复变函数笔记

臧亦驰

目录

1 复变函数 5

1.1 复数 5

1.1.1 基本概念 5

1.1.2 复数的表示 5

1.1.3 复数的运算 5

1.1.4 复数序列的极限 5

1.2 复变函数 6

1.2.1 区域 6

1.2.2 复变函数的定义 6

1.2.3 极限 6

1.2.4 连续 6

1.3 复变函数的导数 7

1.3.1 导数与微分 7

1.3.2 可导条件 7

1.3.3 几何意义 7

1.3.4 可导条件等价变换 8

1.4 解析函数 8

1.4.1 定义 8

1.4.2 解析的充要条件 8

1.4.3 解析函数的性质 8

2 复变积分 8

2.1 定义和性质 8

2.1.1 定义 8

2.1.2 计算方法 9

2.1.3 性质 9

2.2 柯西定理 9

2.2.1 单通区域的柯西定理 9

2.2.2 原函数 9

2.2.3 复通区间内的柯西定理 9

2.3 柯西公式 10

2.3.1 圆弧引理 10

2.3.2 柯西公式 10

2.3.3 高阶导数公式 11

2.3.4 柯西不等式 11

2.3.5 刘维尔定理 11

3 解析函数级数表示 **11**
3.1 复变函数项级数 . . . 11
3.1.1 级数收敛性 . . . 11
3.1.2 绝对收敛 . . . 12
3.1.3 一致收敛 . . . 12
3.2 幂级数 . . . 12
3.2.1 定义 . . . 12
3.2.2 阿贝尔定理 . . . 12
3.2.3 收敛圆与收敛半径 . . . 13
3.2.4 计算收敛半径 . . . 13
3.3 解析函数展开 . . . 13
3.3.1 泰勒展开 . . . 13
3.3.2 洛朗展开 . . . 14
3.3.3 展开方法 . . . 14
3.4 零点和孤立奇点 . . . 14
3.4.1 解析函数零点 . . . 14
3.4.2 孤立与非孤立奇点 . . . 14
3.4.3 孤立奇点的分类和性质 . . . 15
3.4.4 无穷远点 . . . 15

4 留数定理 **15**
4.1 留数定理 . . . 15
4.1.1 留数定理 . . . 15
4.1.2 无穷远点留数定理 . . . 15
4.1.3 计算留数方法 . . . 15
4.2 留数定理计算实变积分 . . . 16
4.2.1 几个引理 . . . 16
4.2.2 带三角函数积分 . . . 16
4.2.3 实轴上无奇点的无穷反常积分 . . . 17
4.2.4 含指数的无奇点无穷反常积分 . . . 17
4.2.5 实轴上有一阶极点的无穷积分 . . . 17
4.2.6 有一阶极点的含指数无穷积分 . . . 17
4.3 留数定理计算级数和 . . . 18
4.3.1 整数级数和 . . . 18
4.3.2 半整数级数和 . . . 18

5 解析延拓 **18**
5.1 解析延拓与 Γ 函数 . . . 18
5.1.1 解析延拓 . . . 18
5.1.2 用泰勒级数解析延拓 . . . 18

5.1.3 Γ 函数 19
5.2 多值函数和黎曼面 19
5.2.1 支点 19
5.2.2 割线 19
5.2.3 黎曼面 20

1 复变函数

1.1 复数

1.1.1 基本概念

形如 $z = x + iy$ 的数称为**复数**，其中 $i = \sqrt{-1}$，x, y 分别称为复数的**实部**和**虚部**，记为

$$x = \mathfrak{Re} z, \quad y = \mathfrak{Im} z$$

实部相等而虚部为相反数的一对复数称为**共轭复数**。记为

$$z^* = (x + iy)^* = x - iy$$

1.1.2 复数的表示

复数可以与复平面上的点相对应，其横纵坐标分别为复数的实部与虚部，由此，复数也可以用一个矢量表示。

将直角坐标变为极坐标，则半径和角度分别称为复数的**模**与**辐角**，记为 ρ, φ。利用欧拉公式，一个复数也可以用 e 的指数表示，即

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\rho e^{i\varphi}$$

通过从北极点作射线投影的方法，可以将除北极点外的球面与平面上的点一一对应，若这个平面为复平面，则对应得到的球面称为**复球面**。

1.1.3 复数的运算

复数的加减法就是把实部和虚部分别相加，可以将其理解为平面矢量的加减法。复数的乘除和同样可以类比实数多项式的乘除法，值得注意的是一个复数和它的共轭的乘积就等于它的模的平方

