线性代数笔记

臧亦驰

2021 年 12 月 3 日

目录

1 行列式

1.1 定义

1.1.1 递归定义

对于一个行列式D，去掉第m行和第n列后剩下的元素按顺序组成的低一阶行列式M_{mn}称作a_{mn}的**余子式**，称$A_{mn} = (-1)^{m+n} M_{mn}$为$a_{mn}$的**代数余子式**

定义一阶行列式的值为

$$|a_{11}| = a_{11}$$

n阶行列式的值为

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} A_{1i}$$

1.1.2 一般定义

对于将序列$1, 2, \cdots, n$次序交换k次得到的排列$k_1, k_2, \cdot, k_n$，称k为它的**逆序数**。定义一个n阶行列式的值为

$$D = \sum \{(-1)^k \prod_{i=1}^{n} a_{ik_i}\}$$

1.2 性质

1.2.1 对角线

行列式中，行列下标相同的元素组成的对角线称为**主对角线**，另一条对角线称为**副对角线**。

主对角线以下（上）所有元素为零的行列式称为**上（下）三角行列式**，三角行列式的值为主对角线上元素的乘积。特别地，除了主对角线上元素外其他元素都为零的行列式称为**主对角行列式**。

1.2.2 行和列

对于一个行列式D，将它的行和列互换得到的行列式称为D的**转置行列式**，记为D^T。行列式和它的转置相等。

对于一个行列式，交换它的两行（列），行列式变号；

如果行列式的两行（列）的元素对应成比例，则行列式为零；

用数k乘行列式的某一行（列），得到的行列式是原来的k倍；

把行列式的某一行（列）乘一个系数后加到另一行（列）上，行列式的值不变；

1.2.3 反对称行列式

若一个行列式的元素满足$a_{ij} = -a_{ji}$，则称其为**反对称行列式**。奇数阶反对称行列式的值为零。

1.2.4 行列式展开

根据行列式的性质，一个行列式也可以写成其任意一行（列）的元素与其代数余子式乘积的和，即

$$D=\sum_{i=1}^{n}a_{ji}A_{ji}=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}A_{ik}$$

同时有

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=0,\quad i\neq j$$

1.2.5 克拉默法则

对于n元线性方程组

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ji}x_i=b_j,\quad j=1,2,\cdots,n$$

称其系数a_{mn}构成的行列式为**系数行列式**，记为D。将D中的第j列中所有元素对应替换为$b_1,b_2,\cdots,b_n$，得到的行列式记为D_j。

如果线性方程组的系数行列式不为零，则有唯一解

$$x_j=\frac{D_j}{D}$$

2 矩阵基础

2.1 基础

2.1.1 定义

m行n列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为$m\times n$**矩阵**。

2.1.2 特殊矩阵

所有元素均为零的矩阵称为**零矩阵**，记为$\boldsymbol{O}$；

对角线元素为1其他元素为0的n阶方矩阵称为**单位矩阵**，记为$\boldsymbol{I}$。对角线元素为某一常数其他元素为零的矩阵称为**数量矩阵**。

2.2 运算

2.2.1 加法

同型矩阵之间，对应元素直接相加，方矩阵与数字之间相加，相当于方矩阵与对应数量矩阵相加。加法满足交换律、结合律。

2.2.2 数乘

矩阵乘一个数等于其所有元素均乘同一个数。数乘满足交换律、结合律、分配律。

2.2.3 矩阵乘法

一个$m\times s$的矩阵$\boldsymbol{A}$和一个$s\times n$的矩阵$\boldsymbol{B}$相乘得到一个$m\times n$的矩阵$\boldsymbol{C}$。其运算规则为

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

即乘积矩阵的第i行j列的元素等于$\boldsymbol{A}$的第i行与$\boldsymbol{B}$的第j列点乘的结果。只有左边矩阵的列数等于右边矩阵的行数时两个矩阵才能相乘，矩阵乘法不满足交换律和消去律，但满足结合律。

2.2.4 转置

将矩阵的行和列互换得到的矩阵称为原矩阵的**转置**，记矩阵$\boldsymbol{A}$的转置为$\boldsymbol{A}^T$。矩阵的转置满足$(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$。

若对于n阶方矩阵$\boldsymbol{A}$，有$\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$，则称矩阵$\boldsymbol{A}$为**对称矩阵**；若$\boldsymbol{A}^T=-\boldsymbol{A}$，则称矩阵$\boldsymbol{A}$为**反对称矩阵**。则对于任意矩阵$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{AA}^T,\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$都是对称矩阵；若$\boldsymbol{A}$是$n$阶对称矩阵，$\boldsymbol{B}$是$n$阶反对称矩阵，则$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}$是$n$阶反对称矩阵。

2.2.5 幂

对于方阵$\boldsymbol{A}$，k个$\boldsymbol{A}$的乘积称为$\boldsymbol{A}$**的**k**次幂**，记为$\boldsymbol{A}^k$。如果存在正整数m，使得$\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{O}$，则称矩阵$\boldsymbol{A}$为**幂零矩阵**。

