数理方法笔记

臧亦驰

目录

1 复变函数

1.1 基本概念

1.1.1 复变函数

以复数作为自变量和因变量的函数称为复变函数

$$w = f(z)$$

若令 $w = u + iv$，则复变函数可以写成两个二元实函数的有序组合

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

复变函数可以是单值函数，也可以是多值函数。

1.1.2 导数与微分

对于单值函数 $w = f(z)$，定义它在 z 点的导数为

$$f'(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f(z) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

与实函数类似可以定义微分。

复变函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 可导的充要条件是 u, v 在该点处

1. 可微
2. 满足柯西-黎曼条件 (简称 C-R 条件)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

在极坐标下函数 $f(r, \theta) = \rho e^{i\varphi}$ 的 C-R 条件可以写为

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\rho}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial r}$$

可以证明，C-R 的充要条件是当把复变函数写成 $w = f(z, z^*)$ 的形式时

$$\left(\frac{\partial w}{\partial z^*} \right)_z = 0$$

函数不可导的点称为奇点。

1.1.3 解析性

若函数 $f(z)$ 在 z_0 的邻域内处处可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 处解析。若函数在区域内所有点解析，则称函数在这个区域上解析。

- 解析函数的虚部和实部之间通过 C-R 条件相联系，称为解析函数的共轭性;
- 解析函数的虚部和实部都满足二维拉普拉斯方程，这称为解析函数的调和性;
- 经过解析函数映射后两条曲线之间的夹角保持不变，称为解析函数的保角性。

1.1.4 多值函数

对于每一个多值函数，都存在一些特定的点，当 z 绕着这些点旋转一周后回到原处，函数值由一个单值分支变到另一个单值分支，这些特殊的点称为支点。若函数在旋转 n 圈后回到原来函数值，则称这个支点为 $n-1$ 阶支点。

设想每个单值分支都定义在一个不同的 z 平面上，再将这些平面沿着几条割线剪开后相互粘连，使得 z 的连续变化对应于函数值的连续变化，这样形成的结构称为黎曼面。原本的多值结构成为了定义在黎曼面上的单值结构。

多值函数的支点一定是奇点。

1.2 复变积分

1.2.1 定义

对于复平面上的一条曲线 L，可以定义复变函数 $f(z)$ 沿曲线的积分

$$\int_L f(z)\mathrm{d}z = \lim_{\max|\Delta z|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$$

它可以化为两个实变线积分计算。

1.2.2 柯西定理与原函数

若 $f(z)$ 在单通区域 D 上解析，则 $f(z)$ 沿区域内任意闭合曲线积分为 0

$$\oint_{i\in D} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

对于复通区间则有 $f(z)$ 沿所有边界线正方向回路积分之和为 0。其中正方向指沿环路积分时区域保持在左侧。

由柯西定理我们知道，在单通的解析区域内积分 $\displaystyle\int_l f(z)\mathrm{d}z$ 与路径选择无关，于是可以与实函数类似地定义原函数

$$g(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z$$

且牛顿莱布尼茨公式成立。

1.2.3 柯西公式

对于区域 D 内部一点 a，有

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z$$

其中积分回路 L 分别对应于该区域 (可能是单通、复通或无界) 的所有边界。其中无界区域柯西公式需要满足

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$$

当以上极限为有限值 A 时，无界区域的柯西公式可以拓展如下

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = \begin{cases} f(a)-A, & a\text{在回路外} \\ -A, & a\text{在回路内} \end{cases}$$

柯西公式表明解析函数区域内函数值可以完全由边界决定。

柯西公式的一个重要推论是高阶导数的柯西公式

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\mathrm{d}\xi$$

这说明解析函数的任意阶导数存在。

柯西公式的另一个重要推论是刘维尔定理，它表明复变函数不可能在包含无穷远点的全平面解析，除非它是一个常函数。

1.3 级数展开

1.3.1 幂级数

形如

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-b)^k = a_0 + a_1(z-b) + \cdots$$

的无穷级数称为幂级数。根据阿贝尔定理，对于任意幂级数都存在一个圆，在园内级数绝对收敛而圆外发散，这个圆称为收敛圆。对幂级数的逐项求导或积分不改变收敛半径。

通过根式判别和比值判别法可以得到以下两种求级数收敛半径的方法

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{a_k}} = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$$

1.3.2 泰勒展开

在圆域 $|z-b| < R$ 内解析的函数 $f(z)$ 可以在园内任意一点展开为泰勒级数

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-b)^k$$

其中系数称为泰勒系数

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - b)^{k+1}}\mathrm{d}\xi = \frac{f^{(k)}(b)}{k!}$$

1.3.3 洛朗展开

在环域 $R_1 < |z-b| < R_2$ 内解析的函数 $f(z)$ 可以在环域内任意一点展开为洛朗级数

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-b)^k$$

其中系数称为洛朗系数

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - b)^{k+1}}\mathrm{d}\xi$$

积分回路为环域内任意绕小圆的曲线。

1.3.4 零点与孤立奇点

解析函数值为 0 的点称为解析函数的零点。若零点邻域的泰勒展开系数中最小的非零项系数为 a_m，则称这个零点为 m 阶零点。非常值的解析函数的零点具有孤立性。

解析函数的孤立奇点指在其邻域内函数解析的奇点。依据解析函数在孤立奇点 b 邻域的洛朗展开系数可以将其分为

可去奇点 $f(z)$ 在 b 处的极限存在且为有限值，且在 $z=b$ 的去心邻域内洛朗展开不含负幂次项；

m **阶奇点** $f(z)$ 在 b 处的极限为无穷，且在 $z=b$ 的去心邻域内洛朗展开含有有限个负幂次项，最低为 $-m$ 阶，也称为 m 阶极点；

本性奇点 $f(z)$ 在 b 处的极限无定值，且在 $z=b$ 的去心邻域内洛朗展开含有无穷多负幂次项。

1.4 留数定理

1.4.1 留数定理

若函数在区域 D 内只有有限个孤立奇点 b_k，则

$$\oint_L f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_k \mathrm{Res} f(b_k)$$

