变分法笔记

臧亦驰

2021 年 10 月 10 日

目录

1 预备知识

1.1 泰勒公式

1.1.1 一元函数

若函数$f(x)$在x_0的某个开区间内$n+1$阶可导，则对于区间内的一个$x_0+\Delta x$，有

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}f^{(i)}(x_0)\Delta x^i+R_n$$

其中

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\Delta x^{n+1}$$

式中ξ为介于x和x_0之间的某个值。R_n称为**拉格朗日型余项**，当$x\to x_0$时，它是一个比$|\Delta x|$高n阶的无穷小。

1.1.2 多元函数

若m元函数$f(x^k)$在(x_0^k)附近$n+1$阶可导，则对于该邻域内任意一点$(x_0^k+\Delta x^k)$，$k=1,2,\cdots,m$，有

$$f(x^k)=\sum_{i=0}^{n}[\frac{1}{i!}(\sum_{j=1}^{m}\Delta x^j\frac{\partial}{\partial x^j})^i f(x_0^k)]+R_n$$

其中

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}(\sum\Delta x^i\frac{\partial}{\partial x^i})^{n+1}f(x_0^k+\theta\Delta x^k)$$

式中θ为0到1之间的某个值。当$\rho=\sqrt{\sum(\Delta x^i)^2}\to 0$时，$R_n$是一个比$\rho$高$n$阶的无穷小。当$m=1$时即可得到一元函数的泰勒公式。

1.2 含参变量积分

1.2.1 含参变量积分

设函数$f(x,y)$是矩形域$D[a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant y\leqslant d]$上的有界函数，有如下函数

$$\varphi(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

称这个积分为**含参变量积分**。

1.2.2 积分顺序可交换性

如下

$$\int_c^d\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

1.2.3 积分求导可交换性

如下

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\mathrm{d}x$$

1.2.4 莱布尼茨公式

作为上式的一般形式，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f_y(x,y)\mathrm{d}x + f(\beta(y),y)\beta' y - f(\alpha(y),y)\alpha' y$$

可以理解为，曲线下方的面积变化既包括曲线本身的变化，同时也包括上下限的变化。

1.3 常用不等式

1.3.1 杨氏不等式

若p和q都是实数，且$p > 1$，并且满足

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

则称这两个实数为**共轭指数**或**相伴数**。设p和q为共轭指数，$a, b \geqslant 0$，则下列不等式成立

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

这称为**杨氏不等式**。

1.3.2 赫尔德不等式

设p和q为共轭指数，$x_k, y_k \in C$，则下列不等式成立

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leqslant (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q)^{\frac{1}{q}}$$

这称为**赫尔德不等式**。

1.3.3 柯西不等式

设$x_k, y_k \in R$，则下列不等式成立

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \leqslant (\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2)^{\frac{1}{2}}$$

这称为**柯西不等式**。

1.3.4 闵可夫斯基不等式

设$p \geqslant 1$，$x_k, y_k \in C$，且$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p < \infty$，则有下列不等式成立

$$(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p)^{\frac{1}{p}}$$

这称为**闵可夫斯基不等式**。

2 固定边界变分问题

2.1 基本概念

2.1.1 泛函

函数的集合称为**函数类**，将某一函数类$F=\{y(x)\}$中的每一个函数与一个实数对应称之为函数$y(x)$的**泛函**，记为$L=L[y(x)]$或$J=J[y(\cdot)]$，函数$y(x)$称为泛函的**宗量**。

若k为任意常数，$J[ky(x)]=k^nJ[y(x)]$，则$J[y(x)]$称为n**次齐次泛函**。

一般地，泛函的宗量可以是m个独立变化的n元函数，此时泛函记为

$$J=J[u_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),u_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,u_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)]$$

2.1.2 距离与邻域

设函数$y(x),y_0(x)$在区间I上有连续的n阶导数，则定义

$$d_n[y,y_0]=\max_{0\leqslant i\leqslant n}\max_{x\in I}|y^{(i)}(x)-y_0^{(i)}(x)|$$

为这两个函数在这一区间上的n**阶距离**。

2.2 最简泛函的变分

2.2.1 最简泛函

现有函数$y=y(x)$，泛函

$$J[y(x)]=\int_a^b F(y,y',x)\mathrm{d}x$$

称作最简单的积分型泛函，简称**最简泛函**。被积函数F称为**泛函的核**或**拉格朗日函数**。

2.2.2 次数与线性

若连续泛函$J[y(x)]$满足以下几个条件

$$(1)J[y_1(x)+y_2(x)]=J[y_1(x)]+J[y_2(x)]$$
$$(2)J[\lambda y(x)]=\lambda J[y(x)]$$

则称$J[y(x)]$为关于$y(x)$的**线性泛函**。若连续泛函$J[u,v]$满足以下条件

$$(1)J[u,v]=J[v,u]$$
$$(2)J[a_1u_1+a_2u_2,v]=a_1J[u_1,v]+a_2J[u_2,v]$$
$$(3)J[u,b_1v_1+b_2v_2]=b_1J[u,v_1]+b_2J[u,v_2]$$

则称$J[u,v]$为关于u和v的**对称双线性泛函**。若只满足后两个条件，则称为**双线性泛函**。双线性泛函中若令$u=v$，则称$J[u,u]$为**二次泛函**。

2.2.3 变分