2.2.6 行列式

方阵的行列式满足：

$$\begin{cases}|\boldsymbol{A}^T|=|\boldsymbol{A}|\\|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|\\|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{BA}|\end{cases}$$

2.3 逆

2.3.1 定义

对于一个方矩阵$\boldsymbol{A}$，如果存在$\boldsymbol{B}$满足

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$$

则称矩阵$\boldsymbol{B}$为矩阵$\boldsymbol{A}$的**逆矩阵**，记为$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$。逆矩阵是唯一的。

2.3.2 性质

逆矩阵满足以下性质

$$\begin{cases} (\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A} \\ (k\boldsymbol{A})^{-1} = \dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1} \\ (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} \\ (\boldsymbol{A}^{T})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{T} \\ |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{-1}| = 1 \end{cases}$$

2.3.3 伴随矩阵

设$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$，定义以下矩阵

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

为$\boldsymbol{A}$的**伴随矩阵**，即$\boldsymbol{A}^* = (A_{ji})_{n\times n}$。其中$A_{ij}$为$|\boldsymbol{A}|$中$a_{ij}$的代数余子式。可以得到

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$$

2.3.4 可逆性

矩阵$\boldsymbol{A}$可逆的充要条件是$|\boldsymbol{A}| \neq 0$，它的逆矩阵为

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$$

当$|\boldsymbol{A}| = 0$时，矩阵$\boldsymbol{A}$称为**奇异矩阵**。

2.4 初等变换

2.4.1 定义

下列三种变换称作矩阵的**初等变换**：

交换矩阵的两行（列）；

用非零数k乘矩阵的某一行（列）；

把某一行（列）的k倍加到另一行（列）上。

若矩阵$\boldsymbol{A}$经过有限次初等变换得到矩阵$\boldsymbol{B}$，则称这两个矩阵**等价**，记为$\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$或$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$。任意一个矩阵都可以通过有限次变换化为以下标准形矩阵

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$$

任意一个可逆矩阵都可以通过有限次变换化为单位矩阵。

2.4.2 初等矩阵

对单位矩阵施以一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵**，三种初等变换对应三种初等矩阵：
交换两行（列）：

$$I(i,j)_{pq}=\begin{cases}\delta_{pq}, & p\neq i,j\\ \delta_{pj}, & p=i\\ \delta_{pi}, & p=j\end{cases}$$

将其中一行（列）乘非零数k：

$$I(i(k))_{pq}=\begin{cases}\delta_{pq}, & p\neq i\\ k\delta_{pq}, & p=i\end{cases}$$

将其中一行（列）乘k加到另一行（列）：

$$I(ij(k))_{pq}=\begin{cases}\delta_{pq}, & p\neq i\\ \delta_{pq}+k\delta_{pj}, & p=i\end{cases}$$

用初等矩阵左乘/右乘一个矩阵，就相当于对它的行/列做初等变换。

2.4.3 初等变换求矩阵的逆

矩阵$\boldsymbol{A}$可逆的充要条件是$\boldsymbol{A}$可以表示成若干初等矩阵乘积。可以证明，若对矩阵$\boldsymbol{A}$做一系列初等变换得到单位矩阵$\boldsymbol{I}$，则对单位矩阵做相同初等变换就可以得到$\boldsymbol{A}$的逆矩阵$\boldsymbol{A}^{-1}$。

由此可知，对矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{I})$做初等行变换，即可以得到$(\boldsymbol{I},\boldsymbol{A}^{-1})$；对矩阵$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{I}\end{pmatrix}$做初等行变换，即可以得到$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{A}^{-1}\end{pmatrix}$

2.5 分块矩阵

2.5.1 定义

把一个矩阵分成许多小块，每个小块都是一个矩阵，称为**子矩阵**。

2.5.2 运算

分块矩阵的加法、数乘和乘法都与普通矩阵类似。

2.5.3 分块矩阵求逆

对于方矩阵的分块，如果只有主对角线上有非零小方矩阵，则称其为**分块对角阵**。分块对角阵的行列式等于各小矩阵行列式之积，分块对角阵的逆等于各小矩阵的逆组成的新矩阵。

若矩阵$\boldsymbol{A}$可按以下方式分块

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}$$

且$\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$可逆，则矩阵$\boldsymbol{A}$可逆，且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^{-1} & -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}^{-1}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{-1}\end{pmatrix}$$

若矩阵$\boldsymbol{A}$可按以下方式分块

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}$$

且$\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$可逆，则矩阵$\boldsymbol{A}$可逆，且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{C}^{-1}\end{pmatrix}$$

2.6 矩阵的秩

2.6.1 定义

在一个$m\times n$的矩阵$\boldsymbol{A}$中任取k行k列，他们相交处的元素构成一个k阶行列式称为矩阵$\boldsymbol{A}$的k**阶子式**。矩阵中最高阶非零子式的阶数称作矩阵的**秩**。记为$r(\boldsymbol{A})=k$。零矩阵的秩为零。当矩阵的秩满足$r(\boldsymbol{A})=\min\{m,n\}$时，称其为**满秩矩阵**，否则称之为**降秩矩阵**。显然，可逆矩阵都是满秩的。