$$zz^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$

复数的乘除、乘方运算用指数形式会更加方便。

1.1.4 复数序列的极限

对于一个复数序列 $\{z_n\}$，如果对于任意 $\epsilon > 0$，存在无穷多个 z_n，满足

$$|z_n - z| < \epsilon$$

则称 z 为序列 $\{z_n\}$ 的一个**聚点**。

如果对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $N \in N^*$，使得任意 $n > N$ 都有

$$|z_n - z| < \epsilon$$

则称 z 为序列 $\{z_n\}$ 的极限，记为

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z$$

有的序列可以有多个聚点，当序列极限存在时，序列的极限是序列的唯一聚点。

在实数列中，最大和最小的聚点分别称为**上极限**和**下极限**，记为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ 和 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$。

与实数列的极限类似，复数列也有极限的**柯西判别法**。

1.2 复变函数

1.2.1 区域

以点 z_0 为圆心，任意小正实数 ϵ 为半径的开圆称为点 z_0 的 ϵ **邻域**，即满足 $|z-z_0|<\epsilon$ 的点的集合。点 z_0 的**去心邻域**与邻域的区别就是不包含 z_0 点。

若点集 D 内某点的 ϵ 邻域中所有点都属于该点集，则称此点为点集 D 的**内点**。若点集 D 满足每一点都是内点，且 D 中任意两点都可以用一条由 D 中的点构成的曲线连接起来，则称点集 D 为一个**（开）区域**。若一个点不属于 D，但其 ϵ 邻域中含有 D 中的点，则称这个点为 D 的**边界点**，边界点的全体构成**边界**。开区域 D 加上边界 L 称为**闭区域** $\overline{D}$。有时还把不包括无穷远点的平面称为**全平面**，包括无穷远点的整个平面称为**闭平面**。

区域不相连接的边界数称为**联通阶数** n，$n=1$ 的区域称为**单通区域**，$n>1$ 的区域称为**复通区域**。

1.2.2 复变函数的定义

若区域 D 内的每一个 z，均有一个或多个 w 与之对应，则称 w 为 z 的**函数**，记为

$$w=f(z)$$

如果令 $w=u+iv$，那么有

$$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

可以看出复变函数其实是两个实变函数的有序组合。如果一个 z 只对应一个 w，则称这种函数为**单值函数**。

1.2.3 极限

设 $w=f(z)$ 是 z 的去心邻域中定义的单值函数，若对于任意实数 $\epsilon>0$，存在实数 $\delta>0$，使得 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，有

$$|f(z)-w_0|<\epsilon$$

则称 $z\to z_0$ 时 $f(z)$ 的**极限**为 w_0，记作

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0$$

复变函数极限的性质就是实变函数极限性质的自然推广。

1.2.4 连续

连续的定义与极限相仿，设 $w=f(z)$ 是 z 的邻域中定义的函数，若对于任意实数 $\epsilon>0$，存在实数 $\delta>0$，使得 $|z-z_0|<\delta$ 时，有

$$|f(z)-f(z_0)|<\epsilon$$

则称函数 $w=f(z)$ 在 z_0 处**连续**。若函数在 D 内每一点都连续，则称函数在 D 内连续。实变函数的性质可以直接推广到复变函数中。

1.3 复变函数的导数

1.3.1 导数与微分

设 $w=f(z)$ 是区域 D 中定义的单值函数，若在 D 内某点 z，极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

存在，则称函数 $f(z)$ 在 z 点**可导**，并将此极限称为 $f(z)$ 在 z 点的**导数**，记作

$$f'(z)=\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

实变函数导数的和差积商和复合的导数公式均可以推广到复变函数中。

若函数 $w=f(z)$ 在某点 z 的改变量 $\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)$ 可以写成

$$\Delta w=\alpha\Delta z+o(\rho)$$

其中 $\rho=|\Delta z|$，$o(\rho)$ 是 ρ 的高阶无穷小量，则称 $w=f(z)$ 在 z 点**可微**，并且有函数的**微分**

$$\mathrm{d}w=\alpha\Delta z$$

对于特殊函数 $w=z$ 作微分可以得到恒等式 $\Delta z=\mathrm{d}z$，又利用导数的定义式可得 $f'(z)=\alpha$，于是

$$\mathrm{d}w=f'(z)\mathrm{d}z$$

1.3.2 可导条件

函数 $f(z)=u(x.y)+iv(x,y)$ 在 (x,y) 点可导的充要条件是：$u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 (x,y) 处