积分回路为区域边界。式中 $\mathrm{Res} f(b_k)$ 称为函数在 b_k 点的留数，它等于函数在 b_k 去心邻域内洛朗展开系数 $a_{-1}^{(k)}$。

若函数在全平面上除了有限个孤立奇点以及无穷远点外解析，则有

$$\sum_k \mathrm{Res} f(b_k) + \mathrm{Res} f(\infty) = 0$$

1.4.2 计算留数的方法

可去奇点

$$\mathrm{Res} f(b) = 0$$

m **阶极点**

$$\mathrm{Res} f(b) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to b} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}^{m-1} [(z-b)^m f(z)] \right)$$

1 阶极点 若 $f(z)$ 能写成两个解析函数之商 $f(z)=\varphi(z)/\psi(z)$，且 $\varphi(b)\psi'(b)\neq 0$，则

$$\mathrm{Res} f(b) = \frac{\varphi(b)}{\psi'(b)}$$

本性奇点 直接求洛朗展开系数。

1.4.3 留数定理计算实积分

首先介绍几个引理

- 若 $\lim_{z\to\infty} zf(z)=0$，则对上半圆周积分

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z=0$$

- 若 $\lim_{z\to\infty} f(z)=0$，则对上半圆周积分

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)e^{imz}\mathrm{d}z=0,\quad m>0$$

- 若 b 是实轴上的一阶极点，则在 b 附近上半圆周积分

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)\mathrm{d}z=-\pi i\mathrm{Res}f(b)$$

由这些引理出发，通过取无穷大上半圆作为积分回路可以计算许多实无穷积分。

除此之外还有一类可以用留数定理计算的积分

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

可以做变量代换 $z=e^{i\theta}$，此时原积分化为

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta=\oint_{|z|=1} f\left(\frac{1}{2}(z+z^{-1}),\frac{1}{2i}(z-z^{-1})\right)\frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

进而可以用留数定理计算。

1.5 傅里叶变换与拉普拉斯变换

1.5.1 傅里叶级数

周期函数如果满足满足狄利克雷条件：在 $[-T/2,T/2]$ 上有有限个第一类间断点且有有限个单调区间，则可以写成如下傅里叶级数

$$f(t)=a_0+\sum_n\left(a_n\cos\frac{2n\pi t}{T}+b_n\sin\frac{2n\pi t}{T}\right)$$

可以证明这是一组完备正交函数族。其中系数为

$$\begin{cases} a_0=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\mathrm{d}t \\ a_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\frac{2n\pi t}{T}\mathrm{d}t \\ b_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\frac{2n\pi t}{T}\mathrm{d}t \end{cases}$$

记 $\omega_0 = 2\pi/T$，则傅里叶级数可以写成

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-in\omega_0 t}$$

其中系数为

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{in\omega_0 t} \mathrm{d}t$$

1.5.2 傅里叶变换

对于非周期函数，若其满足分段光滑且至多只有第一类间断点，并且 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t$ 存在，则我们可以对其做傅里叶变换。

$$\begin{cases} f(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} \mathrm{d}\omega \\ F(\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} \mathrm{d}t \end{cases}$$

有时也会用 (x, k) 分别表示原函数和像函数的自变量，在这种情况下取相反的正负号。

傅里叶变换的像函数有如下几条性质

- 线性可加性
$$\mathcal{F}\left[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right] = c_1 \mathcal{F}\left[f_1(t)\right] + c_2 \mathcal{F}\left[f_2(t)\right]$$
- 平移与相似
$$\mathcal{F}\left[f(at)\right] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$
$$\mathcal{F}\left[f(t - t_0)\right] = e^{i\omega t_0} F(\omega)$$
- 若对于 $m = 0, 1, \cdots n-1$，有 $f^{(m)}(t)|_{t\to\infty} = 0$，则
$$\mathcal{F}\left[f^{(n)}(t)\right] = (-i\omega)^n F(\omega)$$
- 若 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 0$，则
$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right] = \frac{1}{i\omega} F(\omega)$$
- 原函数的乘积对应像函数的卷积
$$\mathcal{F}\left[f_1(t) f_2(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\eta) F_2(\omega - \eta) \mathrm{d}\eta$$

1.5.3 δ 函数

为了使得不绝对可积的常函数、正余弦函数可以进行傅里叶变换，引入 δ 函数。它满足如下性质

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}, \quad \int_a^b \delta(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & 0 \notin (a, b) \\ 1, & 0 \in (a, b) \end{cases}$$

δ 函数是一种广义函数，它的意义在积分中体现。

对于连续函数，可以用 δ 函数取出它在某点处的导数值 (函数值)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta^{(n)}(x)\mathrm{d}x = (-1)^n f^{(n)}(0)$$

除此之外，δ 函数的性质包括

- δ 函数是偶函数，导函数是奇函数；
- δ 函数的积分是阶跃函数

$$H(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(\eta)\mathrm{d}\eta = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

- δ 函数和普通函数卷积得到函数本身 $f(x) * \delta(x) = f(x)$；
- δ 函数可写成某些函数序列的极限；
- δ 函数的傅里叶变换是常函数