2.6.2 秩的求法

初等矩阵变换不改变矩阵的秩。若将一个矩阵化为标准形

$$\boldsymbol{A}\cong\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$$

那么$r(\boldsymbol{A})=r$。

2.6.3 秩的性质

$$\begin{cases}\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}\leqslant r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\\ r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\\ r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\leqslant\min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}\\ \boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times l}=\boldsymbol{O}\Rightarrow r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n\\ r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\end{cases}$$

3 矩阵进一步

3.1 特征向量特征值

3.1.1 定义

设$\boldsymbol{A}$是一个方矩阵，如果存在数λ和非零向量$\boldsymbol{x}$，使

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

则称数λ为矩阵$\boldsymbol{A}$的**特征值**，向量$\boldsymbol{x}$为对应于特征值λ的**特征向量**。通过对方程变换可以得到

$$(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

方阵的特征值可以通过解这个方程求得。

3.1.2 求特征值

矩阵$\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$称为矩阵$\boldsymbol{A}$的**特征矩阵**，它的行列式称为矩阵$\boldsymbol{A}$的**特征行列式**。通过解方程

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$$

即可以求出矩阵的特征值。这个方程称为矩阵的**特征方程**。

3.1.3 性质

矩阵的特征值具有以下性质

$$\begin{cases} \sum \lambda_i = \sum a_{ii} \\ |\boldsymbol{A}| = \prod \lambda_i \end{cases}$$

并且有：矩阵和它的转置特征值相同；$k\lambda$是$k\boldsymbol{A}$的特征值；λ^m是$\boldsymbol{A}^m$的特征值；λ^{-1}是$\boldsymbol{A}^{-1}$的特征值，且以上情况特征向量均不变。

对于特征向量，不同特征值对应的特征向量线性无关，而同一个特征值对应的特征向量的线性组合也是这个特征值对应的特征向量。

3.2 相似矩阵

3.2.1 定义

对于两个n阶方阵$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$，如果存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$$

则称矩阵$\boldsymbol{A}$**相似**于矩阵$\boldsymbol{B}$，记为$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$。可逆矩阵$\boldsymbol{P}$称为**相似变换矩阵**。

相似变换是一种特殊的初等变换。相似矩阵具有相同的特征值、秩和行列式。

3.2.2 对角化

若n阶矩阵$\boldsymbol{A}$有n个不相等的特征值λ_i，则$\boldsymbol{A}$与对角矩阵

$$\boldsymbol{\Lambda} = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \cdot, \lambda_n\}$$

相似。矩阵可对角化的充要条件是每个特征值的线性无关特征向量个数等于特征值的重数。此时将矩阵对角化为$\boldsymbol{\Lambda} = diag\{\lambda_i\}$的相似变换矩阵就是那$n$个线性无关的特征向量构成的矩阵。

3.3 正交矩阵

3.3.1 向量内积

对于两个n维列向量$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$，定义$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}$为这两个向量的**内积**，记为

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta} = \sum_i \alpha_i \beta_i$$

当$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$是行向量时，内积表示为$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$。

称数$\sqrt{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})}$为向量$\boldsymbol{\alpha}$的**范数**或**长度**，记为$\|\boldsymbol{\alpha}\|$。如果$\|\boldsymbol{\alpha}\| = 1$，则$\boldsymbol{\alpha}$称为**单位向量**。

3.3.2 向量正交

如果$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0$，则称向量$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$**正交**。若$n$维非零向量组中向量两两正交，则称这个向量组为**正交向量组**，如果里面所有向量都是单位向量，则称为**规范正交向量组**。正交向量组都是线性无关的。

对于向量组$\boldsymbol{\alpha}_i$，可以按照如下方式构造向量组$\boldsymbol{\beta}_i$，使其为正交向量组，且可以由$\boldsymbol{\alpha}_i$线性表示

$$\boldsymbol{\beta}_s = \alpha_s - \sum_{i=1}^{s-1} \frac{(\boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_i)}{(\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i)} \boldsymbol{\beta}_i$$

这种正交化的过程称为**施密特正交化过程**。

3.3.3 正交矩阵

如果矩阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^T$，即$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{I}$，则称其为**正交矩阵**。矩阵正交的充要条件是矩阵的列（行）向量组是正交向量组。

正交矩阵的行列式为± 1。

3.3.4 实对称矩阵

矩阵元素均为实数的对称矩阵称为**实对称矩阵**，n阶实对称矩阵有n个特征值，且不同特征值对应的特征向量正交。对于实对称矩阵$\boldsymbol{A}$，存在正交矩阵$\boldsymbol{T}$，使得$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$。求解$\boldsymbol{T}$只需要将$\boldsymbol{A}$的特征向量组正交化后再组成矩阵。