（1）可微；

（2）满足**柯西-黎曼条件**（简称 C-R 条件）

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

利用柯西-黎曼条件，函数的导数可以表示为四种形式

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

1.3.3 几何意义

根据导数的定义可知，导数的模 $|f'(z)|$ 表示通过点 z_0 的无穷小线段 Δz 对应的 Δw 的长度放大系数；导数的辐角 $\arg f'(z)$ 表示从 z 平面映射到 w 平面后切线的转动角。这既可以由 Δz 的任意性看出，也可以由 $f'(z)=u_x+iv_x$ 中看出，$f(z)$ 的导数等于函数对 x 的偏导，也即对应于辐角为 0 的情况。

通过将自变量由 (x,y) 变为 (ρ,φ)，函数变为 $w=re^{i\theta}$，可以算出（夹带私货）类似柯西-黎曼限制条件

$$\frac{\partial r}{\partial\rho}=\frac{r}{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi},\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial r}{\partial\varphi}=-r\frac{\partial\theta}{\partial\rho}$$

同时可以将导数的表达式写为（只取四种形式中的一种）

$$f'(z)=(\frac{\partial r}{\partial\rho}+ir\frac{\partial\theta}{\partial\rho})e^{i(\theta-\varphi)}$$

从中可以更加清晰地看到导数的几何意义。

1.3.4 可导条件等价变换

个人见解：通过将函数 $f(z)$ 对 x 和 iy 形式上求偏导，可以证明 C-R 条件的充要条件是函数 $f(z)$ 中关于 x, y 的部分可以以整体 $z = x + iy$ 的形式出现，且函数的导数就是形式上对 z 求导得到的导函数。

1.4 解析函数

1.4.1 定义

如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内处处可导，则称 $f(z)$ 为 D 内的**解析函数**。若函数在 z_0 点的邻域处处可导，则称其在 z_0 点**解析**。

若函数在某点没有意义或不解析，则称这个点为函数的**奇点**。

1.4.2 解析的充要条件

函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析的充要条件是 $f(z)$ 连续且 u, v 遵守 C-R 条件。

1.4.3 解析函数的性质

解析函数的实部和虚部由 C-R 条件联系，称为解析函数的**共轭性**。由这个性质可以由解析函数的实部求得虚部或由虚部求得实部，结果含有一个可加常数。从几何上，共轭性表明函数的等 u 线和等 v 线是正交的。

遵循二维拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u = 0$$

的函数称为调和函数，解析函数的实部和虚部都是调和函数，这个性质称为解析函数的**调和性**。满足 C-R 条件的两个调和函数称为共轭调和函数，解析函数的实部和虚部是一对共轭调和函数。

z 平面的两条曲线相交于 z_0，他们经过解析函数映射到 w 平面后，在 $f(z_0)$ 点切线的夹角保持不变，这称为解析函数的**保角性**。这实际上源自导数辐角的几何意义。

2 复变积分

2.1 定义和性质

2.1.1 定义

设 L 为复平面上的曲线，函数 $f(z)$ 在 L 上有定义，则与实函数积分类似地定义极限

$$\lim_{\max|\Delta z|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$$

定义为函数 $f(z)$ 沿曲线 L 的**积分**。记为

$$\int_L f(z)\mathrm{d}z = \lim_{\max|\Delta z|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$$

2.1.2 计算方法

可以将复变积分化为两个实变线积分计算，即

$$\begin{aligned}\int_L f(z)\mathrm{d}z &= \int_L (u+iv)(\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y)\\ &= \int_L (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + i\int_L (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y)\end{aligned}$$

2.1.3 性质

大致上复变积分的性质是实变积分的直接推广，除此之外我们还有

$$\left|\int_L f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_L |f(z)||\mathrm{d}z|$$

这显然由两边之和大于第三边可以得到。作为推论有

$$\left|\int_L f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant Ml, \quad M = \max_L f(z)$$

2.2 柯西定理

2.2.1 单通区域的柯西定理

若函数 $f(z)$ 在单通区域 D 内解析，则 $f(z)$ 在 D 内沿任意闭曲线的积分为零

$$\oint_l f(z)\mathrm{d}z = 0$$

这称为单通区域内的**柯西定理**。

2.2.2 原函数

由柯西定理可以推知，若 $f(z)$ 在单通区域 D 内解析，则积分 $\int_l f(z)\mathrm{d}z$ 与路径无关。可以证明，积分上限的函数（显然是一个单值函数）