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)e^{-i\omega x} = \frac{1}{2\pi}, \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x}\mathrm{d}\omega$$

由此可以写出如三角函数，阶跃函数，整幂次函数等不满足绝对可积的函数的傅里叶变换。

1.5.4 拉普拉斯变换

为了使傅里叶变换适用更广泛的条件，考虑一个从 $t = 0$ 时刻出现的物理量，即 $f(t) = 0, t < 0$。在它上面乘一个指数衰减因子使得积分收敛，我们可以类似地得到变换

$$F(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$$

其中 $p = \sigma + i\omega$ 是实部大于零的复数。这称为拉普拉斯变换，其逆变换为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(p)e^{pt}\mathrm{d}p$$

拉普拉斯变换的适用条件是函数在 $t \geqslant 0$ 上至多只有有限个第一类间断点，且存在常数 $M > 0$ 和 $\sigma \geqslant 0$，使得

$$\forall t \geqslant 0,\ |f(t)| < Me^{\sigma t}$$

其中 σ 的下界用 σ_0 表示，可以证明拉普拉斯变换的像函数是在 $\mathrm{Re}p = \sigma > \sigma_0$ 的半平面上的解析函数。

拉普拉斯变换的其他性质与傅里叶变换基本一致，除了注意到

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right] = \frac{1}{p}\mathcal{L}\left[f(t)\right] - f(0)$$

1.5.5 反演问题

由像函数求原函数的问题称为反演问题。之前给出的逆变换积分公式称为黎曼梅林反演公式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(p)e^{pt}\mathrm{d}p$$

在此基础上可以得到拉普拉斯变换的展开定理：对于单值的像函数 $F(p)$，如果满足在 $0\leqslant\arg p\leqslant 2\pi$ 内有

$$\lim_{p\to\infty}F(p)=0$$

则

$$f(t)=\sum_{\text{全平面}}\mathrm{Res}[F(p)e^{pt}]$$

如果不满足以上条件，但是满足在任意小的 δ 下在 $-\frac{\pi}{2}+\delta\leqslant\arg p\leqslant\frac{\pi}{2}-\delta$ 内

$$\lim_{p\to\infty}F(p)=0$$

则有

$$f(t)=\sum_{\mathrm{Re}p<\sigma_0}\mathrm{Res}[F(p)e^{pt}]$$

2 数学物理方程

2.1 基本概念

2.1.1 数学物理方程分类

我们研究的方程可以分为以下三类

波动方程 描述以波的方式传递的物理量，如机械波、电磁波

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u+f(x,t)$$

扩散方程 描述诸如分子扩散、热传导之类的过程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\Delta u+f(x,t)$$

泊松方程 描述诸如真空静电势的物理量

$$\Delta u=-h$$

2.1.2 边界条件

一个完整的物理问题不仅包括物理方程，还包括边界条件和初始条件。很多时候数学物理方程的解要依赖于边界条件和初始条件的选择。

对于初始条件，我们可以分为以下几类

狄拉克条件 边界处的函数值确定，式中 M 表示边界上的点

$$u|_{\text{边界}} = f(M,t)$$

诺伊曼条件 边界处的沿法向的导数值确定

$$u_n|_{\text{边界}} = f(M,t)$$

混合型条件 以上两种边界条件的混合

$$(u + hu_n)|_{\text{边界}} = f(M,t)$$

2.1.3 行波法解波动方程

通过换元

$$\begin{cases} \xi = x + at \\ \eta = x - at \end{cases}$$

我们可以把一维波动方程改写成如下形式

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta}u = 0$$

其通解为

$$u = f_1(\xi) + f_2(\eta) = f_1(x+at) + f_2(x-at)$$

对于无边界条件 (无限长弦) 的情况，设初始条件为

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

则可以解出 f_1, f_2，原数理方程的解为

$$u = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

简单考虑一侧有边界条件的情况 (半无限长弦)，条件 $u|_{x=0} = 0$ 对应固定端的情况，$u_x|_{x=0} = 0$ 对应自由端的情况。对于两种边界条件只需要将初始条件分别做奇延拓和偶延拓即可。

2.2 分离变量法

2.2.1 齐次边界条件分离变量

以驻波为例，波动方程为

$$u_{xx} - a^2 u_{tt} = 0$$

边界条件为

$$\begin{cases} u|_{x=0} = 0 \\ u|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

初始条件为

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

我们假设 (实际上对于驻波我们已经知道) 方程的解可以写成 x 和 t 的独立函数

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

这样一来波动方程和初始条件可以分别转化为

$$\begin{cases} \dfrac{X''}{X} = \dfrac{T''}{a^2T} = -\lambda \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

求解 $X(x)$ 会发现，$\lambda \leqslant 0$ 时只有平凡解，$\lambda > 0$ 可以解出

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad n = 1, 2, \cdots$$
$$X(x) = C\sin\frac{n\pi x}{l}$$

