为

$$\langle 0|T\left[\phi(x)\phi(y)+\phi(x)\phi(y)(-i)\int \mathrm{d}\tau H_I(\tau)+\cdots\right]|0\rangle \tag{133}$$

第一项就是自由场的结果，在 ϕ^4 场论中，回忆起哈密顿量 (104)，带入并作展开，我们可以写出第二项

$$\begin{aligned}&\langle 0|T\left[\phi(x)\phi(y)\frac{-i\lambda}{4!}\int \mathrm{d}^4z\phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(z)\right]|0\rangle\\ =&3\cdot\frac{-i\lambda}{4!}D_F(x-y)\int \mathrm{d}^4zD_F(z-z)D_F(z-z)\\ &+12\cdot\frac{-i\lambda}{4!}\int \mathrm{d}^4zD_F(x-z)D_F(y-z)D_F(z-z)\end{aligned} \tag{134}$$

忽略系数 $-i\lambda\int \mathrm{d}^4z$，可以认为它是这两张图之和

$\frac{1}{8}$ () $+\frac{1}{2}$ () (135)

前面的系数被称为对称因子，它来自费曼图具有的对称性。例如，第一个图的 1/8 可以写成 $1/(2\times2\times2)$，分别表示两个圈各自翻转对称和它们之间交换的对称。

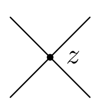
在这些图中，如 x,y 这样的点被称为外点 (external points)，而 z 这样的点被称为顶点 (vertices)，点和点的连线则被称为传播子 (propagators)。显然，在 ϕ^4 场论中每个顶点都连接着四条传播子。另外，可以证明我们要计算的就是所有具有两个外点的费曼图之和。

真正的计算过程实际上是画出费曼图然后再计算相应振幅，为此我们需要知道如何写出一个图对应的振幅表达式。这由费曼规则给出：

1. 对于每条传播子

x y $=D_F(x-y)$ (136)

2. 对于每个顶点

 z $=-i\lambda\int \mathrm{d}^4z$ (137)

3. 对于每个外点

x $=1$ (138)

4. 最后除上对称因子。

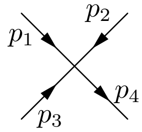
对此的一种解读是认为每个顶点的 $-i\lambda$ 对应在该时空坐标生成/吸收一个粒子对应的振幅，而 $\int \mathrm{d}^4z$ 就是将全时空的振幅积分。

1.5.6 动量空间费曼图

更常见的计算费曼图的方式是在动量空间中，此时写出传播子

$$D_F(x-y)=\int\frac{\mathrm{d}^4p_1}{(2\pi)^4}\frac{i}{p_1^2-m^2+i\epsilon}e^{-ip_1\cdot(x-y)} \tag{139}$$

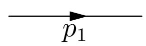
这启示我们为每一条传播子赋予一个动量，当遇到顶点时，有



$$\longrightarrow \begin{aligned} &\int \mathrm{d}^4 z e^{-p_1\cdot z} e^{-p_2\cdot z} e^{-p_3\cdot z} e^{p_4\cdot z} \\ =&(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1+p_2+p_3-p_4) \end{aligned} \tag{140}$$

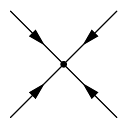
只需要对动量积分就可以将这个 δ 函数转化为顶点处动量守恒的条件。我们可以写出动量空间的费曼规则：

1. 对于每条传播子



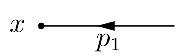
$$= \frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \tag{141}$$

2. 对于每个顶点



$$= -i\lambda \tag{142}$$

3. 对于每个外点



$$= e^{-ip_1\cdot x} \tag{143}$$

4. 在每个顶点上加入动量守恒条件

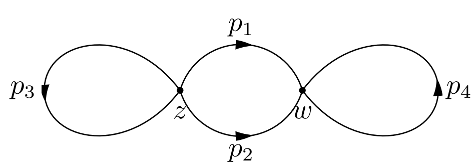
5. 对于仍不确定的动量作积分

$$\int \frac{\mathrm{d}^4 p_1}{(2\pi)^4} \tag{144}$$

6. 最后除上对称因子。

真空图

真空图是指没有外点的费曼图，例如



$$(145)$$

在 z 处得到动量守恒式为 $(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2)$，则 w 处的动量守恒自动满足，将会得到 $\delta(0)$，这是一个发散的结果。在坐标空间中计算也同理，$\mathrm{d}^4 w$ 会在全时空对某个常数积分。这是意味着这张图表示的过程可以在时空中任意一点等概率 (等振幅) 发生。

一般来说，展开的每一项中包含一个含有外点 x, y 的图和若干不含外点的真空图。将每一张真空图的贡献记为 V_i，并设我们关心的这一项带有 n_i 个对应的真空图，则可以将这一项的贡献写为

$$(\text{包含外点的图}) \cdot \prod_i \frac{1}{n_i!} V_i^{n_i} \tag{146}$$

$1/n_i!$ 为同种图之间交换产生的对称因子。则关联函数表达式 (122) 的分子可以写为

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\text{所有可能的}\\\text{包含外点的图}}} \sum_{\substack{\text{所有可能的}\\\text{真空图序列}\{n_i\}}} (\text{包含外点的图}) \times \prod_i \frac{1}{n_i!} V_i^{n_i} \\
=& \sum (\text{包含外点的图}) \times \sum_{\{n_i\}} \left(\prod_i \frac{1}{n_i!} V_i^{n_i} \right) \\
=& \sum (\text{包含外点的图}) \times \prod_i \left(\sum_{n_i} \frac{1}{n_i!} V_i^{n_i} \right) \\
=& \sum (\text{包含外点的图}) \times \prod_i \exp(V_i) \\
=& \sum (\text{包含外点的图}) \times \exp\left(\sum_i V_i \right)
\end{aligned} \tag{147}
$$

另一方面，关联函数的分母则只包含真空图而不含外点，因此，在计算关联函数时，真空图的贡献 $\exp\left(\sum V_i\right)$ 就被抵消了，只需要计算包含外点的图的贡献即可。

配分函数

所有真空图之和，即关联函数的分母

$$\langle 0|U(t,-t)|0\rangle = \langle 0|T\exp\left[-i\int \mathrm{d}\tau H_I(\tau)\right]|0\rangle \tag{148}$$

被称为配分函数，记为 Z。可以写出

$$Z = \lim_{t\to(1-i\epsilon)\infty} |\langle\Omega|0\rangle|^2 e^{-iE_\Omega 2t} \tag{149}$$

取对数后并忽略极限下的有限大项 $|\langle\Omega|0\rangle|^2$，得到

$$E_\Omega = \lim_{t\to(1-i\epsilon)\infty} \frac{i}{t}\ln Z \tag{150}$$

容易联想到，如果计算真空能量密度，即在两侧同时除以全空间体积，则真空图带来的 $\delta(0)$ 就可以被抵消。这解决了一部分发散的问题，其它的发散将由重整化处理。