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

是被积函数 $f(z)$ 的原函数。显然这个原函数可以增加一个任意复常数

$$G(z) = F(z) + C$$

通常把这样的原函数（的集合）称为 $f(z)$ 的**不定积分**，并且有与实变函数中牛顿莱布尼茨公式相同形式的定积分公式

$$\int_{z_0}^{z} f(\xi)\mathrm{d}\xi = G(z) - G(z_0)$$

2.2.3 复通区间内的柯西定理

若 $f(z)$ 在闭复通区间 $\overline{D}$ 解析，则 $f(z)$ 沿所有内外边界线 $L = L_0 + \sum\limits_k L_k$ 正方向积分之和为零

$$\oint_L f(z)\mathrm{d}z = \oint_{L_0} f(z)\mathrm{d}z + \sum_k \oint_{L_k} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

其中“正方向”是指，当沿边界环行时，$\overline{D}$ 保持在左边。换言之，外边界线取逆时针，内边界线取顺时针。由此可以推知，在解析区域中，积分回路连续变形时，积分值不变。

2.3 柯西公式

2.3.1 圆弧引理

小圆弧引理：若 $\varphi(z)$ 在 $z=a$ 的去心邻域内连续，在小圆弧 $C_r(z-a=re^{i\theta},\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2)$ 上

$$\lim_{r\to0}(z-a)\varphi(z)=k$$

一致成立，则

$$\lim_{r\to0}\int_{C_r}\varphi(z)\mathrm{d}z=ik(\theta_2-\theta_1)$$

大圆弧引理：若 $\varphi(z)$ 在无穷远点的去心邻域内连续，在大圆弧 $C_R(z=Re^{i\theta},\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2)$ 上

$$\lim_{R\to\infty}z\varphi(z)=K$$

一致成立，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\varphi(z)\mathrm{d}z=iK(\theta_2-\theta_1)$$

2.3.2 柯西公式

单通区域中：设 $f(z)$ 在单通区域 $\overline{D}$ 解析，a 为 $\overline{D}$ 的内点，则

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z$$

其中 L 为 $\overline{D}$ 的边界线，这就是单通区域的**柯西公式**。柯西公式表明，解析函数在边界上的取值完全决定函数在区域内各点的取值。

复通区域中：设 $f(z)$ 在闭复通区域 $\overline{D}$ 中解析，a 为 $\overline{D}$ 内点，则

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z$$

其中积分在内外边界均沿正方向。

无界区域：设 $f(z)$ 在积分回路 l 及 l 外一点解析，a 为 l 外一点，且

$$\lim_{z\to\infty}f(z)=0$$

则

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_l\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z$$

无界区域拓展：设 $f(z)$ 在积分回路 l 及 l 外一点解析，a 为平面上一点，且

$$\lim_{z\to\infty}f(z)=A$$

则

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_l\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z=\begin{cases}f(a)-A, & a\ outside\ the\ area\\ -A, & a\ in\ the\ area\end{cases}$$

2.3.3 高阶导数公式

若 $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 内解析，z 为 $\overline{D}$ 的内点，则 $f(z)$ 在 D 内可求导任意多次，且

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_L\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\mathrm{d}\xi$$

这表明复变函数和实变函数之间存在重大差别：复变函数只要一阶导数存在，则其任意阶导数存在且连续。

2.3.4 柯西不等式

设 $f(z)$ 在单通区域 D 上解析，l 是 D 内一条闭合回路，则对于 l 内一点，有

$$\left|f^{(n)}(z)\right|\leqslant\frac{n!ML}{2\pi d^{n+1}}$$

其中 M 是 $|f(z)|$ 在 l 上的上界，L 是回路 l 的长度，d 是 z 到 l 的最短距离。

2.3.5 刘维尔定理

若 $f(z)$ 在除无穷远点外的全平面解析，且 $z\to\infty$ 时 $|f(z)|$ 有界，$|f(z)|\leqslant M$，则 $f(z)$ 为常函数。

刘维尔定理表明，非常数的解析函数在扩充的复平面上不可能没有奇点。

3 解析函数级数表示

3.1 复变函数项级数

3.1.1 级数收敛性

形如

$$\sum_{k=0}^{\infty}w_k(z)=w_0(z)+w_1(z)+w_2(z)+\cdots$$

的无穷级数称为**复变函数项级数**，式中 z 为复数，$w_k(z)$ 为复变函数。如果级数的部分和的极限

$$\lim_{n\to\infty}S_n(z)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}w_k(z)=S(z)$$