常数 λ 可以取到的值称为本征值，对应的函数称为本征函数。求解 $T(t)$ 则可以得到

$$T(t) = A\cos\frac{n\pi at}{l} + B\sin\frac{n\pi at}{l}$$

这些本征解的叠加就是最后的通解，系数可以通过对初始条件做傅里叶正弦级数展开得到。

2.2.2 非齐次方程傅里叶法和冲量定理法

傅里叶方法的基本思路如下：由齐次方程最终结果给出的提示，不妨把解展开为傅里叶正弦级数

$$u(x,t) = \sum_n T_n(t)X_n(x)$$

其中 $X_n(x)$ 为对应齐次方程的本征函数。把解带入方程，尝试分离出 $T_n(t)$ 的微分方程以求解。

冲量定理法适用于初始条件为 0 的情况。对于初始条件不为 0 的问题，可以将问题分解为初始条件不为零的齐次方程问题加上一个初始条件为零的非齐次方程问题，进而分别求解。其基本思想是把非齐次项

$$u_{tt} - a^2u_{xx} = \underline{f(x,t)}$$

看作作用在弦上的外力，并且认为这个外力不是连续的，而是无数段瞬时冲量作用形成

$$f(x,t) = \int_0^t f(x,\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

每一个瞬时冲量产生的振动记作 $u^{(\tau)}(x,t)\mathrm{d}\tau$。对于这个振动，考察 $\tau + \mathrm{d}\tau$ 时刻往后的过程，此时冲量已经作用完毕，我们得到

$$\begin{aligned} &u^{(\tau)}_{tt} - a^2u^{(\tau)}_{xx} = 0 \\ &u^{(\tau)}|_{x=0} = 0, \qquad u^{(\tau)}|_{x=l} = 0 \\ &u^{(\tau)}|_{t=\tau} = 0, \qquad u^{(\tau)}_t|_{t=\tau} = f(x,\tau) \end{aligned}$$

最后，原问题的解可以认为是所有小振动的叠加，故可以写成

$$u(x,t) = \int_0^t u^{(\tau)}(x,t)\mathrm{d}\tau$$

2.2.3 非齐次边界条件处理方法

对于一维振动问题

$$
\begin{gathered}
u_{tt}-a^2u_{xx}=0\\
u|_{x=0}=\mu(t),\qquad u|_{x=l}=\nu(t)\\
u|_{t=0}=\varphi(x),\qquad u_t|_{t=0}=\psi(x)
\end{gathered}
$$

边界条件是非齐次的。为此我们选择一个满足非齐次边界条件的函数，如线性函数

$$
v(x,t)=\frac{\nu(t)-\mu(t)}{l}x+\mu(t)
$$

设待求函数

$$
u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)
$$

则函数 w 就满足非齐次方程齐次边界条件，可以求解。

如果能直接看出非齐次部分的特解，也可以用叠加原理将非齐次的特解与齐次问题的通解相加得到最终的解。

2.3 二阶常微分方程的级数解与本征值问题

2.3.1 常点邻域上的级数解法

不失一般性地考虑复变函数 $w(z)$ 的二阶线性常微分方程

$$
\begin{gathered}
\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0\\
w(z_0)=C_0,\quad w'(z_0)=C_1
\end{gathered}
$$

如果系数函数 $p(z),q(z)$ 在某点邻域解析，则称这个点为常点，否则称为奇点。

对于常点上的级数解，一般方法是把函数展开成泰勒级数的形式

$$
w(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k
$$

随后带回方程中合并同类项，找出系数之间的递推关系，再通过 C_0 和 C_1 确定系数。

2.3.2 正则奇点邻域上的级数解法

一般的奇点上方程的解过于复杂，它存在两个线性独立的级数解。如果这两个解全部具有有限个负幂次项，则称这个奇点为正则奇点。可以证明，如果 $p(z)$ 和 $q(z)$ 分别是不高于一阶和不高于二阶极点，那么这个点就是正则奇点。它的两个根为

$$
\begin{aligned}
w_1(z)&=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^{s_1+k}\\
w_2(z)&=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-z_0)^{s_2+k}+Aw_1(z)\ln(z-z_0)
\end{aligned}
$$

其中 s_1,s_2 是判定方程

$$
s(s-1)+sp_{-1}+q_{-2}=0
$$

的两个根，$s_1\geqslant s_2$。

2.3.3 广义傅里叶级数

如下展开级数称为广义傅里叶级数

$$f(x)=\sum_n f_n y_n(x)$$

其中系数 f_n 叫做广义傅里叶系数，函数族 $y_n(x)$ 叫做级数展开的基。其中函数族应满足加权正交

$$\int_a^b y_m(x)y_n(x)\rho(x)\mathrm{d}x=0,\quad m\neq n$$

当 $m=n$ 时有

$$N_m^2=\int_a^b [y_m(x)]^2\rho(x)\mathrm{d}x$$

积分值开根 N_m 称为 $y_m(x)$ 的模，$N=1$ 时称这组基是归一的。

函数族的完备性是指，对于任意分段连续且平方可积的函数 $f(x)$，都有

$$\int_a^b f^2(x)\rho(x)\mathrm{d}x=\sum_n f_n^2\int_a^b y_n^2(x)\rho(x)\mathrm{d}x$$

完备性使得 $f_N(x)$ 平均收敛于 $f(x)$。

广义傅里叶的系数由下式给出

$$f_m=\frac{1}{N_m^2}\int_a^b f(\xi)y_m(\xi)\rho(\xi)\mathrm{d}\xi$$

2.3.4 施图姆-刘维尔本征值问题

由数学物理方程引出的常微分方程通常附带边界条件，它们会限制方程的某些参数取特定值，这些值称为本征值，而对应的解称为本征函数。通常的的本征值问题都可以归于施图姆-刘维尔本征值问题。

形式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[k(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]-q(x)y+\lambda\rho(x)y=0,\quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