存在，则称级数在 z 点**收敛**，$S(z)$ 为在 z 点的和，否则称级数在该点**发散**。

若级数在区域 D 上做有点收敛，则称级数在 D 上收敛，级数收敛的区域称为**收敛域**。

级数收敛的必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}w_k(z)=0$$

充要条件是

$$\forall p\in\mathbb{N},\lim_{n\to\infty}|S_{n+p}(z)-S_n(z)|=0$$

3.1.2 绝对收敛

若级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|w_k(z)|$ 在 z 点收敛，则称级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}w_k(z)$ 在 z 点**绝对收敛**。判别绝对收敛的方法就是正项级数的判别法，只有高斯判别法是新的判别方法。

绝对收敛的级数可以随意交换各项的次序，交换后级数仍绝对收敛且级数和不变。两个绝对收敛的级数可以逐项相乘，所得结果仍绝对收敛，且收敛于原级数乘积。

3.1.3 一致收敛

若级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}w_k(z)$ 定义在区域 D 上，且 $\forall\epsilon>0,\exists N(\epsilon)\in\mathbb{N}^*,\forall n>N(\epsilon)$ 有

$$|S(z)-S_n(z)|<\epsilon$$

则称级数在 D 上**一致收敛**。一致收敛与收敛的区别在于，N 不能依赖与 z。一致收敛的充要条件与判断收敛的充要条件类似。判别一致收敛还有以下两种判别法

若正项级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}m_k$ 收敛，且 $|w_k(z)|\leqslant m_k$，则 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}w_k(z)$ 一致收敛；

若 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}w_k(z)$ 一致收敛，且 $|v(z)|<Const$，则 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}v(z)w_k(z)$ 一致收敛。

一致收敛的级数有以下性质：

在 D 内一致收敛且每一项都在 D 内连续的级数满足 $S(z)$ 在 D 内连续，即级数可逐项求极限；

在 l 上一致收敛且每一项连续的级数满足级数可逐项积分；

在 $\overline{D}$ 边界上一致收敛且每一项都在 $\overline{D}$ 内解析的级数满足 $S(z)$ 在 D 内解析且级数可任意次逐项求导。

3.2 幂级数

3.2.1 定义

幂级数是如下无穷级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-b)^k=a_0+a_1(z-b)+a_2(z-b)^2+\cdots$$

式中 a_k,b 为复常数，分别称为幂级数的系数和中心。

3.2.2 阿贝尔定理

若幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k(z-b)^k$ 在某一点 z_0 收敛，则级数在以 b 为圆心，$|z_0-b|$ 为半径的圆内绝对收敛，并在

$$|z-b|\leqslant q|z_0-b|,\quad 0<q<1$$

的闭圆上一致收敛。这被称为**阿贝尔定理**。

3.2.3 收敛圆与收敛半径

阿贝尔定理表明，幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-b)^k$ 在某点收敛（发散），必在离中心 b 更近（远）的点收敛（发散）。因此，幂级数收敛与发散的区域是不会交替出现的，即必然存在一个圆，在圆内绝对收敛（并在更小的圆内一致收敛），在圆外发散。称这个圆为该幂级数的**收敛圆**，圆的半径 R 为该幂级数的**收敛半径**。

幂级数在收敛圆内解析且可任意多次逐项求导，并且可沿收敛圆内任意曲线逐项积分。可以证明，逐项求导或逐项积分不改变幂级数的收敛半径。

3.2.4 计算收敛半径

根式法：利用根式判别法可知

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k(z-b)^k|} = |z-b| \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = r$$

和 1 的大小关系决定了级数绝对收敛或发散，于是幂级数收敛半径为

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$

如果序列 $\sqrt[k]{|a_k|}$ 有多个聚点，则幂级数的收敛半径为

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

比值法：利用比较判别法可知

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}(z-b)^{k+1}}{a_k(z-b)^k} \right| = |z-b| \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = r$$

和 1 的大小关系决定了级数绝对收敛或发散，于是幂级数收敛半径为

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

奇点法：由幂函数在收敛圆内解析，可以推知幂级数中距中心 b 最近的奇点和中心的距离就是幂级数的收敛半径 R。

逐项微分/积分法：因为幂级数的收敛半径不随逐项求导或逐项积分改变，可以由此求得一些幂级数的收敛半径。

3.3 解析函数展开

3.3.1 泰勒展开

设函数 $f(z)$ 在圆域 $|z-b|<R$ 内解析，则 $f(z)$ 可在圆内任意点 z 展开为泰勒级数

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-b)^k$$

其中系数称为泰勒系数

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{k+1}} \mathrm{d}\xi = \frac{f^{(k)}(b)}{k!}$$