称为施图姆-刘维尔型方程。它辅以齐次的第一类、第二类或第三类边界条件或自然边界条件就构成施图姆-刘维尔本征值问题。

可以证明，对于 $k(x),q(x),\rho(x)$ 均为正的本征值问题有如下性质

- 若 $k(x),k'(x),q(x)$ 连续或最多在端点处有一阶极点，则存在无穷多本征值

  $$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_3\leqslant\cdots$$

  对应的本征函数的排列恰好使得节点个数依次增多

- 所有本征值都大于零

- 不同本征值对应的不同本征函数 $y_m(x),y_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上加权正交

- 本征函数族是完备的

2.4 球函数

2.4.1 方程由来

球坐标下讲拉普拉斯算符展开得到

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

对拉普拉斯方程分离变量可以得到

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) - l(l+1)R = 0 \\ \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + l(l+1)Y = 0 \end{cases}$$

其中第二个方程称为球函数方程。

对亥姆霍兹方程 $\Delta u + k^2 u = 0$ 分离变量可以得到

$$\begin{cases} r^2\dfrac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + 2r\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} + [k^2r^2 - l(l+1)]R = 0 \\ \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + l(l+1)Y = 0 \end{cases}$$

第一个方程称为 l 阶球贝塞尔方程，可以通过变量代换

$$x = kr, \quad y(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}}R(r)$$

化成贝塞尔方程，第二个方程则是球函数方程。

将球函数方程进一步分离变量，可以得到

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0 \\ \sin\theta\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) + [l(l+1)\sin^2\theta - \lambda]\Theta = 0 \end{cases}$$

第二个方程经过换元 $x = \cos\theta$ 后得到

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta = 0, \quad m^2 = \lambda$$

这称为 l 阶连带勒让德方程，$m = 0$ 时则称为 l 阶勒让德方程。

2.4.2 勒让德方程

解 l 阶勒让德方程

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0$$

将其做相应展开后，由对应系数相等可以得到递推关系

$$a_{k+2} = \frac{(k-l)(k+l+1)}{(k+2)(k+1)}a_k$$

于是我们可以求得勒让德方程的级数解，其形式为

$$w(z)=a_0y_0(z)+a_1y_1(z)$$

从递推关系可以看出，它的奇偶项是独立的。可以算出级数的收敛半径是 $|x|=1$，不过可以证明在 $x=\pm1$ 的地方级数不可能都收敛。

考虑 l 是偶数 (奇数) 的情况 $l=2n(+1)$，此时偶数 (奇数) 项级数 $y_{0(1)}(z)$ 只到 $x^{2n(+1)}$ 项为止，往后的系数全为 0。如果取奇数 (偶数) 项前的系数 $a_{1(0)}=0$，将会得到勒让德方程的一个多项式特解，称为 l 阶勒让德多项式。

很多时候，方程的解在 $x=\pm1$ 处收敛会作为勒让德方程的自然边界条件。此时构成一个本征值问题，本征值为 $l(l+1)$，l 为自然数，本征函数就是勒让德多项式。

对于 l 是整数的情况，与勒让德多项式 $P_l(x)$ 线性无关的解除了带入无穷级数公式外，还有另一种称为第二类勒让德函数的解

$$\begin{aligned}Q_l(x)&=P_l(x)\int\frac{1}{(1-x^2)[P_l(x)]^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}P_l(x)\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2^l}\sum_{k=0}^{[(l-1)/2]}x^{l-1-2k}\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^{n+1}}{2k-2n+1}\frac{(2l-2n)!}{n!(l-n)!(l-2n)!},\quad l\geqslant1\end{aligned}$$

2.4.3 勒让德多项式

上节提到勒让德多项式，其具体形式为

$$P_l(x)=\sum_{k=0}^{[l/2]}(-1)^k\frac{(2l-2k)!}{2^lk!(l-k)!(l-2k)!}x^{l-2k}$$

除了这种形式，勒让德多项式还可以写为微分形式

$$P_l(x)=\frac{1}{2^ll!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l$$

积分形式

$$\begin{aligned}P_l(x)&=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2^l}\oint_C\frac{(z^2-1)^l}{(z-x)^{l+1}}\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left[x+i\sqrt{1-x^2}\cos\psi\right]^l\mathrm{d}\psi\end{aligned}$$

勒让德多项式有母函数 (生成函数)

$$\frac{1}{\sqrt{R^2-2rR\cos\theta+r^2}}=\begin{cases}\sum\limits_l\dfrac{r^l}{R^{l+1}}P_l(\cos\theta), & r<R\\ \sum\limits_l\dfrac{R^l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta), & r>R\end{cases}$$

从中还可以推出勒让德函数的递推方程。

勒让德多项式可以作为广义傅里叶展开的基，其满足正交关系，模为

$$N_l=\sqrt{\frac{2}{2l+1}}$$

因而广义傅里叶展开的系数为

$$f_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^1f(x)P_l(x)\mathrm{d}x$$

2.4.4 连带勒让德函数

对于连带勒让德方程

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta=0$$

做变换

$$\Theta=(1-x^2)^{m/2}y(x)$$

后，原先的连带勒让德方程就变成了勒让德方程求 m 次导数之后的形式。将勒让德方程的本征函数勒让德多项式带回连带勒让德方程的解，得到

$$\Theta=(1-x^2)^{m/2}y(x)=(1-x^2)^{m/2}P_l^{[m]}(x)$$

称为连带勒让德函数，记为 $P_l^m(x)$。注意到 $m\leqslant l$。

连带勒让德函数同样有微分表示

$$P_l^m(x)=\frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}(x^2-1)^l$$

和积分表示

$$\begin{aligned}P_l^m(x)&=\frac{1}{2\pi i}\frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^l l!}(l+m)!\oint_C\frac{(z^2-1)^l}{(z-x)^{l+m+1}}\mathrm{d}z\\&=\frac{i^m}{2\pi}\frac{(l+m)!}{l!}\int_{-\pi}^{\pi}e^{im\psi}\left[x+i\sqrt{x^2-1}\cos\psi\right]^l\mathrm{d}\psi\end{aligned}$$

相同 m 不同阶的连带勒让德函数同样正交，因而也可以作为广义傅里叶展开的基，其模为

$$N_l^m=\sqrt{\frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!}}$$

2.4.5 递推公式和加法公式

利用母函数可以求得勒让德函数的递推公式

$$\begin{aligned}&(k+1)P_{k+1}(x)-(2k+1)xP_k(x)+kP_{k-1}(x)=0\\&(2k+1)P_k(x)=P'_{k+1}(x)-P'_{k-1}(x)\\&(x^2-1)P'_k(x)=kxP_k(x)-kP_{k-1}(x)\end{aligned}$$

通过对勒让德函数求导可以得到连带勒让德函数的递推公式

$$\begin{aligned}&(2k+1)xP_k^m(x)=(k+m)P_{k-1}^m(x)+(k-m+1)P_{k+1}^m(x)\\&(2k+1)(1-x^2)^{1/2}P_k^m(x)=P_{k+1}^{m+1}(x)-P_{k-1}^{m+1}(x)\\&\qquad=(k+m)(k+m-1)P_{k-1}^{m-1}(x)-(k-m+2)(k-m+1)P_{k+1}^{m-1}(x)\\&(2k+1)(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_k^m(x)=(k+1)(k+m)P_{k-1}^m(x)-k(k-m+1)P_{k+1}^m(x)\end{aligned}$$

对于单位球上的两个点 (θ,φ) 和 (θ_0,φ_0)，它们之间的夹角为

$$\cos\Theta=\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)$$

此时我们有加法公式

$$P_l(\cos\Theta)=\sum_{m=-l}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\cos\theta)P_l^m(\cos\theta_0)e^{im(\varphi-\varphi_0)}$$

2.4.6 一般球函数

球函数方程的解称为球函数。一般情况下球函数方程分离变量的解为

$$Y_l^m(\theta,\varphi)=P_l^m(\cos\theta)\begin{Bmatrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{Bmatrix}$$

也可以将其写成复数形式

$$Y_l^m(\theta,\varphi)=P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}$$

球函数中的任意两个在球面上正交，它的模是

$$N_l^m=\sqrt{\frac{2\pi\delta_m}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}},\quad \delta_m=\delta_{m0}+1$$

在球面上把一个函数以球函数为基展开需要分别对 θ 和 φ 算两次系数。有时我们也会用到正交归一的球函数

$$Y_{lm}(\theta,\varphi)=\frac{1}{N_l^m}P_l^m(\theta,\varphi)$$

2.5 柱函数

2.5.1 方程由来

柱坐标下讲拉普拉斯算符展开得到

$$\Delta=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

对拉普拉斯方程分离变量可以得到

$$\begin{cases}\Phi''+\lambda\Phi=0\\ Z''-\mu Z=0\\ \dfrac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}+\left(\mu-\dfrac{m^2}{\rho^2}\right)R=0,\quad m^2=\lambda\end{cases}$$

其中第三个方程在 $\mu\neq 0$ 时根据其正负可以变形为

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+(\pm x^2-m^2)R=0,\quad x=\sqrt{|\mu|}\rho$$

分别称为 m 阶贝塞尔方程和虚宗量贝塞尔方程。

对亥姆霍兹方程 $\Delta u+k^2u=0$ 分离变量可以得到

$$\begin{cases}\Phi''+\lambda\Phi=0\\ Z''+\mu^2 Z=0\\ \dfrac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}+\left(k^2-\mu^2-\dfrac{\lambda}{\rho^2}\right)R=0\end{cases}$$

第三个方程可以化为贝塞尔方程。

2.5.2 三类柱函数

以 ν 阶贝塞尔方程为例

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

其中 ν 不为整数。可以看出 $z_0 = 0$ 是它的正则奇点，写出判定方程后解出 $s_1 = \nu, s_2 = -\nu$，再统一以 s 写出级数展开并求出系数关系

$$a_k = \frac{-1}{(s+k)^2 - \nu^2} a_{k-2}, \quad a_1 = 0$$

对于 $s = \pm\nu$ 的级数，通常会取

$$a_0 = \frac{1}{2^{|\nu|}\Gamma(|\nu|+1)}$$

这时候这个级数记为

$$J_{\pm\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\Gamma(|\nu|+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{|\nu|+2k}$$

称作 $\pm\nu$ 阶贝塞尔函数。

有时将贝塞尔函数线性组合得到另一个特解

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$$

这称为 ν 阶诺伊曼函数。

有时还会取线性独立的解

$$\begin{cases} H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x) \\ H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x) \end{cases}$$

这称为第一种和第二种汉克尔函数。贝塞尔函数、诺伊曼函数和汉克尔函数分别称为第一类、第二类和第三类柱函数。

ν 阶贝塞尔方程的通解是

$$y(x) = \begin{cases} C_1J_\nu(x) + C_2J_{-\nu}(x) \\ C_1J_\nu(x) + C_2N_\nu(x) \\ C_1H_\nu^{(1)} + C_2H_\nu^{(2)} \end{cases}$$

后两者对于整数阶同样是通解，而第一个解因为整数阶贝塞尔函数并不线性独立

$$J_m(x) = (-1)^m J_{-m}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!(m+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}$$