其中 C_R 是沿圆域内环绕圆心的任意闭合曲线。这个定理称为**泰勒定理**。

3.3.2 洛朗展开

设函数 $f(z)$ 在环域 $R_2<|z-b|<R_1$ 内解析，则 $f(z)$ 可在环内任意点 z 展开为洛朗级数

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-b)^k$$

展开系数称为洛朗系数

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{k+1}}\mathrm{d}\xi$$

C_ρ 是环域内环绕内圆的任一曲线。这称为**洛朗定理**。

3.3.3 展开方法

直接求系数：利用公式直接求系数；
换元法：在初等函数的泰勒级数/洛朗级数中通过换元得到待求级数；
级数的积/商：将一个函数分成两个幂级数的积或商，然后再展开为泰勒级数/洛朗级数；
收敛圆内逐项求导：将待展开函数写成另一个函数的导数，再将其展开后逐项求导；
收敛圆内逐项积分：同上；
待定系数：将函数求导后和原函数分别展开，利用原函数和导函数的关系列出方程求解待定系数；

3.4 零点和孤立奇点

3.4.1 解析函数零点

若函数 $f(z)$ 在 b 点解析，且 $f(b)=0$，则称 b 点是解析函数 $f(z)$ 的**零点**；设 $f(z)$ 在 b 点邻域的泰勒级数为

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-b)^k$$

若

$$a_0=a_1=\cdots=a_{m-1}=0,\quad a_m\neq 0$$

则称 b 为 $f(z)$ 的 **m 阶零点**，可以由此推知 $f(z)$ 在 b 点的 $m-1$ 阶导数都等于零。

若 $f(z)$ 在 b 的邻域解析且不恒为零，则 $f(z)$ 必在某一圆 $|z-b|<\rho$ 内，除 $z=b$ 外不存在其他零点，这称为解析函数零点的**孤立性**。

3.4.2 孤立与非孤立奇点

若函数 $f(z)$ 在 $z=b$ 不解析或没有定义，而在 $z=b$ 的去心邻域

$$0<|z-b|<R$$

内解析，则称 $z=b$ 为 $f(z)$ 的**孤立奇点**；若函数 $f(z)$ 在 $z=b$ 的任意小邻域内总有除 $z=b$ 以外的奇点，则 $z=b$ 是 $f(z)$ 的**非孤立奇点**。

3.4.3 孤立奇点的分类和性质

可去奇点：可去奇点指 $f(z)$ 在 b 处的极限为有限值，且在 $z=b$ 的去心邻域内洛朗展开不含负幂项；

极点（m **阶**）：$f(z)$ 在 b 处的极限为无穷，且在 $z=b$ 的去心邻域内洛朗展开含有有限个负幂项，其中最低负幂项为 $-m$ 次幂；

本性奇点：$f(z)$ 在 b 处的极限无定值，不同的点列 $\{z_k\}$ 趋于任给的有限值和无限值，且洛朗展开含有无限个负幂项。

3.4.4 无穷远点

若 $f(z)$ 在 ∞ 点的去心邻域 $R<|z|<\infty$ 内解析，则 ∞ 点是 $f(z)$ 的孤立奇点。为了研究无穷远点的性质，可以做变换

$$z=\frac{1}{t}$$

它将 z 平面内的环域 $R<|z|<\infty$ 映射为 t 平面内的环域 $0<|t|<\frac{1}{R}$，通过这种方式可以研究 $f(z)$ 在无穷远点的性质。值得注意的是，在无穷远点奇点的分类依据的是正幂项的有无（数量）而不是负幂项。

4 留数定理

4.1 留数定理

4.1.1 留数定理

若函数 $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 内除了有限个孤立奇点 b_k 外解析，则

$$\oint_{L_0} f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\sum_k \mathrm{Res}f(b_k)$$

式中 $\mathrm{Res}f(z)$ 称为 $f(z)$ 在 b_k 处的**留数**，它等于 $f(z)$ 在 b_k 去心邻域洛朗展开的洛朗系数 $a_{-1}^{(k)}$。这被称为**留数定理**。

4.1.2 无穷远点留数定理

若函数 $f(z)$ 在除 $z=b_k$ 和无穷远点 $z=\infty$ 外解析，则

$$\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}f(b_k)+\mathrm{Res}f(\infty)=0$$

式中 $\mathrm{Res}f(\infty)=-a_{-1}^{(\infty)}$ 成为函数 $f(z)$ 在无穷远点的留数。

4.1.3 计算留数方法

可去奇点：

$$\mathrm{Res}f(z)=0$$

m 阶奇点：

$$\mathrm{Res}f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to b}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-b)^m f(z)]$$