并不是整数阶贝塞尔方程的通解。

以上所有函数中，在 $x \to 0$ 处收敛的有 $J_0(x), J_\nu(x)$，而发散的有 $J_{-\nu}(x), N_\nu(x)$。在 $x \to \infty$ 处它们则全部收敛。

记 ν 阶柱函数为 Z_ν，有递推公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^\nu Z_\nu(x)] = x^\nu Z_{\nu-1}(x)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[Z_\nu(x)/x^\nu] = -Z_{\nu+1}(x)/x^\nu$$

变形可得

$$Z_{\nu+1}(x)-\frac{2\nu}{x}Z_\nu(x)+Z_{\nu-1}(x)=0$$
$$2Z'_\nu(x)=Z_{\nu-1}(x)-Z_{\nu+1}(x)$$

2.5.3 傅里叶-贝塞尔级数

不同本征值对应的同阶贝塞尔函数在 $[0,\rho_0]$ 上加权正交

$$\int_0^{\rho_0}J_m(\sqrt{\mu_n}\rho)J_m(\sqrt{\mu_l}\rho)\rho\mathrm{d}\rho=0,\quad n\neq l$$

贝塞尔函数的模对于三类齐次边界条件分别为

$$\left[N_n^{(m)}\right]^2=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\rho_0^2[J_{m+1}(x_0)]^2, & J_m(x_0)=0\\ \dfrac{1}{2}\left(\rho_0^2-\dfrac{m^2}{\mu_n}\right)[J_m(x_0)]^2, & J'_m(x_0)=0\\ \dfrac{1}{2}\left(\rho_0^2-\dfrac{m^2}{\mu_n}+\dfrac{\rho_0^2}{\mu_nH}\right)[J_m(x_0)]^2, & J'_m+\dfrac{J_m}{\sqrt{\mu_n}}H=0\end{cases}$$

其中 $x_0=\sqrt{\mu_n}\rho_0$，$\mu_n=\mu_n^{(m)}$。于是我们可以将函数展开为傅里叶-贝塞尔级数

$$f(\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}f_nJ_m(\sqrt{\mu_n}\rho)$$
$$f_n=\frac{1}{\left[N_n^{(m)}\right]^2}\int_0^{\rho_0}f(\rho)J_m(\sqrt{\mu_n}\rho)\rho\mathrm{d}\rho$$

这个积分式的求解过程可能会用到柱函数的递推公式。

2.5.4 性质公式

对于三类柱函数，有 $x\to\infty$ 时的渐进公式

$$J_\nu(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$N_\nu(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$H_\nu^{(1)}(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\exp\left[i\left(x-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$H_\nu^{(2)}(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\exp\left[-i\left(x-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

整数阶贝塞尔函数有母函数

$$\exp\left[\frac{1}{2}x\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(x)z^m,\quad 0<|z|<\infty$$

通过母函数可以写出整数阶贝塞尔函数的积分表达式

$$\begin{aligned}J_m(x)&=\frac{(-i)^m}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ix\cos\psi+im\psi}\mathrm{d}\psi\\&=\frac{i^m}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ix\cos\theta+im\theta}\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

和加法公式

$$J_m(a+b)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_k(a)J_{m-k}(b)$$

2.5.5 虚宗量贝塞尔函数

虚宗量贝塞尔方程可以通过变量代换 $\xi=ix$ 换回实贝塞尔函数，为了消除表达式中的虚数，我们定义虚宗量贝塞尔函数为

$$I_\nu(x)=i^{-\nu}J_\nu(ix)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}$$
$$I_{-\nu}(x)=i^{\nu}J_{-\nu}(ix)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(-\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k}$$

虚宗量的贝塞尔方程的解可以用这两个函数的线性组合表示。对于整数阶的虚宗量贝塞尔方程，这两个函数相等，于是我们需要另一线性独立的解

$$K_\nu(x)=\frac{\pi}{2}ie^{i\frac{\pi}{2}\nu}H_\nu^{(1)}(ix)=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)}{\sin\nu\pi}$$

这称为虚宗量汉克尔函数。

2.6 格林函数法

2.6.1 格林函数的引入

考虑在边界为 Σ 的区域 T 上的泊松方程定解问题

$$\Delta u=f(\vec{r})$$
$$\left[\alpha\frac{\partial u}{\partial n}+\beta u\right]_\Sigma=\varphi(M)$$

其中 α,β 的取值决定了边界条件是第一类、第二类或第三类。这里求解的思路是把场源分解成点源的叠加，于是只要求得点源的解，再将其积分即可得到原方程的解。于是我们求解方程

$$\Delta v=\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)-\left(\frac{1}{V_T}\right)_{\text{当边界条件为第二类时}}$$
$$\left[\alpha\frac{\partial v}{\partial n}+\beta v\right]_\Sigma=0$$

第一个方程括号中的项是为了在边界条件是第二类时使得方程有解，分母根据求解的不同维度可能替换为面积或长度。这个方程的解称为格林函数 $G(\vec{r},\vec{r}_0)$。

在区域 T 上计算积分 $\iiint_T(G\Delta u-u\Delta G)\mathrm{d}V$ 并根据 G 系数的对称性可以得到 u 的表达式

$$u(\vec{r})=\iiint_T f(\vec{r}_0)G(\vec{r},\vec{r}_0)\mathrm{d}V_0-\begin{cases}\iint_\Sigma\varphi(\vec{r}_0)\dfrac{\partial G(\vec{r},\vec{r}_0)}{\partial n_0}\mathrm{d}S_0, & (\alpha,\beta)=(1,0)\\ \iint_\Sigma\varphi(\vec{r}_0)G(\vec{r},\vec{r}_0)\mathrm{d}S_0, & (\alpha,\beta)=(0,1)\\ \iint_\Sigma\varphi(\vec{r}_0)G(\vec{r},\vec{r}_0)\mathrm{d}S_0, & (\alpha,\beta)=(1,\beta)\end{cases}$$