一阶奇点：除了 m 阶奇点的普遍公式外，若 $f(z)$ 能写成两个解析函数之商 $f(z)=\varphi(z)/\psi(z)$，且 $\varphi(b)\neq 0,\psi'(b)\neq 0$，则

$$\mathrm{Res}f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi'(b)}$$

本性奇点：直接求洛朗展开系数。

4.2 留数定理计算实变积分

4.2.1 几个引理

引理 1：若 $\lim\limits_{z\to\infty}zf(z)=0$，则

$$\lim_{z\to\infty}\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z=0$$

引理 2（若当引理）：若 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=0$，则

$$\lim_{z\to\infty}\int_{C_R}f(z)e^{imz}\mathrm{d}z=0,\quad m>0$$

引理 3：若 b 是 $f(z)$ 在实轴上的一阶极点，则

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r}f(z)\mathrm{d}z=-\pi i\mathrm{Res}f(b)$$

4.2.2 带三角函数积分

形如

$$\int\limits_0^{2\pi}f(\sin\theta,\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

的积分。可以通过做变换 $z=e^{i\theta}$，用复变量 z 表示被积表达式，易见

$$\cos\theta=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}),\quad \sin\theta=\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}),\quad \mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

接下来把原积分变成沿单位圆的回路积分，利用留数定理可知

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}f(\sin\theta,\cos\theta)\mathrm{d}\theta&=\oint_{|z|=1}f(\frac{1}{2}(z+z^{-1}),\frac{1}{2i}(z-z^{-1}))\frac{\mathrm{d}z}{iz}\\&=2\pi i\sum_k\mathrm{Res}\left[\frac{1}{iz}f(\frac{1}{2}(z+z^{-1}),\frac{1}{2i}(z-z^{-1})),b_k\right]\end{aligned}$$

这表明，积分等于 $2\pi i$ 乘函数 $\frac{1}{iz}f(\frac{1}{2}(z+z^{-1}),\frac{1}{2i}(z-z^{-1}))$，在单位圆内所有奇点处的留数之和。

4.2.3 实轴上无奇点的无穷反常积分

形如
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x$$
的主值积分，其中 $f(z)$ 在实轴没有奇点，在上半平面有有限个孤立奇点 b_k，且
$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$$
有时会改写辅助函数 $f(z)$。选取无穷大半圆周 C_R 作为积分回路，根据引理 1 有
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x &= \lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z\right]\\ &= \oint_L f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_k \mathrm{Res}f(b_k)\end{aligned}$$

4.2.4 含指数的无奇点无穷反常积分

形如
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{imx}\mathrm{d}x, \quad m>0$$
的积分，其中 $f(z)$ 在实轴没有奇点，在上半平面有有限个孤立奇点 b_k，且
$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$$
与上一种积分类似，根据引理 2 有
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{imx}\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_k \mathrm{Res}F(b_k), \quad F(z) = f(z)e^{imz}$$

4.2.5 实轴上有一阶极点的无穷积分

除了 $f(x)$ 在实轴上有一阶极点 b_s' 外与第二型积分特征相同。选取的积分回路是在轴上极点处增加一个无穷小半圆周，根据留数定理和引理 1、3，有
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_k \mathrm{Res}f(b_k) + \pi i\sum_s \mathrm{Res}f(b_s')$$

4.2.6 有一阶极点的含指数无穷积分

除了 $f(x)$ 在实轴上有一阶极点 b_s' 外与第三型积分特征相同。与上一种积分类似，可得
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{imx}\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_k \mathrm{Res}F(b_k) + \pi i\sum_s \mathrm{Res}F(b_s')$$

4.3 留数定理计算级数和

4.3.1 整数级数和

设函数 $f(z)$ 除了有限个非整数极点 b_k 外在全平面解析，且 $|z|$ 充分大时，有 $|f(z)| \leqslant \frac{M}{|z|^a}$，其中 M 和 a 为常数，且 $a > 1$，则

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\sum_{k} \text{Res}[\pi\cot(\pi z)f(z), b_k]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = -\sum_{k} \text{Res}[\pi\csc(\pi z)f(z), b_k]$$

在这个证明过程中需要注意到，根据一阶奇点的性质可得

$$\sum_{n=-N}^{N} \text{Res}[\pi\cot(\pi n)f(n)] = \sum_{n=-N}^{N} f(n)$$

4.3.2 半整数级数和

设函数 $f(z)$ 除了有限个非半整数极点 b_k 外在全平面解析，且 $|z|$ 充分大时，有 $|f(z)| \leqslant \frac{M}{|z|^a}$，其中 M 和 a 为常数，且 $a > 1$，则