2.6.2 含时格林函数

对于方程含时的问题，格林函数法同样适用，例如对于波动方程

$$u_{tt} - a^2\Delta u = f(\vec{r}, t)$$
$$\left[\alpha\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right]_\Sigma = \theta(M, t)$$
$$u|_{t=0} = \varphi(\vec{r}), \quad u_t|_{t=0} = \psi(\vec{r})$$

我们可以把持续作用力 $f(\vec{r}, t)$ 看作一个个瞬时作用在空间上一个个点上的脉冲力的叠加，于是我们得到格林函数满足的定解问题

$$G_{tt} - a^2\Delta G = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)\delta(t - t_0)$$
$$\left[\alpha\frac{\partial G}{\partial n} + \beta G\right]_\Sigma = 0$$
$$G|_{t=0} = 0, \quad G_t|_{t=0} = 0$$

通过和上文类似的推导，我们得到波动方程的解的积分形式

$$\begin{aligned} u(\vec{r}, t_0) = &\iiint_T \int_0^t f(\vec{r}_0, t_0) G \mathrm{d}V_0 \mathrm{d}t_0 + a^2 \iint_\Sigma \int_0^t \left(G\frac{\partial u}{\partial n_0} - u\frac{\partial G}{\partial n_0}\right) \mathrm{d}S_0 \mathrm{d}t_0 \\ &+ \iiint_T (G u_{t_0} - u G_{t_0})_{t=t_0} \mathrm{d}V_0 \end{aligned}$$

对于扩散方程，同样有解的积分形式

$$\begin{aligned} u(\vec{r}, t_0) = &\iiint_T \int_0^t f(\vec{r}_0, t_0) G \mathrm{d}V_0 \mathrm{d}t_0 + a^2 \iint_\Sigma \int_0^t \left(G\frac{\partial u}{\partial n_0} - u\frac{\partial G}{\partial n_0}\right) \mathrm{d}S_0 \mathrm{d}t_0 \\ &+ \iiint_T (G u)_{t=t_0} \mathrm{d}V_0 \end{aligned}$$

以上两个方程的后两项积分一样可以通过选择合适的格林函数边界条件计算。

2.6.3 格林函数的解

对于一般的格林函数问题，我们可以把它分解为无界区域的格林函数与有界区域格林函数的和。其中，无界区域的格林函数称为相应方程的基本解。例如，泊松方程的三维基本解为

$$G_0 = -\frac{1}{4\pi\,|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

除此之外，还可以用冲量定理法求解格林函数。这里给出一些结果。

- 一维无界空间扩散方程

$$G(x, t; \xi, \tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]$$

- 一维半无界空间第一类齐次边界条件扩散方程

$$G(x, t; \xi, \tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\right\}$$

- 一维半无界空间第二类齐次边界条件扩散方程

$$G(x, t; \xi, \tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\right\}$$

2.7 积分变换法

2.7.1 傅里叶变换法

对于无界空间的定解问题，本征值谱通常是连续的，因而解可以写成傅里叶积分的形式。这启发我们对待求方程做傅里叶变换。举例来说，对于一维波动方程

$$\begin{aligned} &u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ &u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{aligned}$$

我们以 x 为变量，对方程和边界条件做傅里叶变换，可得

$$\begin{aligned} &U'' + k^2 a^2 U = 0 \\ &U|_{t=0} = \Phi(k), \quad U'|_{t=0} = \Psi(k) \end{aligned}$$

其中大写字母函数名为对应函数的傅里叶变换。可以发现，偏微分方程变为了 t 的常微分方程。方程的解为

$$U(k,t) = \left[\frac{1}{2}\Phi(k) + \frac{1}{2ika}\Psi(k)\right] e^{ikat} + \left[\frac{1}{2}\Phi(k) - \frac{1}{2ika}\Psi(k)\right] e^{-ikat}$$

做傅里叶逆变换后即得原定解问题的解。

对于三维空间的波动方程，我们给出最终解

$$u(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{\partial\Omega} \frac{\varphi(\vec{\rho})}{at}\mathrm{d}S_\rho + \frac{1}{4\pi a}\iint_{\partial\Omega} \frac{\psi(\vec{\rho})}{at}\mathrm{d}S_\rho$$

式中 $\partial\Omega$ 表示以 $\vec{r}$ 为球心，at 为半径的球面。这个公式称为泊松公式。

对于初始条件为零的有源波动方程 (受迫波动方程)，其解为

$$u(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{\Omega} \frac{[f]}{|\vec{r}-\vec{\rho}|}\mathrm{d}V_\rho$$

其中 Ω 表示以 $\vec{r}$ 为球心，at 为半径的球体，$[f]$ 表示 $f(\vec{\rho}, t - |\vec{r}-\vec{\rho}|/a)$。上式称为延迟势。

对于二维空间的波动问题，可以将其视作三维的柱面波，因而也可以带入泊松公式，只需要消去 z 即可。最终的结果表明，二维空间的波动会在波传到某点之后持续地在那一点产生扰动而不像三维波动只在传播到的瞬间改变该点的函数值。

2.7.2 拉普拉斯变换法

拉普拉斯变换法适用于求解初值问题。