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n+\frac{1}{2}) = \sum_{k} \text{Res}[\pi\tan(\pi z)f(z), b_k]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n+\frac{1}{2}) = \sum_{k} \text{Res}[\pi\sec(\pi z)f(z), b_k]$$

证明方法和整数级数类似。

5 解析延拓

5.1 解析延拓与 Γ 函数

5.1.1 解析延拓

若函数 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 分别在 D_1 和 D_2 内解析，且在 D_1 和 D_2 重叠的区域内有 $f_1(z) = f_2(z)$，则称 $f_2(z)$ 为 $f_1(z)$ 在 D_2 中的**解析延拓**，同时也称 $f_1(z)$ 为 $f_2(z)$ 在 D_1 中的**解析延拓**。将这两个解析元素分别记为 $\{D_1, f_1(z)\}$ 和 $\{D_2, f_2(z)\}$。

5.1.2 用泰勒级数解析延拓

对于 $\{D_1, f_1(z)\}$，首先在 D_1 内任取一点 b_1，将 $f_1(z)$ 在 b_1 附近展开为泰勒级数

$$f_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f_1^{(k)}(b_1)(z-b_1)^k$$

通过求导可以算出 $f_1^{(k)}(z)$，于是可以求得 $f_2(z)$，它与 $f_1(z)$ 有不同的定义域，记为 D_2，而在 D_1 和 D_2 重叠的地方有 $f_1(z) = f_2(z)$，于是 $f_2(z)$ 是 $f_1(z)$ 的解析延拓，再重复以上过程，可以得到 $\{D_3, f_3(z)\}$

等等。一个解析元素 $\{D_1, f_1(z)\}$ 的全部解析延拓的集合称为 $f_1(z)$ 产生的**完全解析函数** $F(z)$，其定义域是全部解析元素给出定义域的总和，即

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1 \\ f_2(z), & z \in D_2 \\ \cdots \end{cases}$$

值得注意的是，并非所有函数都能解析延拓。

5.1.3 Γ 函数

在复变函数中的 Γ 函数是实变函数中的简单推广

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t, \quad \mathfrak{Re} z > 0$$

其递推公式为

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

Γ 函数构成一个解析元素 $\{\mathfrak{Re} z > 0, \Gamma(z)\}$，现通过解析延拓得到第二个解析元素

$$f_2(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{1}{z} \int_0^\infty t^z e^{-t} \mathrm{d}t$$

其定义域为 D_2，即 $\mathfrak{Re} z > -1, z \neq 0$，可以证明 $f_2(z)$ 是 $f_1(z)$ 的解析延拓，以此类推可以得到完全解析函数

$$F(z) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t, & \mathfrak{Re} z > 0 \\ \dfrac{\Gamma(z+1)}{z}, & \mathfrak{Re} z > -1, z \neq 0 \\ \dfrac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)}, & \mathfrak{Re} z > -2, z \neq 0, -1 \\ \cdots \end{cases}$$

5.2 多值函数和黎曼面

5.2.1 支点

当 z 连续变化时，在复平面可以用一条曲线来描述，对于每一个特定的多值函数，都存在一些特殊的点，当 z 绕着该点转一圈回到原处时，$w(z)$ 的值将由一个单值分支变到另一个单值分支，这些特殊的点称为**支点**。例如，$z = 0$ 和 $z = \infty$ 都是 $w(z) = \sqrt{z}$ 的支点。

5.2.2 割线

为了将各个单值分支分开，可以在支点之间作割线，并规定 z 在连续变化的过程中不能跨越割线，同时规定割线上岸 z 的辐角值，即可确定一个单值分支。要想确定一个点的函数值，除了作割线并给定割线上岸的辐角值或某一点的函数值来确定单值分支，还可以给定出发点 z_0 的函数值 $w(z_0)$ 以及由 z_0 到 z 点的路径，以确定 $w(z)$。

5.2.3 黎曼面

多值函数 $w(z)$ 中 z 平面上一个点对于 w 平面的多个点，如果把这几叶 z 平面看成是不相重合的，将它们沿割线剪开，并且上下岸交替粘合在一起，这种由多叶组成的 z 平面就称为 $w(z)$ 的黎曼面，当 z 在黎曼面上变化时，每一叶上的 z 对应于不同的 w，于是 $w(z)$ 就成为一个单值函数了。不过值得注意的是，支点依然是函数的奇点。